

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXVI

1929 (VII)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME X



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1929 (VII)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1929 (Anno VII).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Astronomia. — *Misure di stelle doppie.* Nota ⁽¹⁾ del Socio
G. ARMELLINI.

1. L'atmosfera di Roma si presta assai bene alle misure di stelle doppie, sia per il gran numero di notti serene, sia per la tranquillità delle immagini telescopiche che permette di eseguire le osservazioni di posizioni celesti con notevole facilità ed accuratezza. In conseguenza tali misure, iniziate tra noi dal P. Secchi con il suo catalogo di stelle doppie ⁽²⁾ e continuate specialmente dal prof. Giacomelli al R. Osservatorio del Campidoglio ⁽³⁾, sono divenute quasi tradizionali nell'ambiente astronomico romano, onde è nostro desiderio e nostra cura di proseguire questa nobile tradizione scientifica.

Più particolarmente la presente Nota, dove riporto i risultati delle osservazioni che ho eseguito su 56 doppie, può essere considerata come una continuazione di altre due mie Note, precedentemente pubblicate nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » ⁽⁴⁾, nelle quali ho studiato un centinaio di doppie ed ho esposto dettagliatamente il metodo adoperato nelle osservazioni. In conseguenza, senza ripetere quanto fu detto in proposito nei citati lavori, mi limiterò qui soltanto a ricordare le cose principali, per maggiore comodità dei lettori.

2. A tale scopo, occorre notare quanto segue:

a) *Istrumento e ingrandimento adoperato.* — Le osservazioni sono state

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1929.

(2) Roma, « Mem. Oss. Coll. Rom. », 1860.

(3) Cfr. « Rend. R. Accademia dei Lincei », 1890, 2° sem., pp. 161 e sgg., 276 e sgg.; id., 1891, 1° sem., pp. 80 e sgg.

(4) Cfr. « Rend. R. Accademia dei Lincei », 1922, 1° sem., pp. 76 e sgg.; id., 1927, 2° sem., pp. 551 e sgg.

eseguite da me personalmente valendomi dell'equatoriale Cavignato del R. Osservatorio del Campidoglio, di sette pollici di apertura e m. 2.383 di distanza focale, fornito di un buon movimento di orologeria. All'equatoriale era applicato un micrometro Merz, di cui ho determinato il passo P della vite servendomi di stelle equatoriali e ricavandone $P = 28''.1454$ in ottimo accordo col valore già trovato dal prof. E. Millosevich con le declinazioni delle Pleiadi ⁽¹⁾. Poichè il tamburo è diviso in cento parti, ognuna di esse equivale quindi a $0''.281454$.

Nelle osservazioni ho adoperato costantemente un ingrandimento di 190 diametri e cioè circa una volta per millimetro di apertura della lente obbiettiva; ingrandimento notevolmente inferiore al massimo che può dare il nostro equatoriale e che può valutarsi a circa 600 diametri. Ma in tal modo ottenevo il vantaggio grandissimo di avere immagini stellari perfettamente rotonde e ben definite, ciò che facilitava assai le osservazioni.

Di regola ho osservato sempre con i fili oscuri in campo luminoso, spesso colorato in rosso.

b) *Angoli di posizione.* — Gli angoli di posizione p sono stati osservati ponendo i due astri tra due fili paralleli del micrometro e ruotando il cerchio in modo che la congiungente i centri stellari risultasse parallela ai fili stessi. Per evitare noti errori personali, ho tenuto la testa in modo che la congiungente i due occhi fosse parallela, o perpendicolare, alla congiungente le due stelle.

c) *Distanza.* — La distanza angolare d tra i due astri è stata ottenuta col noto metodo della doppia misura. E cioè ruotavo il micrometro in modo che i due fili paralleli si disponessero normalmente alla congiungente i due astri e quindi giravo la vite micrometrica in modo da porre il filo mobile sopra la stella principale ed il filo fisso sopra la stella satellite ed eseguivo poi la lettura al tamburo della vite stessa. Ciò fatto continuavo a girare la vite fino a porre il filo mobile sopra la stella satellite ed il filo fisso sopra la stella principale, leggendo ancora al tamburo.

La differenza delle due letture, moltiplicata per $0''.281454$, dava immediatamente la doppia distanza angolare dei due astri.

d) *Ordine delle misure.* — In generale ho osservato ciascun sistema binario almeno in tre sere distinte — e spesso in quattro o cinque sere — presso al meridiano, eseguendo di regola in ciascuna sera almeno tre misure dell'angolo di posizione p e tre misure della distanza d , onde il risultato finale è basato almeno su nove osservazioni di p ed altrettante di d .

3. Premesso tutto ciò riporto i risultati delle misure nella seguente tabella, dove T indica la data media delle osservazioni (anno e millesimi di anno), β il numero del sistema binario nel Catalogo del Burnham ed n il numero delle notti di osservazione.

(1) Cfr. «Mem. Oss. Coll. Rom.», serie III, vol. VI, parte I, p. 2.

TABELLA DEI RISULTATI.

N.	T	β	p	d	n	Annotazioni
	1927					
1	0.854	591	321°.4	3".73	3	Ceti 160
	1928					
2	0.066	372	334°.7	5°.20	3	» Puppis
3	0.112	4147	112°.2	9°.67	»	
4	0.123	4202	186°.8	15°.50	»	
5	0.128	4038	45°.1	6°.65	4	
6	0.180	4421	348°.7	3°.20	3	Cancrì 17
7	0.195	4250	340°.3	17°.03	»	Navis 2
8	0.199	4723	332°.5	9°.93	»	
9	0.256	4800	122°.5	15°.90	»	
10	0.273	4798	279°.1	3°.60	»	Lyncis 130
11	0.315	4760	261°.0	4°.77	4	
12	0.328	4841	139°.1	9°.57	3	
13	0.332	4815	52°.4	3°.83	»	
14	0.337	4929	200°.6	8°.23	»	Cancrì 194
15	0.345	6778	237°.1	13°.10	5	» Bootis
16	0.385	5120	69°.3	10°.63	3	A e B
17	0.389	5059	311°.7	5°.48	4	Ursae Maioris 21
18	0.409	6837	173°.2	5°.90	3	
19	0.410	6954	104°.6	5°.87	»	» Bootis
20	0.411	6852	336°.2	8°.93	4	
21	0.437	7111	348°.0	9°.73	3	
22	0.438	6977	43°.5	7°.57	»	
23	0.439	7031	44°.8	3°.25	4	Bootis 39
24	0.464	7127	212°.3	4°.10	3	
25	0.474	6989	129°.2	8°.23	4	Hydrae 54
26	0.485	7334	189°.7	12°.07	»	Librae 178
27	0.486	7210	170°.0	13°.13	3	

Segue TABELLA DEI RISULTATI.

N.	T	β	p	d	n	Annotazioni
28	0.597	8220	325°.9	3".06	4	
29	0.607	8562	318°.5	3".73	3	Serpentis 59
30	0.611	8860	183°.5	4".48	4	
31	0.640	8997	218°.1	6".08	"	Draconis 223
32	0.649	9015	262°.7	11".90	5	Vulpeculae 1
33	0.649	9028	290°.3	7".88	"	
34	0.872	12292	349°.8	13".11	6	Aquari 94
35	0.878	12173	144°.6	8".49	4	
36	0.906	12213	280°.0	3".66	3	Aquari 284
37	0.919	12200	255°.0	15".57	"	
1929						
38	0.026	12601	88°.1	5".47	3	Andromedae 28
39	0.035	1985	129°.0	7".22	"	A e B
40	0.039	2160	62°.3	19".41	"	
41	0.040	2051	188°.7	5".56	"	
42	0.081	2220	308°.8	10".49	"	Camelopardalis 1
43	0.081	2229	116°.4	9".13	"	
44	0.082	2236	255°.6	9".45	4	
45	0.100	2284	195°.3	4".15	3	Aurigae 4
46	0.110	2269	259°.3	12".79	"	
47	0.111	2294	172°.6	12".64	5	
48	0.401	5858	258°.2	9".90	4	
49	0.413	5842	166°.4	6".06	3	
50	0.454	7341	293°.9	4".79	"	
51	0.454	7709	90°.3	16".40	"	
52	0.455	7344	84°.5	14".77	"	AB e C
53	0.476	7803	231°.3	4".87	4	
54	0.506	8574	20°.3	88".74	2	Draconis 39 A e C
55	0.509	8574	357°.2	3".88	4	Draconis 39 A e B
56	0.519	9693	141°.6	4".05	"	A e B

Astrofisica. — *Altezza della cromosfera nel 1928 ed andamento del presente ciclo solare.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ABETTI.

I risultati delle osservazioni eseguite ad Arcetri e a Madrid durante il 1928 per l'altezza della cromosfera solare, misurando l'altezza della riga H_{α} invertita, con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo, sono i seguenti:

Altezza media della cromosfera nel 1928

+90° N	+60° E	+30° E	0° E	-30° E	-60° E	-90° S	-60° W	-30° W	0° W	+30° W	+60° W	Media
Arcetri												
10".0	9".7	10".3	10".1	10".2	10".1	10".1	10".2	11".2	10".3	10".3	10".1	10".22
Madrid												
10 .0	10 .1	10 .2	10 .3	10 .3	10 .2	10 .0	9 .9	9 .9	10 .0	10 .4	10 .1	10 .11

Le osservazioni di Arcetri si basano su 111 giorni di osservazioni ⁽²⁾ da cui sono stati tolti quei valori delle altezze alle varie latitudini che risultavano perturbate per la presenza di protuberanze. A Madrid i giorni di osservazione sono stati 54. Le osservazioni di Arcetri danno un lieve abbassamento della cromosfera: da 10".3 per il 1927 a 10".2 per il 1928, quelle di Madrid non danno alcuna variazione: 10".1 nel 1927 e nel 1928.

Le osservazioni di Catania ⁽³⁾ danno un abbassamento generale molto più notevole di quello osservato ad Arcetri (da 8".5 a 7".8).

L'altezza risulta pressochè costante a tutte le latitudini e sembra che la massima sia stata raggiunta nel 1926, in coincidenza col massimo di attività delle protuberanze. Nella figura 1 sono tracciate per confronto le altezze ottenute ad Arcetri nel 1926 e 1928 e quelle ottenute a Madrid nel 1928.

L'area totale delle protuberanze, misurata in unità di protuberanza, che dal 1926 al 1927 era diminuita di 298 unità, è ulteriormente diminuita

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1929.

(2) Cfr. «Pubblicazioni Osservatorio di Arcetri», fasc. 46, 1929.

(3) G. A. FAVARO e L. TAFFARA, *L'attività del Sole nell'anno 1928*, Pubblicazioni Osservatorio di Catania, 1929.

dal 1927 al 1928 di 53 unità. In quest'anno è inoltre notevole il fatto, che il massimo secondario delle aree di alta latitudine è del tutto scomparso, con una irregolare distribuzione degli altri massimi in ambedue gli emisferi.

È interessante di confrontare le curve di frequenza di attività delle protuberanze e delle macchie a questo punto del ciclo e metterle in relazione con l'altezza della cromosfera.

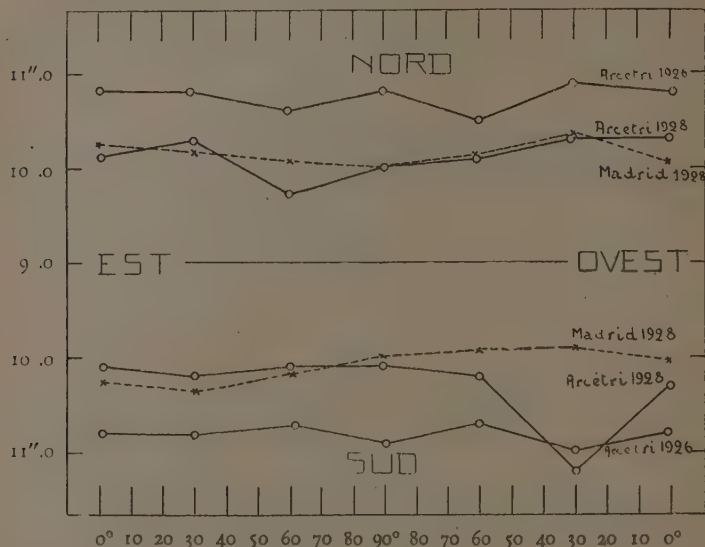


Fig. 1.

Nella figura 2 sono segnate le altezze della cromosfera (ordinate a sinistra) misurate ad Arcetri per gli anni dal 1921 al 1928; l'area delle protuberanze in unità di protuberanze (ascisse a destra), dedotte dalle osservazioni di Arcetri, Catania, Zurigo⁽¹⁾, e i numeri relativi delle macchie⁽²⁾ calcolati a Zurigo. Si deve osservare che mancano le osservazioni del 1921 dell'altezza della cromosfera non essendo state cominciate regolarmente in Arcetri che nel 1922, così per il 1921 le unità di protuberanza sono soltanto quelle di Zurigo. Dal diagramma si rileva che l'andamento delle tre quantità è, in via generale, concorde, soltanto che mentre il massimo dell'altezza della cromosfera e dell'area delle protuberanze sembra sia stato raggiunto nel 1926, i numeri relativi delle macchie hanno continuato a

(1) Cfr. « Pubblicazioni Osservatorio di Arcetri », fascicoli 39 a 46.

(2) « Astron. Mitteil. », Zürich, CXIII a CXIX.

crescere fino a tutto il 1928. Ciò è tanto più da notarsi in quanto nei passati cicli si è in generale constatato un più stretto accordo fra la frequenza delle protuberanze e i numeri relativi delle macchie ⁽¹⁾, ma è vero altresì, che come l'amplitudine dei due fenomeni è molto diversa ⁽²⁾, così è possibile che esista in tutti i cicli, o in alcuno di essi, uno sfasamento fra le due curve di frequenza, che potrà essere messo in evidenza soltanto con un più preciso computo delle aree delle protuberanze, come si fa ora col presente programma internazionale.

Riguardo alla forma della cromosfera e alle sue variazioni durante il ciclo, è interessante di segnalare un recente lavoro di Jiménez presentato al Congresso dell'Unione internazionale a Leida ⁽³⁾. In questo egli riferisce

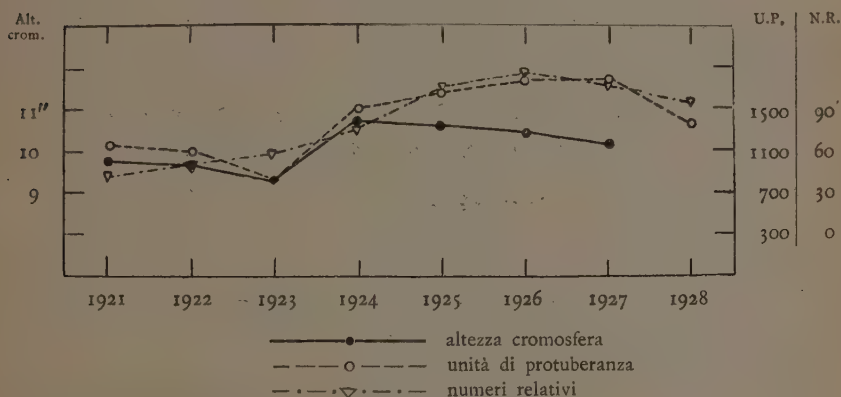


Fig. 2.

sulle osservazioni dell'altezza della cromosfera, da lui eseguite a Madrid in due periodi: dal settembre 1913 alla fine del 1915, e dal giugno 1923 alla fine del 1926. Separando detti intervalli per rotazioni solari Jiménez trova, che in corrispondenza ai minimi dell'attività solare la cromosfera è notevolmente più alta ai poli che non all'equatore e poi, col progredire del ciclo, la sua altezza va via via uguagliandosi, tanto che ai massimi risulta generalmente più alta, ma uniforme a tutte le latitudini. Queste osservazioni di Madrid confermano completamente quanto è stato da me trovato con le osservazioni di Arcetri fino dal principio di questo ciclo ⁽⁴⁾ (1922-1923) e resta ora da vedere se nel prossimo minimo tornerà a verificarsi il fenomeno e da ricercare a quali cause esso debba attribuirsi.

(1) «Handbuch der Astrophysik», Bd. IV, p. 155, Springer, 1929.

(2) FÉNYI, «Publ. des Haynald Observ.», XI. Heft, p. 9, Kalocsa, 1922.

(3) «Anuario del Observatorio Astronomico de Madrid para 1929, p. 355.

(4) Questi «Rendiconti», vol. III, ser. 6^a, p. 143, 1926.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla derivazione parziale dei tensori.* Nota di MARIA PASTORI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota in corso di pubblicazione presso questi « Rendiconti » ⁽²⁾ ho considerato le componenti di un tensore che si ottengono da quelle covarianti saturando soltanto alcuni degli indici mediante i parametri di un'ennupla di congruenze (ortogonali o no).

Nella presente determino il legame tra le componenti parzialmente intrinseche degli ordinari tensori e quelle dei *tensori vincolati*, introdotti dal prof. Cisotti in alcune Note recenti ⁽³⁾.

Tale legame è una legge di derivazione parziale perchè, operando sulle componenti parzialmente intrinseche, si tien conto dei soli indici di covarianza.

Osservo poi che costruendo dei *tensori* quadrupli *vincolati*, dedotti dal tensore fondamentale, si ottengono sempre, come differenze delle loro componenti, quelle del tensore di Riemann.

1. *Caso delle congruenze ortogonali.* — Considero per semplicità un tensore doppio T di una varietà riemanniana V_n e in essa un'ennupla di congruenze ortogonali di cui λ_i siano i parametri e λ_j i momenti ⁽⁴⁾. Le componenti parzialmente intrinseche di T sono ⁽⁵⁾

$$(1) \quad T_{ik} = \sum_j^n T_{jk} \lambda_j.$$

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) *Sulla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori.* Dovendola spesso citare la indicherò brevemente con R.

(3) U. CISOTTI, *Il tensore triplo di Christoffel.* Questi « Rendiconti », 1° sem. 1929, pp. 128-131 e *Il secondo tensore triplo di Christoffel e la derivazione intrinseca*, ibidem, pagine 673-676. In esse il prof. Cisotti si serve dell'ennupla di congruenze coincidenti con quella delle coordinate e chiama i tensori « vincolati all'ennupla di riferimento ». Io considero anche il caso in cui le due ennuple siano distinte, chiamando allora il tensore « vincolato all'ennupla di congruenze ».

(4) Gli indici prendono sempre i valori 1, 2 ... n.

(5) R. form. (2).

Queste formole permettono di scomporre il tensore doppio T in n tensori semplici, di componenti covarianti (1) (ove l'indice i si consideri come ordinale) ⁽¹⁾. Gli n tensori doppi, derivati di questi ultimi, hanno per componenti covarianti:

$$(2) \quad T_{\cdot k/r} = \frac{\partial}{\partial x_r} T_{\cdot k} - \sum_j^n T_{\cdot j} \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\}_r.$$

Opero un cambiamento di coordinate, lasciando fisse le congruenze; le (2) si trasformano secondo la legge di covarianza ⁽²⁾:

$$(3) \quad T_{\cdot k/r} = \sum_j^n T_{\cdot j/l} \frac{\partial x_j}{\partial x_r} \frac{\partial x_l}{\partial x_r}.$$

Opero un cambiamento di congruenze, lasciando fisse le coordinate:

$$(4) \quad \lambda_{\cdot k} = \sum_h^n \lambda_{\cdot h} c_{\cdot k}^h.$$

Da (1) e da (2) discende la seguente legge di trasformazione:

$$(5) \quad T_{\cdot k/r} = \sum_j^n T_{\cdot j} c_{\cdot k/r}^j + \sum_j^n T_{\cdot j} \frac{\partial c_{\cdot k/r}^j}{\partial x_r}.$$

Finalmente opero un cambiamento simultaneo di coordinate e congruenze. Le (3) e (5) danno:

$$(6) \quad T_{\cdot k/r} = \sum_j^n T_{\cdot j/l} c_{\cdot k/r}^j \frac{\partial x_j}{\partial x_r} \frac{\partial x_l}{\partial x_r} + \sum_j^n T_{\cdot j} \frac{\partial c_{\cdot k/r}^j}{\partial x_r}.$$

L'esistenza degli ultimi termini in (5) e (6) esprime che le (2) non possono considerarsi come componenti parzialmente intrinseche di un ordinario tensore triplo ⁽³⁾, conseguenza questa del fatto che la legge di passaggio dalle (1) alle (2) è una legge di derivazione parziale. Perciò, seguendo una denominazione introdotta dal prof. Cisotti nelle Note citate, indicherò l'ente individuato dalle n^3 componenti (2) col nome di *tensore triplo vincolato all'ennupla delle congruenze*.

Operando sulle (2) come si opera sulle componenti parzialmente in-

(1) Come ho già osservato in R tale scomposizione richiede però che non si considerino trasformazioni contemporanee di coordinate e di congruenze.

(2) Per le notazioni cfr. R. n. 1.

(3) R. n. 1, form. (6) e (6').

trinseche di un tensore triplo per passare alle sue componenti (totalmente) intrinseche e covarianti ⁽¹⁾, si ha

$$(7) \quad \sum_1^n T_{ijh} T_{ijh} \lambda^h = \frac{\partial T}{\partial x_r} - \sum_1^n T_{ih} \gamma_{khr} = T_{(i)k/r},$$

$$(8) \quad \sum_1^n T_{ijk} \lambda_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_r} - \sum_1^n T_{ij} \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} - \sum_1^n T_{ij} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_r} = T_{(i)k/r} - \sum_1^n T_{ij} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_r}.$$

Le (7) esprimono che le componenti (totalmente) intrinseche di un tensore triplo vincolato, si ottengono dalle componenti (totalmente) intrinseche del tensore doppio (1) mediante derivazione intrinseca ⁽²⁾ parziale (nella quale cioè non si tien conto dell'indice tra parentesi) ⁽³⁾.

Indicando le (8) col simbolo $T_{i,kl}$, si trovano con le componenti del tensore triplo derivato di T le seguenti relazioni:

$$(9) \quad T_{i,klr} = T_{ik/r} - \sum_1^n T_{ij} \lambda_{ilr}.$$

2. *Caso delle congruenze non ortogonali. Loro coincidenza con quelle delle linee coordinate.* — Le considerazioni fatte nel numero precedente si possono ripetere anche quando le congruenze dell'ennupla non sono ortogonali. Nelle formole ottenute però, mentre vengono conservati i parametri, si sostituiscono ai momenti gli elementi l_i reciproci di λ_i nel determinante di questi ultimi ⁽⁴⁾. In particolare nelle (7), al posto dei coefficienti di rotazione di Ricci, vengono sostituiti i simboli analoghi:

$$(10) \quad \gamma'_{khr} = - \sum_1^n l_{ij} l_{ih} \lambda^i \lambda^j \cdot$$

(1) R. n. 1, form. (7) e (8).

(2) U. CISOTTI, *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto*, questi « Rendiconti », ser. 5^a, vol. XXVII (1^o sem. 1918) pp. 387-391. Cfr. anche, dello stesso Autore: *Lezioni di calcolo tensoriale*, Milano, Tamburini, 1928, 53.

(3) Esse si ottengono servendosi delle note relazioni tra parametri e momenti, che esprimono le condizioni di ortogonalità, delle formole $T_{.s} = \sum_1^n T_{ik} \lambda_s$ e di quelle che determinano i coefficienti di rotazione di Ricci γ_{khr} .

Le (8) si ottengono servendosi pure delle condizioni di ortogonalità, delle formole $\sum_1^n \lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_r} = - \sum_1^n \lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_r}$ che ne sono una conseguenza, e delle (1).

(4) R. n. 2.

(5) Conservo gli indici di γ' a fianco della lettera per analogia coi simboli di Ricci, per quanto gli indici stessi non siano di covarianza.

Nel caso particolare in cui, per qualunque sistema di coordinate, si scelgano le congruenze dell'ennupla coincidenti con quelle delle coordinate medesime, vanno sostituite nelle formole precedenti i seguenti valori:

$$(11) \quad \lambda_i^j = \frac{e_i^j}{\sqrt{a_{ii}}} \quad ; \quad l_j^i = e_i^j \sqrt{a_{ii}} \quad ; \quad c_{ih}^b = \frac{\sqrt{a_{hh}}}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{\partial x_h}{\partial x_i}^{(1)}$$

Ma in questo caso, non potendo considerare altro che trasformazioni contemporanee delle coordinate e delle congruenze, non si può affermare l'equivalenza di un tensore triplo vincolato a n tensori doppi (ordinari). Fissato però un valore di i , e immaginando di fare una trasformazione delle coordinate che lasci fisse le i^{esima} si ha ancora da (6) (ove si pongano i valori precedenti di c e si introduca l'ipotesi $\frac{\partial x_h}{\partial x_i} = e_i^h$) la legge (3) di trasformazione delle componenti covarianti di un tensore doppio.

Le (8) diventano in questo caso (usando del simbolo introdotto in (9))

$$(8') \quad T_{i, k| r} = T_{(i) k| r} - \frac{T_{ik} \left[\begin{smallmatrix} i & r \\ i \end{smallmatrix} \right]^{(2)}}{a_{ii}}$$

e applicate al tensore fondamentale danno

$$(8'') \quad a_{i, k| r} = \left[\begin{smallmatrix} i & r \\ k \end{smallmatrix} \right] - \frac{a_{ik} \left[\begin{smallmatrix} i & r \\ i \end{smallmatrix} \right]^{(3)}}{a_{ii}}$$

componenti del tensore vincolato chiamato dal prof. Cisotti primo tensore triplo di Christoffel (4).

Le (7) si ottengono in questo caso da (8') dividendo per $\sqrt{a_{ii} a_{kk} a_{rr}}$.

3. *Applicazione al tensore fondamentale.* — Invece di derivare una sola volta le (1), si possono derivare più volte ottenendo così dei *tensori vinco-*

$$(1) \text{ R. n. 3. Coi valori (11) le } \gamma'_{kbr} \text{ diventano } \frac{-1}{\sqrt{a_{kk} a_{hh} a_{rr}}} \left(e_k^b \left[\begin{smallmatrix} h & r \\ h \end{smallmatrix} \right] - a_{hh} \left\{ \begin{smallmatrix} k & r \\ h \end{smallmatrix} \right\} \right).$$

Cfr. U. CISOTTI, 2^a Nota citata, formola (4) e (6).

Il primo termine tra parentesi si può scrivere $e_k^b \left[\begin{smallmatrix} k & h \\ r \end{smallmatrix} \right]$ e coincide così col termine corrispondente della formola (4) della Nota del prof. Cisotti ora citata. In essa, per un evidente errore di stampa, è stato messo, nel secondo termine del secondo membro, un simbolo di Christoffel di 2^a specie, anziché di 1^a.

(2) Questa formola, con notazioni diverse, è contenuta (come gentilmente mi comunica il prof. Cisotti) in una Nota del prof. DE MIRA-FERNANDES in corso di pubblicazione presso questi «Rendiconti» dal titolo: *Tensori associati ad un'ennupla vettoriale*.

(3) Come si vede subito, per la relazione $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} = \left[\begin{smallmatrix} i & r \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} k & r \\ i \end{smallmatrix} \right]$ è infatti $a_{(i)k| r} = \left[\begin{smallmatrix} i & r \\ k \end{smallmatrix} \right]$ e cioè i simboli di Christoffel si ottengono dal tensore fondamentale per derivazione parziale. Cfr. F. A. SCHOOTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1924, p. 64.

(4) U. CISOTTI, prima Nota citata, formola (1).

lati quadrupli, quintupli, ecc.⁽¹⁾, che, nel caso in cui le congruenze dell'ennupla non coincidano con quelle delle coordinate sono equivalenti a ennuple di ordinari tensori tripli, quadrupli, ecc. Le formole di commutazione delle derivate seconde covarianti indicano come si possano ottenere componenti di ordinari tensori mediante differenze tra le componenti di tensori vincolati. Si ha infatti:

$$(12) \quad T_{i \cdot k/rs} - T_{i \cdot k/rs} = \sum_j T_{i \cdot j} \{kj, sr\}.$$

I secondi membri sono componenti parzialmente intrinseche di un tensore quadruplo composto di T col tensore di Riemann⁽²⁾.

Applico ora la (12) al tensore fondamentale a_{ik} . Se le congruenze dell'ennupla sono ortogonali e distinte da quelle delle linee coordinate, le (12) diventano

$$(12') \quad \lambda_{k/rs} - \lambda_{k/rs} = \sum_j \lambda_j \{kj, sr\}$$

e danno le componenti parzialmente intrinseche del tensore di Riemann, da esse si passa alle componenti covarianti moltiplicando per λ_h e sommando rispetto ad i (e applicando le formole $\sum_i \lambda_i \lambda_h = a_{jh}$) e alle componenti (totalmente) intrinseche moltiplicando per $\lambda^k \lambda^r \lambda^s$ e sommando rispetto a k, r, s .

Si hanno così nei primi membri le differenze delle derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione di Ricci (componenti intrinseche di una ennupla di tensori doppi dedotti dal tensore fondamentale mediante la legge (7)) e nei secondi membri i simboli a 4 indici di Ricci. Sotto questa forma le (12') furono osservate la prima volta dal prof. Cisotti fin dal 1918⁽³⁾.

Se le congruenze dell'ennupla coincidono con quelle delle coordinate le (12') (postovi $\lambda_k = \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii}}}$) danno: $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} (ki, sr)$ ⁽⁴⁾.

(1) Partendo da un tensore qualunque si capisce quanta arbitrarietà ci sia nella costruzione di tensori vincolati, ottenuti combinando in vario modo saturazioni parziali e derivazioni.

(2) Le (12) mostrano che la proprietà ciclica dei simboli di Riemann è un caso particolare della formola $S_{hrs} T_{i \cdot k/rs} = 0$. Cfr. la mia Nota: *Commutazione totale e parziale relativa ai tensori derivati*. Questi « Rendiconti », 1° sem. 1929, pp. 474-479.

(3) U. CISOTTI, *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto*. Nota II, questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. XXVII, 2° sem. 1918, pp. 22-24, formola (12).

(4) Ciò si ottiene direttamente anche dalle (8''), tornando a scriverle sotto la forma parzialmente intrinseca $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \left(\left[\begin{matrix} i & r \\ k & \end{matrix} \right] - \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \left[\begin{matrix} i & r \\ i & \end{matrix} \right] \right)$, derivando rispetto ad s (con la legge dei tensori doppi perchè i va considerato come indice ordinale) e facendo la differenza

Il legame tra il tensore fondamentale e quello di Riemann è dunque il seguente: le componenti del tensore di Riemann sono differenze delle componenti del tensore quadruplo vincolato, ottenuto dal tensore fondamentale mediante la saturazione di un indice e due derivazioni. Essa però è l'ordinaria derivazione tensoriale rispetto agli n tensori semplici ottenuti mediante saturazione parziale del tensore fondamentale, mentre rispetto al tensore fondamentale è una derivazione parziale.

Applicando la derivazione parziale direttamente al tensore fondamentale si esprime nel modo seguente il legame tra il tensore fondamentale e quello di Riemann

$$a_{(i)k/rs} - a_{(i)k/sr} = (k_i, sr) \quad (1).$$

dopo aver scambiato r con s . Il prof. Cisotti gentilmente mi comunica che a questo stesso risultato è giunto il prof. DE MIRA FERNANDES, *Le tenseur quadruple de Christoffel et le tenseur de Riemann*, Nota presentata in questa stessa seduta. In modo analogo si può verificare direttamente il legame tra il « secondo tensore triplo di Christoffel » e il tensore di Riemann. Basta prenderlo sotto la forma $\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \left(g_i^k \left[\begin{smallmatrix} i & r \\ i \end{smallmatrix} \right] - a_{ii} \left\{ \begin{smallmatrix} k & r \\ i \end{smallmatrix} \right\} \right)$ (cfr. nota (1) a pagina 13) derivare rispetto ad s (considerando i come ordinale) e fare la differenza dopo aver scambiato r con s . Si ottiene $\{k_i, sr\} \sqrt{a_{ii}}$. Ma anche questo risultato è un caso particolare della (12) e si può mettere sotto la forma:

$$l_{k/rs} - l_{k/sr} = \sum_i l_j^i \{k_j, sr\}$$

nella quale l_k sono le componenti parzialmente intrinseche del tensore fondamentale, ottenute mediante le $l^j_i = \sum_b l_b a^{bj}$ (o, più semplicemente, considerando le componenti miste a_k^j del tensore fondamentale, e saturando l'indice di controvarianza mediante l_j).

(1) Cfr. M. R. LAGRANGE, *Calcul différentiel absolu*, « Mém. des Sciences Math. », 1926, p. 15.

Matematica. — *Particolare formola di maggiorazione per le soluzioni di una classica equazione alle derivate parziali del quart'ordine della Fisica-matematica.* Nota di M. PICONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Alla maggiorazione degli integrali — verificanti determinate condizioni al contorno — delle equazioni differenziali lineari, ordinarie o alle derivate parziali, ho già dedicato precedenti lavori ⁽²⁾, e con quello citato alla lettera c) si assicura che all'effettivo calcolo approssimato dell'integrale e alla contemporanea valutazione dell'errore d'approssimazione si può pervenire in modo del tutto soddisfacente per le applicazioni numeriche ⁽³⁾ col concorso di opportune formole di maggiorazione per l'integrale e per alcune sue derivate, alle quali già provvedono, in parte, i sopradetti lavori.

Le formole della citata Nota di questi « Rendiconti » forniscono la maggiorazione della soluzione del problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittico-parabolica alle derivate parziali del second'ordine in quante si vogliano variabili indipendenti, per esempio, nell'ipotesi che, detto **T** il dominio a cui si riferisce il problema, esista una funzione sempre positiva in **T** che renda ovunque negativo il primo membro dell'equazione, ridotta omogenea. Le formole della citata Memoria della « Mathematische Zeitschrift » conseguono invece lo stesso scopo senza alcuna ipotesi restrittiva, ma limitatamente alle equazioni differenziali ordinarie. Ora ho potuto recentemente ben stabilire che queste ultime formole sono suscettibili di essere estese alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo autoaggiunto, di qualsivoglia ordine, liberate pur esse da ogni ipotesi restrittiva, a patto

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) M. PICONE, a) *Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del second'ordine* [questi « Rendiconti », vol. V della serie 6^a (1^o sem. 1927), pp. 138-143]; b) *Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte* [« Mathematische Zeitschrift », Band 28 (1928), pp. 519-555]; c) *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-matematica* [« Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », tomo LII (1928), pp. 225-253]; d) *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine* [Memoria insignita del premio « Tenore » dall'Accademia Pontaniana di Napoli (seduta del 10 giugno 1928), in corso di stampa negli « Annali di Matematica »].

(3) Posso anche annunziare che la conferma sperimentale di ciò è stata raggiunta nei lavori di calcolo numerico che si stanno compiendo all'Istituto di Calcolo infinitesimale della R. Università di Napoli.

però di accontentarsi, anzichè della maggiorazione della soluzione u , di quella dell'integrale del quadrato della u :

$$\int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T}.$$

Per fortuna tale maggiorazione consente egualmente, com'è manifesto, quella del resto di eventuali serie, costruite al modo di Fourier, approssimanti la soluzione nel dominio \mathbf{T} di sua esistenza, ciò che ha di conseguenza importante la possibilità di valutare l'errore nei più generali calcoli d'approssimazione lineare relativi alla soluzione. Con questa breve Nota mi permetto di comunicare una fra le più semplici di quelle formole, esponendo anche tutto il semplice procedimento che ad essa conduce, prendendo in considerazione la soluzione u della seguente particolare equazione alle derivate parziali del quart'ordine, in quante si vogliano variabili indipendenti x_1, x_2, \dots, x_p , coordinate cartesiane in uno spazio euclideo $S(p)$ a p dimensioni,

$$(1) \quad \Delta \Delta u + \lambda A u = f \quad (\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u),$$

con le seguenti condizioni alla frontiera \mathbf{FT} del dominio \mathbf{T} (supposto regolare)

$$(2) \quad u(\text{su } \mathbf{FT}) = \frac{du}{dn}(\text{su } \mathbf{FT}) = 0, \quad (n \text{ normale alla } \mathbf{FT}).$$

Date le classiche applicazioni che riceve la risoluzione dell'equazione (1) con le condizioni (2) alla frontiera, parmi appunto che valga la pena di richiamare l'attenzione sui risultati della presente Nota.

1. Formola di maggiorazione. — Detto μ un valore positivo approssimante per difetto il più piccolo autovalore di λ per le equazioni:

$$(3) \quad \Delta u + \lambda u = 0, \quad u(\text{su } \mathbf{FT}) = 0,$$

si ha, com'è ben noto,

$$(4) \quad \mu \int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T} \equiv \int_{\mathbf{T}} (\operatorname{grad} u)^2 d\mathbf{T},$$

per ogni funzione u continua in \mathbf{T} con le sue derivate parziali del primo ordine, identicamente nulla su \mathbf{FT} . Posto, per ogni tale funzione, supposta di classe C'' in $\mathbf{T} - \mathbf{FT}$,

$$\Delta u = f,$$

si trae

$$\int_{\mathbf{T}} (\operatorname{grad} u)^2 d\mathbf{T} = \int_{\mathbf{T}} f u d\mathbf{T},$$

e quindi, per la disuguaglianza di Schwarz,

$$\int_{\mathbf{T}} (\text{grad } u)^2 d\mathbf{T} \equiv \sqrt{\int_{\mathbf{T}} f^2 d\mathbf{T}} \sqrt{\int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T}},$$

donde, in virtù della (4),

$$(5) \quad \mu^2 \int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T} \equiv \int_{\mathbf{T}} f^2 d\mathbf{T} = \int_{\mathbf{T}} (\Delta u)^2 d\mathbf{T}.$$

Consideriamo le (1) e (2). Da esse segue

$$\int_{\mathbf{T}} (\Delta u)^2 d\mathbf{T} + \int_{\mathbf{T}} \lambda A u^2 d\mathbf{T} = \int_{\mathbf{T}} f u d\mathbf{T},$$

donde in forza della (5) e della disuguaglianza di Schwarz,

$$\mu^2 \int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T} + \int_{\mathbf{T}} \lambda A u^2 d\mathbf{T} \equiv \sqrt{\int_{\mathbf{T}} f^2 d\mathbf{T}} \sqrt{\int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T}},$$

e quindi

$$(6) \quad [\mu^2 + \min_{\mathbf{T}} (\lambda A)] \sqrt{\int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T}} \equiv \sqrt{\int_{\mathbf{T}} f^2 d\mathbf{T}},$$

designando con $\min_{\mathbf{T}} F$, $\max_{\mathbf{T}} F$, rispettivamente il minimo e il massimo in \mathbf{T} di una funzione F . Si ha dunque il teorema:

I. Se μ è un valore approssimato per difetto del più piccolo autovalore di λ per le equazioni (3), e se riesce

$$\mu^2 + \min_{\mathbf{T}} (\lambda A) > 0,$$

per la soluzione u della (1) verificante le condizioni (2) alla frontiera di \mathbf{T} , sussiste la seguente formola di maggiorazione:

$$(7) \quad \int_{\mathbf{T}} u^2 d\mathbf{T} \equiv \frac{1}{[\mu^2 + \min_{\mathbf{T}} (\lambda A)]^2} \int_{\mathbf{T}} f^2 d\mathbf{T}.$$

E si ha dunque $u \equiv 0$, quando sia $f \equiv 0$.

2. Limitazioni degli autovalori per le equazioni (1) e (2). — Se ne deduce, ovviamente, il seguente teorema che fornisce delle limitazioni notevoli per gli autovalori del parametro λ relativi alle equazioni (1) e (2). Naturalmente supponiamo A non identicamente nullo in \mathbf{T} .

II. Noto un valore positivo μ , approssimato per difetto del più piccolo autovalore di λ per le equazioni (3), si ha subito un intervallo aperto (λ', λ'') privo di autovalori di λ per le equazioni (1) e (2), e riesce:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda' = -\frac{\mu^2}{\max_{\mathbf{T}} A} & , & \lambda'' = +\infty \quad , \quad \text{quando } \min_{\mathbf{T}} A \geq 0; \\ \lambda' = -\infty & , & \lambda'' = -\frac{\mu^2}{\min_{\mathbf{T}} A} \quad , \quad \text{quando } \max_{\mathbf{T}} A \leq 0, \\ \lambda' = -\frac{\mu^2}{\max_{\mathbf{T}} A} & , & \lambda'' = -\frac{\mu^2}{\min_{\mathbf{T}} A} \quad , \quad \text{quando } \min_{\mathbf{T}} A \cdot \max_{\mathbf{T}} A < 0. \end{array} \right.$$

3. Valori approssimati per difetto del più piccolo autovalore per le equazioni (3). — La determinazione di valori di μ che si possono porre nelle formole (7) e (8) è possibile in infiniti modi, ed ovviamente vi è vantaggio ad avere valori più grandi possibili. Determinazioni notevoli, da questo punto di vista, si possono trarre dai risultati di alcuni miei lavori, antichi e recenti, pubblicati in questi « Rendiconti » ⁽¹⁾. Si ha, per esempio:

III. Se il dominio \mathbf{T} è contenuto in un iperstrato di larghezza δ si può porre

$$\mu = \frac{\pi^2}{\delta^2}.$$

IV. Se v fra le coordinate x_1, x_2, \dots, x_p ($v \leq p$) del punto variabile in \mathbf{T} , verificano le limitazioni:

$$a_1 \leq x_1 \leq a_1 + \delta_1, a_2 \leq x_2 \leq a_2 + \delta_2, \dots, a_v \leq x_v \leq a_v + \delta_v \quad (2),$$

si può porre

$$\mu = \pi^2 \left(\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \dots + \frac{1}{\delta_v^2} \right).$$

V. Se v fra le coordinate ($v \leq p$) del punto variabile in \mathbf{T} , verificano la limitazione:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_v - a_v)^2 \leq r^2 \quad (3),$$

* (1) M. PICONE, a) Sul problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine [questi « Rendiconti », vol. XX, della serie 5^a (1° sem. 1911), pp. 531-538]; b) Teorema di unicità nei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche [ibidem, vol. XXIII della serie 5^a (1° semestre 1914), pp. 413-420]; c) Sulle funzioni melaarmoniche [ibidem, vol. V della serie 6^a (1° sem. 1927), pp. 90-95].

(2) Se cioè il dominio \mathbf{T} è contenuto in un iperprisma retto (illimitato per $v < p$) avente per base, nello spazio $S_{(v)}$ del punto (x_1, x_2, \dots, x_v) , il dominio rettangolare di punti estremi (a_1, a_2, \dots, a_v) , $(a_1 + \delta_1, a_2 + \delta_2, \dots, a_v + \delta_v)$.

(3) Se cioè il dominio \mathbf{T} è contenuto in un ipercilindro circolare netto (ipersfera per $v = p$) avente per base, nello spazio $S_{(v)}$ del punto (x_1, x_2, \dots, x_v) , il dominio circolare di centro nel punto (x_1, x_2, \dots, x_v) e di raggio r .

si può porre

$$\mu = \frac{\alpha_v^2}{r^2},$$

ove α_v è la più piccola radice positiva della funzione di Bessel d'ordine $\frac{v}{2} - 1$.

Si ha dunque:

$$\text{per } v = 2 \quad , \quad \alpha_2 = 2.4048 \dots,$$

$$\text{per } v = 3 \quad , \quad \alpha_3 = \pi, \text{ ecc.}$$

4. **Caso dell'equazione (1) in una variabile.** — In tal caso il dominio **T** si riduca all'intervallo (a, b) dell'asse x . A pag. 552 della mia citata Memoria della « Mathematische Zeitschrift » trovasi la relazione

$$\max u^2(x) \equiv \frac{(b-a)^3}{192} \int_a^b \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx,$$

dalla quale si deduce che:

$$\frac{192}{(b-a)^4} \int_a^b u^2 dx \equiv \int_a^b \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx,$$

e pertanto, ripetendo il ragionamento seguito al n. I, si trova:

$$\left(\frac{192}{(b-a)^4} + \min(\lambda A) \right) \sqrt{\int_a^b u^2 dx} \equiv \sqrt{\int_a^b f^2 dx}.$$

Ciò consente di porre, nei teoremi I e II,

$$\mu^2 = \frac{192}{(b-a)^4}$$

duplicando quasi, con evidente vantaggio, il valore $\mu^2 = \frac{\pi^4}{(b-a)^4}$ fornito dalle determinazioni del numero precedente.

Matematica. — *Sull'integrazione indefinita.* Nota ⁽¹⁾ di R. CACCIOPOLI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

1. Ormai ultimata, la teoria moderna dell'integrazione definita appare essenzialmente fondata sopra una operazione di *prolungamento* della funzione di linea $\int_a^b f(x) dx$, definita inizialmente per le sole funzioni continue, nel

campo delle funzioni discontinue. Attraverso questa operazione si è condotti nel modo più naturale alla scoperta delle funzioni misurabili, lasciando espandere liberamente, per dir così, il nucleo delle funzioni continue ⁽²⁾.

Si riconosce così che le funzioni sommabili costituiscono in qualche modo il *campo naturale* di esistenza del *funzionale* $\int_a^b f(x) dx$. Oltre i confini di questo campo, la nozione di integrale definito perde il suo concreto contenuto geometrico ed il suo carattere di necessità.

Ma per l'integrazione *indefinita* le cose stanno diversamente: il problema, puramente analitico, che essa è chiamata a risolvere, quello delle funzioni primitive, esige in generale la considerazione di funzioni non sommabili; si presenta dunque la necessità di estendere la nozione di integrale indefinito oltre i limiti della teoria lebesguiana.

Da due punti di vista diversi si può affrontare questo nuovo problema: si può concepire l'integrale indefinito come *funzione di punto* o come *funzione d'intervallo*. Il secondo è quello che ha implicitamente adottato Denjoy: definito l'integrale per tutti gli insiemi su cui l'integrando è sommabile, se ne cerca un *prolungamento continuo* su una famiglia di insiemi che comprenda tutti gli intervalli. Dal primo, concepita la funzione integrale quale *trasformata* (*transmuée* nel senso di Bourlet) dell'integrando, si cercherebbe di ampliare il campo soggetto alla *trasformazione funzionale*.

Queste due posizioni del problema ne orientano la soluzione senza fissarla, il problema stesso presentando un grado d'indeterminazione che lo differenzia profondamente da quello dell'integrazione definita. Non si può proprio parlare di un « campo naturale di esistenza » dell'integrale indefinito: si pensi soltanto ai due aspetti, particolare e generale, della *totalizza-*

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1929.

(2) Vedi la mia Memoria *Sull'integrazione delle funzioni discontinue*, « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », t. 52.

zione, ed al carattere arbitrario rivestito da certe modalità dei processi di estrapolazione delle funzioni additive di insiemi a più dimensioni, carattere giustificato solo *après coup* dallo scopo raggiunto; peraltro questo scopo, la costruzione delle primitive, si sorpassa sempre più che non si raggiunga esattamente ⁽¹⁾.

Studierò brevemente qui la questione dal primo dei punti di vista cui ho accennato, sembrandomi che esso permetta di conferire alla teoria il massimo grado di semplicità e di coerenza che se ne può attendere.

2. Consideriamo nell'intervallo (a, b) la funzione $f(x)$. Sia J un generico insieme chiuso su cui f è continua, f_J la funzione coincidente con f su J e nulla nei rimanenti punti di (a, b) ; poniamo ancora ⁽²⁾

$$F_J(x) = \int_a^x f_J(x) dx.$$

Il sistema delle funzioni F_J può riguardarsi generato da un insieme di operazioni, che ordineremo ⁽³⁾ con la seguente legge: seguono l'operazione relativa all'insieme J tutte quelle relative ad insiemi contenenti J . Risulterà così ordinata nel modo più naturale la variabile (funzione continua di x) F_J .

Se f è sommabile, e solo allora, F_J ammetterà un unico limite, cui tenderà uniformemente rispetto ad x , $F(x)$, funzione continua (anzi assolutamente continua) di x ; e si porrà naturalmente

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Se, f non essendo sommabile, non esiste un limite determinato per le F_J , si definirà una funzione limite $F(x)$ come limite di una qualunque variabile, uniformemente convergente, subordinata ⁽⁴⁾ alla variabile funzionale F_J .

Si potrà porre in infiniti modi, con $J_n < J_{n+1}$,

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{J_n}(x).$$

Imponendo la condizione supplementare dell'uniformità della convergenza, si viene ad esigere da $F(x)$ la continuità; ed ogni funzione limite F potrà chiamarsi integrale di f .

(1) Vedi su tutto ciò la mia Nota *Sull'extrapolazione delle funzioni additive d'insieme* «Rend. Acc. di Napoli», 1928.

(2) Per semplicità, poniamo qui a fondamento la nozione (peraltro elementare) di integrale di una funzione continua sopra un insieme chiuso, anziché, come per ragioni di metodo nella Memoria citata, quella ancora più particolare dell'integrale di Cauchy.

(3) Vedi PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale I*, Catania, 1923, cap. I, § 1.

(4) Vedi PICONE, loc. cit.

Tre casi possono presentarsi:

- a) non esistono funzioni limiti;
- b) esiste un'unica funzione limite;
- c) esistono infinite funzioni limiti.

Il primo caso è quello, per es., di una funzione f positiva non sommabile; f non ammette allora integrale.

Nel secondo caso si porrà, se F è la funzione limite,

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx,$$

e l'integrale indefinito di f risulterà così determinato, come di consueto, a meno di una costante additiva.

L'insieme delle funzioni f per cui si presenta questo caso potrebbe dirsi costituire il campo naturale di esistenza dell'integrale indefinito; ma esso non esaurisce l'insieme delle funzioni derivate, come provano semplici esempi. Si rivela qui il profondo divario fra le nozioni, praticamente equivalenti, di *integrale indefinito* e di *funzione primitiva*.

Si vede facilmente che il caso b) ha luogo quando f è una funzione derivata sommabile ovunque tranne che nell'intorno dei punti di un insieme *riducibile*. Ma per affrontare il problema delle funzioni primitive in generale, occorre prendere in considerazione anche il caso c), in cui l'integrale indefinito non è unico, in cui cioè il processo di estrapolazione adottato conduce ad infinite determinazioni, non distinguibili fra loro, per \int_a^x .

3. Consideriamo, nel caso c), una successione $F_{J_1}, F_{J_2}, F_{J_3}, \dots$ tendente al limite F . Le funzioni F_{J_n} si possono dire *quasi-uniformemente assolutamente continue*, e le loro derivate f_{J_n} *quasi-uniformemente sommabili*; in questo senso che gli integrali indefiniti

$$\int f_{J_n}(x) dx$$

sono equi-assolutamente continui su ogni insieme J_m , ed assumono, a partire dall' m^{mo} , sopra un intervallo qualunque e sul segmento di J_m che questo contiene, valori arbitrariamente prossimi se m è abbastanza grande.

Possiamo dunque dire che nel caso c) l'integrale

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

è costituito da un *sistema di funzioni*, ottenuto generando f mediante suc-

cessioni di funzioni quasi-uniformemente sommabili, operando cioè un passaggio al limite che generalizza quello del teorema di Vitali (1).

Dobbiamo ora vedere, poichè, come abbiamo rilevato, le diverse forme della funzione $\int_a^x f(x) dx$ non si distinguono naturalmente fra di loro, in

che modo sia possibile, imponendo qualche condizione restrittiva alla genesi delle funzioni limiti F , *isolarne* una; almeno in casi abbastanza generali perchè si possa così ottenere la funzione primitiva, quando questa esiste.

Deve necessariamente intervenire qui un atto d'arbitrio, come nella scelta di una legge fondamentale che governi l'estrapolazione di una funzione additiva d'insieme, in un processo di totalizzazione (2). V'ha tuttavia fra le due posizioni che abbiamo distinte questa differenza che, mentre nelle totalizzazioni si costruiscono per tappe successive, e dall'interno per dir così, le funzioni cui il procedimento è applicabile, seguendo l'altra via, come qui, si limita dall'esterno la classe delle funzioni per cui la detta condizione restrittiva individua un unico integrale privilegiato, staccandola dall'insieme di tutte le funzioni che ammettono infiniti integrali mediante un criterio unitario adottato *a priori*.

Ciò fa presumere che si debbano ottenere così, in generale, campi funzionali più estesi che non quelli in cui sono applicabili i procedimenti di totalizzazione.

4. A restringere il campo delle funzioni limiti F , si può imporre alle successioni F_{j_1}, F_{j_2}, \dots che lo generano questa condizione ulteriore:

Dato comunque $\epsilon > 0$, si deve poter trovare un insieme chiuso J su cui gli integrali

$$\int f_{j_n}(x) dx$$

siano equi-assolutamente continui, e tale inoltre che la somma dei valori assoluti delle variazioni di F_{j_n} sugli intervalli contigui non superi ϵ , almeno da un certo n in poi.

Questa condizione è più restrittiva di quella della continuità assoluta quasi-uniforme, che esige soltanto che la somma delle variazioni (semplici) sugli intervalli contigui ad J si possa rendere piccola a piacere.

Le funzioni limiti così ottenute hanno la seguente proprietà: Dato comunque $\epsilon > 0$, si può trovare un insieme chiuso J su cui $F(x)$ sia assolutamente continua (3), e tale che la somma dei valori assoluti delle varia-

(1) V. la mia Nota *Un théorème général pour le passage à la limite sous le signe d'intégrale indéfinie*, «Comptes-Rendus», t. 186.

(2) V. la mia Nota citata del «Rend. dell'Acc. di Napoli».

(3) Diciamo che F è assolutamente continua su J se la variazione di F sul segmento (a, x) di J è funzione assolutamente continua di x . Perchè si possa calcolare questa va-

zioni di F sugli intervalli contigui non superi ε . Questa proprietà particolarizza quella della *continuità quasi-assoluta*, che basta ad assicurare che una funzione può ottenersi dall'integrazione (nel senso del numero precedente) della sua derivata, o più generalmente della sua derivata asintotica ⁽¹⁾.

Limitata così la generalità dell'operazione di limite che genera F , si estende notevolmente il campo delle funzioni $f(x)$ per cui l'integrale $\int_a^x f(x) dx$

è ben determinato. E, dimostrando che se a questo campo appartengono le funzioni per cui l'operazione totalizzante si arresta ad una certa tappa vi appartengono anche quelle per cui si raggiunge la tappa successiva, per induzione transfinita si dimostra che sono *integrabili* in quest'ultimo senso tutte le funzioni suscettibili della totalizzazione generale.

Si potrà poi stabilire un teorema generale per il passaggio al limite introducendo il concetto di *integrabilità uniforme* ⁽²⁾.

Tutti questi argomenti richiederebbero lunghi sviluppi, e però non vi insisteremo ⁽³⁾. Ci basterà aver mostrato come il concetto di prolungamento funzionale getti nuova luce sui problemi dell'integrazione indefinita, e forniti gli strumenti essenziali di un metodo che abolisce l'uso del transfinito.

riazione occorre che sul complemento di J risulti F a *variazione definita*. Secondo la definizione di Denjoy, che adottiamo qui, si intende con ciò che la serie delle variazioni (semplici) di F sugli intervalli contigui ad J è assolutamente convergente.

(1) V. la mia Nota *Un'estensione del concetto di assoluta continuità* («Boll. Un. Mat. Italiana», 1928). La continuità quasi-assoluta consiste in ciò che si può rendere piccola a piacere la differenza fra le variazioni di F su una qualunque porzione (α, β) dell'intervallo (a, b) e sulla corrispondente porzione di J .

(2) Cfr. la mia Nota citata dei «Comptes-Rendus».

(3) Un'applicazione interessante delle definizioni introdotte potrebbe cercarsi nel calcolo dei coefficienti di una serie trigonometrica col procedimento di Fourier.

Teoria dei Numeri. — *Sopra la Teoria degli ideali di un corpo algebrico finito.* Nota I e II di A. M. BEDARIDA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Nella presente Nota si vuole segnalare un metodo che conduce a scoprire nuove proprietà degli ideali di un corpo algebrico $K(\theta)$ di grado n .

Nella sua forma generale, tale metodo consiste nella considerazione simultanea di una funzione aritmetica del corpo razionale $K(1)$ (sotto-corpo di ogni corpo algebrico) e della sua generalizzazione agli ideali di $K(\theta)$ e la ricerca di relazioni tra le due funzioni aritmetiche, per opportuni valori delle variabili.

In sostanza, per tale metodo, si può dire che, ad una funzione aritmetica del corpo razionale viene, in generale, a corrispondere un gruppo di proprietà relative agli ideali di un dato corpo algebrico $K(\theta)$. Come si vedrà, in questa Nota ed in quelle che seguiranno in questi « Rendiconti » (le quali avranno lo stesso titolo), il metodo è ben fecondo di nuovi risultati.

In questa prima Nota ed in quella che segue, sarà considerata la funzione $\varphi(n)$ di Eulero, cioè la funzione che offre il numero dei numeri interi razionali, primi con l'intero razionale n e minori di n . Questa funzione è stata generalizzata agli ideali da Dedekind; e, viene indicata con $\Phi(A)$, ove A è un ideale e rappresenta quanti tra gli NA (NA indica la norma dell'ideale A) interi di un sistema completo di resti (mod. A) sono primi con A .

Dalla considerazione simultanea di $\Phi(A)$ e $\varphi(NA)$ risulteranno proprietà per gli ideali. In speciale modo sorgeranno nuove e notevoli proposizioni per gli ideali primari assoluti, cioè per gli ideali la cui norma è il minimo intero razionale in essi contenuti.

Questa specie di ideali è stata introdotta dal Bianchi nella sua Memoria: *Sugli ideali primari assoluti di un corpo algebrico*⁽²⁾ e nella sua Nota: *Sulla composizione degli ideali primari assoluti di un corpo algebrico*⁽³⁾. Questi lavori sono tra i più interessanti che il Maestro abbia lasciato sopra la Teoria degli ideali!

2. Sia un corpo algebrico $K(\theta)$ di grado n ; A un suo ideale e consideriamo i suoi ideali primi diversi: il loro numero sia s . Indichiamo con p_1, p_2, \dots, p_h i loro numeri primi coordinati distinti: precisamente, siano:

$$P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1s},$$

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(2) BIANCHI, « Journal de Mathématiques », fasc. I, 1922.

(3) BIANCHI, « Rend. Acc. dei Lincei », 1.º sem., 1923.

tutti gli ideali primi diversi che entrano in A, a numero primo coordinato p_1 ; i relativi gradi siano: $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1s_1}$;

$$P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2s_2},$$

tutti gli ideali primi diversi che entrano in A, a numero primo coordinato p_2 ; i relativi gradi siano $f_{21}, f_{22}, f_{2s_2}; \dots$;

$$P_{h1}, P_{h2}, \dots, P_{hs_h}$$

tutti gli ideali primi diversi che entrano in A, a numero primo coordinato p_h ; i relativi gradi siano: $f_{h1}, f_{h2}, \dots, f_{hs_h}$.

Sarà: $s_1 + s_2 + \dots + s_h = s^{(2)}$ e si potrà scrivere:

$$(1) \quad A = P_{11}^{r_{11}} P_{12}^{r_{12}} \dots P_{1s_1}^{r_{1s_1}} P_{21}^{r_{21}} P_{22}^{r_{22}} \dots P_{2s_2}^{r_{2s_2}} \dots P_{h1}^{r_{h1}} P_{h2}^{r_{h2}} \dots P_{hs_h}^{r_{hs_h}}$$

ove i numeri r_{ij} sono interi razionali convenienti, e

$$(2) \quad NA = p_1^{r_{11}f_{11} + r_{12}f_{12} + \dots + r_{1s_1}f_{1s_1}} \cdot p_2^{r_{21}f_{21} + r_{22}f_{22} + \dots + r_{2s_2}f_{2s_2}} \cdot \dots \cdot p_h^{r_{h1}f_{h1} + r_{h2}f_{h2} + \dots + r_{hs_h}f_{hs_h}}.$$

Come è noto si ha ⁽²⁾:

$$(3) \quad \Phi(A) = NA \left(1 - \frac{1}{NP_{11}}\right) \left(1 - \frac{1}{NP_{12}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{NP_{1s_1}}\right) \dots \\ \dots \left(1 - \frac{1}{NP_{h1}}\right) \left(1 - \frac{1}{NP_{h2}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{NP_{hs_h}}\right),$$

e

$$(4) \quad \varphi(NA) = NA \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_h}\right).$$

La (3) si potrà anche scrivere:

$$(5) \quad \Phi(A) = NA \left(1 - \frac{1}{p_1^{f_{11}}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1^{f_{12}}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_1^{f_{1s_1}}}\right) \dots \\ \dots \left(1 - \frac{1}{p_h^{f_{h1}}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_h^{f_{h2}}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_h^{f_{hs_h}}}\right).$$

(1) Poichè ogni numero primo p_i è coordinato al più ad n ideali primi diversi sarà sempre $s \leq nh$.

(2) Cfr. BIANCHI, *Lezioni sopra la Teoria dei numeri algebrici*, p. 315.

La (4) e la (5) ci offrono quindi la formula

$$(6) \quad \Phi(A) = \varphi(NA) \prod_u^h \frac{1 - \frac{1}{p_u^{f_{uu}}}}{1 - \frac{1}{p_u}} \cdot \prod_{i_1}^{s_1} \left(1 - \frac{1}{p^{f_{1i_1}}}\right) \cdot \prod_{i_2}^{s_2} \left(1 - \frac{1}{p^{f_{2i_2}}}\right) \cdots \prod_{i_h}^{s_h} \left(1 - \frac{1}{p^{f_{hi_h}}}\right);$$

in cui si può dire che il primo prodotto esiste sempre ed è ≥ 1 , e degli altri, esistono solo quelli in cui il relativo numero s_i ($i = 1, 2, \dots, h$) è > 1 e ciascuno sarà < 1 . Perciò risulta che, per un ideale A , possono presentarsi i tre casi: $\Phi(A) \equiv \varphi(NA)$; e questo dipende, unicamente, dal grado dei suoi ideali primi e dall'avere questi numeri primi coordinati diversi, oppure no, tra di loro.

Sono notevoli i seguenti casi speciali: se $s_i = 1$ ed $f_{ji} > 1$ ($i = 1, 2, \dots, h$; $j = 1, 2, \dots, s$), allora dalla (6) risulta: $\Phi(A) > \varphi(NA)$; se $s_i = 1$ e tutti i gradi $f_{uv} = 1$, allora dalla (6) è: $\Phi(A) = \varphi(NA)$; se uno almeno dei numeri s_i è > 1 e tutti i gradi $f_{uv} = 1$, allora dalla (6) è: $\Phi(A) < \varphi(NA)$. Si possono quindi enunciare i risultati:

1° Se un ideale A si compone di ideali primi, tutti di grado superiore al primo e quelli di questi, che sono distinti, sono a numeri primi coordinati diversi, si ha: $\Phi(A) > \varphi(NA)$.

2° Se un ideale A si compone di ideali primi tutti di primo grado e quelli di questi, che sono distinti, sono a numeri primi coordinati diversi, si ha: $\Phi(A) = \varphi(NA)$.

3° Se un ideale A si compone di ideali primi tutti di primo grado e quelli di questi, che sono distinti, sono a numeri primi coordinati non tutti diversi, si ha $\Phi(A) < \varphi(NA)$.

Nei confronti, per un ideale A , tra il valore $\Phi(A)$ ed il valore $\varphi(NA)$ si tenga presente che un intero razionale primo con NA è pure primo con l'ideale A , ma un intero, primo con A può non esserlo con NA . Inoltre, che se due interi sono incongrui (mod. NA) possono essere congrui (mod. A).

NOTA II.

3. Si supponga ora che l'ideale A sia primario assoluto, cioè la sua norma sia il più piccolo intero razionale contenuto nell'ideale. Si ha il teorema:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, per un ideale primario assoluto A , si ha sempre:

$$\Phi(A) = \varphi(NA);$$

cioè, in altre parole: la funzione di Eulero generalizzata e la funzione di Eulero hanno, rispettivamente, per un ideale primario assoluto e per la sua norma, lo stesso valore.

Invero, se A è primario assoluto i suoi ideali primi sono tutti di primo grado ⁽¹⁾ e perciò sarà (n. 2) $\Phi(A) \leq \varphi(NA)$. D'altra parte, poichè ogni numero razionale primo con NA è primo con l'ideale A e numeri razionali incongrui (mod. A) sono incongrui (mod. NA) ed inversamente, essendo NA il più piccolo intero razionale contenuto nell'ideale A , si potrà anche dire che è $\Phi(A) \geq \varphi(NA)$. Perciò si conclude che è $\Phi(A) = \varphi(NA)$. C. v. d. In altro modo: poichè ogni intero del corpo è congruo (mod. A) con un intero razionale ⁽²⁾ ed inoltre, poichè per un intero razionale primo con A , si può dire che è pure primo con NA ⁽³⁾, oltre al fatto inverso e tenendo conto che per due interi razionali l'essere incongrui (mod. A) conduce ad essere incongrui (mod. NA) ed inversamente, risulta ancora la relazione osservata. Si può inoltre osservare che quanto ora si è veduto, ci permette di dire che per ogni ideale primario assoluto A , come sistema completo di resti (mod. A) e primi con A , si può assumere un qualunque sistema completo di resti razionali (mod. NA) e primi con NA .

4. La proposizione ora dimostrata non è invertibile, come si può verificare facilmente ⁽⁴⁾; ma però si ha la seguente, che, in un certo senso, può considerarsi come l'inversa, e cioè:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, se A è un ideale ed m il suo più piccolo intero razionale e se:

$$\Phi(A) = \varphi(m),$$

l'ideale A è primario assoluto.

Invero, poichè è $NA \equiv 0 \pmod{m}$, sarà $\varphi(NA) \leq \varphi(m)$: dall'ipotesi fatta risulta quindi che non può che aversi $\Phi(A) \geq \varphi(NA)$ (n. 2). Segue allora $\varphi(m) = \varphi(NA)$ e poichè la funzione di Eulero è una funzione crescente in senso stretto, dovrà essere $m = NA$, cioè l'ideale A è primario assoluto.

Questa proposizione ci offre un criterio per esaminare se un dato ideale è primario assoluto; criterio che ci sarà utile per il seguito.

5. Il Bianchi ha dimostrato che: gli ideali primi di un ideale primario assoluto sono tutti di primo grado; potenze di ideali primi di primo grado

(1) Cfr. BIANCHI, loc. cit., p. 103.

(2) Cfr. BIANCHI, loc. cit., p. 101.

(3) Cfr. DIRICHLET-DEDEKINDI, *Lezioni sulla Teoria dei Numeri* (traduzione ital. di A. FAJFÖFER) p. 523.

(4) Basta ad es. osservare che in un corpo quadratico, se p è un numero primo critico, essendo $(p) = P^2$ con P ideale primo di primo grado e perciò primario assoluto, è bensì $\Phi(P^2) = \varphi(NP^2)$, ma P^2 non è, evidentemente, primario assoluto.

Nemmeno è invertibile l'osservazione che abbiamo fatto seguire.

sono ideali primari assoluti, escluso il caso di potenze superiori alla prima per quegli ideali primi i cui numeri primi coordinati siano critici; il prodotto di ideali primari assoluti, con le norme prime tra loro due a due, è un ideale primario assoluto⁽¹⁾. Questi risultati, unitamente a quelli qui dimostrati: che per un ideale primario assoluto A è sempre: $\Phi(A) = \varphi(NA)$ ed i 2° e 3° del n. 2 ci permettono di enunciare il teorema che assegna, in modo completo, la struttura degli ideali primari assoluti di un corpo algebrico $K(\theta)$, e cioè:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, gli ideali primari assoluti e questi ideali soltanto, si decompongono in potenze di ideali primi di primo grado, a numeri primi coordinati diversi, nessuno dei quali sarà critico se la relativa potenza è superiore alla prima.

6. Il Bianchi ha dimostrato che gli ideali primari assoluti di un corpo algebrico $K(\theta)$, godono della proprietà caratteristica espressa dal teorema⁽²⁾:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, un ideale A è primario assoluto, allora ed allora soltanto che ogni intero di $K(\theta)$ sia congruo (mod. A), con un intero razionale.

Ora, si vuole notare che gli ideali primari assoluti godono di una proprietà caratteristica più generale, data dal teorema:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, un ideale A è primario assoluto, allora ed allora soltanto che ogni intero del corpo, primo con A , sia congruo (mod. A), con un intero razionale.

Sia A un ideale primario assoluto: poichè NA è il più piccolo intero razionale contenuto nell'ideale, un sistema completo di resti razionali (mod. NA) è pure un sistema completo di resti (mod. A). Allora risulta che ogni intero del corpo $K(\theta)$, primo con A è bene congruo (mod. A) con un intero razionale.

Viceversa, sia ogni intero del corpo $K(\theta)$, primo l'ideale A , congruo (mod. A), con un intero razionale.

Indichiamo con n il grado del corpo e con m il più piccolo razionale dell'ideale A .

Se un intero razionale a è primo con m , è pure primo con l'ideale A , perchè un ideale primo P , diverso dall'ideale unità, fosse divisore comune degli ideali (a) , A , il numero primo p , coordinato all'ideale P , dividerebbe $N(a)$ e NA , quindi anche $N(a)$ e $N(m)$, perchè risulta $N(m) = 0 \pmod{NA}$ essendo $m \equiv 0 \pmod{A}$; e poichè a ed m sono razionali, sarà $N(a) = a^n$, $N(m) = m^n$ e quindi il numero primo p , che non è l'unità, entrerebbe in a ed m , il che è escluso. Inversamente, se un intero razionale a è primo

(1) Per questi risultati cfr. BIANCHI, loc. cit.

(2) Cfr. BIANCHI, loc. cit., p. 101.

con l'ideale A , è pure primo con NA ⁽¹⁾ e quindi anche con m , che è divisore di NA .

Inoltre, per due interi razionali, l'essere congrui (mod. m), conduce ad essere congrui (mod. A) e reciprocamente.

Dall'ipotesi fatta segue quindi che è: $\Phi(A) = \varphi(m)$, e ciò basta per concludere che l'ideale A è primario assoluto (n. 4).

Geometria. — *Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri.* Nota ⁽²⁾ di B. SEGRE, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. La Geometria algebrica si è sviluppata in Italia, nella sua prima importante fase, soprattutto attraverso la considerazione dei *sistemi lineari* di curve algebriche di un piano (o di una superficie). Lo studio sistematico dei *sistemi continui* non lineari, s'imponeva ad un determinato momento, e già taluni risultati di Humbert, Castelnuovo ed Enriques ne facevano presagire tutta la fecondità. La teoria fu inaugurata nel 1904 da F. Severi, il quale l'arricchì successivamente, a più riprese, di proprietà essenziali.

Io desidero occuparmi dei problemi relativi all'*esistenza*, alla *dimensione* ed all'*unicità* di sistemi continui (irriducibili) di curve piane algebriche di dato ordine, possedenti singolarità di natura assegnata ⁽³⁾. Essi sono stati risolti da F. Severi, in modo elegante ed esauriente, nel caso più semplice in cui le curve che si considerano abbiano come uniche singolarità dei nodi ⁽⁴⁾. Il *metodo dell'intersezione di falde analitiche*, dovuto al Severi, si presta anche quando si considerano curve con singolarità superiori; però in tal caso si presentano fatti e difficoltà nuovi ⁽⁵⁾.

Riservandomi di ritornare in altra Nota sul terzo degli argomenti prospettati in principio, in questa riassumo alcuni dei risultati a cui sono giunto sugli altri due.

(1) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND, loc. cit., p. 523.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1929.

(3) Un'altra Memoria in corso di stampa negli « Annali di Matematica », è dedicata allo studio di tali sistemi, dal punto di vista dei *moduli* delle loro curve.

(4) Cfr. F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), Anhang F, p. 307 e sg.

(5) Ciò già risulta da lavori di altri Autori in quest'ordine d'idee. Fra i più notevoli — nonostante vi si trovino metodi e risultati non in tutto accettabili — cito una Memoria di S. LEFSCHETZ, *On the existence of loci with given singularities* (« Transactions of the Amer. Math. Soc. », vol. 14 (1913), p. 23), ed una di G. ALBANESE, *Sui sistemi continui di curve piane algebriche* (Pisa, Nistri, 1923).

I.

2. Avendo un sistema continuo Σ di curve piane algebriche C , di dato ordine n e possedenti singolarità di natura (non però di posizione) assegnata, diremo ch'esso è *completo* quando non è contenuto in uno più ampio di curve cogli stessi caratteri. Per determinare la dimensione di Σ , supposto completo, si può con S. Lefschetz fare l'ipotesi che le singolarità possedute dalle curve C offrano, alle curve d'ordine n , condizioni fra loro indipendenti⁽¹⁾. Vedremo però al n. 4, che il valore δ' che, in base alla fatta supposizione, si viene a determinare per la dimensione di Σ , può non coincidere colla *dimensione effettiva* δ^* di questo sistema⁽²⁾; ciò dimostra che *il postulato delle singolarità di S. Lefschetz, non sempre è valido*. Il suddetto numero δ' , verrà denominato *la prima dimensione virtuale del sistema Σ* .

Il modo più conveniente per determinare la dimensione effettiva di Σ , supposte le sue curve irriducibili, è quello di ricorrere al concetto (dovuto a F. Severi) di *serie caratteristica*⁽³⁾: quando fosse nota la dimensione di quest'ultima, si avrebbe subito δ^* aumentando di un'unità tale numero. Se in un primo momento si suppone che la serie caratteristica sia *completa e non speciale*, si viene a determinare quale dimensione di Σ un numero δ'' , non necessariamente coincidente nè con δ^* nè con δ' (n. 5), che verrà indicato come *la seconda dimensione virtuale di Σ* ; il suo significato geometrico è semplice: esso è *la dimensione virtuale del sistema lineare tangente a Σ nella generica C* ⁽⁴⁾.

In generale però, come risulterà da esempi, la suddetta serie caratteristica avrà un certo *indice di specialità* $i \geq 0$, ed una certa *deficienza* (o *difetto di completezza*) $\omega \geq 0$ ⁽⁵⁾; pel teorema di Riemann-Roch, questi caratteri son legati a δ^* e δ'' dalla relazione:

$$\delta^* + \omega = \delta'' + i.$$

(1) Vedi S. LEFSCHETZ, Mem. cit., p. 26, ove tale ipotesi è introdotta col nome di *postulate of singularities*.

(2) Nel lavoro annunciato al n. 1, si vedranno anzi esempi di sistemi continui per cui δ' risulta *negativo*.

(3) Essa è la *serie lineare* segnata sulla generica C dalle curve di Σ ad essa infinitamente vicine.

(4) Per tale locuzione vedi la mia Nota *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme*, in questi «Rendiconti», vol. 33 (5) 1924₁, p. 182.

(5) Ho infatti già rilevato altrove (cfr. questi «Rendiconti», vol. 9 (6) 1929₁, p. 974) come il teorema di F. ENRIQUES sulla *completezza della serie caratteristica* («Rend. R. Acc. delle Sc. di Bologna», vol. 9, dicembre 1904, pp. 11-12) non si estenda ai sistemi continui di curve piane algebriche con singolarità superiori. A proposito di detto teorema, limitato al caso di sistemi continui completi, di curve con soli nodi aventi un certo numero di contatti con una curva fissa, F. SEVERI ha osservato (questi «Rendiconti», vol. XXX (5) 1921₁, in nota a p. 297) che il procedimento geometrico infinitesi-

Aggiungiamo che nel seguito (n. 7) verrà stabilita la limitazione

$$\delta^* \cong \delta',$$

valida in ogni caso.

3. Se consideriamo un sistema Σ completo, di curve C irriducibili d'ordine n , aventi come *uniche* singolarità un certo numero d di *nodi* ed un certo numero k di *cuspidi*, onde la generica C è di genere

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - k$$

e di classe

$$v = 2(n + p - 1) - k,$$

la *prima dimensione virtuale* di Σ risulta uguale a

$$\delta' = \frac{1}{2}n(n+3) - d - 2k = 3n + p - k - 1.$$

La serie lineare completa contenente la serie caratteristica determinata da Σ sulla generica C , è la somma delle due serie segnate su C dalle rette del piano e dalle prime polari di C ; il suo ordine vale pertanto $n + v$, e la sua dimensione, *calcolata nell'ipotesi ch'essa sia non speciale* (ipotesi che è verificata di certo se è $n + v > 2p - 2$, ossia $k < 3n$), risulta uguale ad

$$n + v - p = 3n + p - k - 2 = \delta' - 1.$$

Tenendo presente il n. 2, da qui si deduce che:

I sistemi continui di curve algebriche irriducibili con soli nodi e cuspidi, hanno un'unica dimensione virtuale: $\delta = \delta' = \delta''$. La dimensione effettiva $\delta^ = \delta + i - \omega$ è a questa non inferiore, onde si ha $i \cong \omega$. In particolare per $i = 0$ risulta $\omega = 0$, e la dimensione effettiva, che coincide colla virtuale, è espressa da*

$$\delta^* = 3n + p - k - 1;$$

questa evenienza si presenta certamente, se è $k < 3n$.

In altri termini, i sistemi continui completi di curve con soli nodi e cuspidi per cui la serie caratteristica è *non speciale*, hanno questa serie

male con cui esso è stato dimostrato abbisogna di ulteriori indagini, nel caso in cui la serie caratteristica è speciale. Tale completamento si presenta però tutt'altro che agevole, come risulta dal fatto che *esistono sistemi continui del tipo suddetto, per cui la serie caratteristica, pur essendo completa e non speciale sulla generica curva, è speciale, e quindi incompleta, su particolari curve del sistema, le quali tuttavia posseggono le medesime singolarità della curva generica*. Ciò mostra che per l'indicato completamento, considerazioni puramente infinitesimali non possono essere sufficienti.

completa⁽¹⁾, e per essi vale il postulato di S. Lefschetz. Sistemi siffatti verranno brevemente denominati *sistemi regolari* (n, p, k) , indicando ordinatamente entro parentesi l'ordine, il genere ed il numero delle cuspidi della generica curva del sistema⁽²⁾.

4. Passiamo ora a dare qualche esempio di sistema non regolare, per cui non è lecita l'applicazione del postulato della singolarità. Basta all'uopo p. es. considerare, per $m > 2$, le curve C d'ordine $n = 6m$ rappresentate nelle coordinate (x) proiettive omogenee di punto nel piano, dall'equazione

$$[\varphi_{2m}(x)]^3 + [\psi_{3m}(x)]^2 = 0,$$

in cui φ e ψ sono due forme arbitrarie nelle (x) , di grado uguale al rispettivo indice. La generica C ammette le $k = 6m^2$ intersezioni delle curve $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ ad essa relative, come *punti doppi cuspidali* (in tali punti essendo toccata dalla curva $\psi = 0$), e nessun punto multiplo ulteriore; il suo genere risulta pertanto uguale a

$$p = 12m^2 - 9m + 1.$$

Si può dimostrare che le curve C costituiscono un sistema continuo (irriducibile e) completo, colla serie caratteristica completa (ond'è $\omega = 0$), e che la dimensione effettiva di Σ vale

$$\delta^* = \frac{1}{2}(13m + 2)(m + 1).$$

In base al n. precedente, risulta che la dimensione virtuale di Σ è uguale a

$$\delta = 6m^2 + 9m,$$

onde si ha

$$i = \delta^* - \delta = \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2);$$

e questo numero, per $m > 2$, è > 0 .

(1) L'argomentazione con cui questo fatto qui viene provato, è analoga ad una addotta da F. SEVERI in loc. cit. alla nota precedente.

(2) È chiaro che, affinché tale curva sia irriducibile, dev'essere

$$p \equiv \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - k.$$

Colla locuzione introdotta nel testo, il risultato conseguito in quest'ordine d'idee da F. SEVERI nelle *Vorlesungen* citate, si può enunciare dicendo che *esistono curve irriducibili di ordine n qualunque e genere p $\left[0 \equiv p \equiv \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)\right]$ con soli nodi: esse costituiscono un unico sistema continuo regolare $(n, p, 0)$.*

5. Entro al sistema Σ di cui al n. 4, consideriamo quello $\bar{\Sigma}$ costituito dalle curve \bar{C} di equazione

$$[\bar{\varphi}_{2m}(x)]^3 + [\bar{\psi}_{3m}(x)]^2 = 0,$$

ove $\bar{\psi} = 0$ rappresenti un'arbitraria curva d'ordine $3m$ avente un punto doppio P (non assegnato in posizione), pel quale passi semplicemente ed in modo generico la curva $\varphi = 0$ d'ordine $2m$. Delle $6m^2$ cuspidi che consideravamo dianzi, due sono ora assorbite dal punto P , il quale per la \bar{C} è triplo colle tre tangenti coincidenti nella retta tangente in P alla curva $\varphi = 0$.

Si può dimostrare che (supposto sempre $m > 2$) il sistema Σ è completo, colla serie caratteristica incompleta, di deficienza $\omega = 1$. La dimensione effettiva e quelle virtuali (definite al n. 2) del sistema Σ , valgono rispettivamente:

$$\bar{\delta}^* = \frac{1}{2}(13m^2 + 15m - 2), \quad \bar{\delta}' = 6m^2 + 9m - 2, \quad \bar{\delta}'' = 6m^2 + 9m - 1,$$

e questi tre caratteri, per $m > 3$, risultano distinti. L'indice \bar{i} di specialità della serie caratteristica di Σ , è espresso da

$$\bar{i} = \bar{\delta}^* - \bar{\delta}'' + \omega = \frac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

II.

6. Per poter stabilire rigorosamente l'esistenza di sistemi continui di curve con dati caratteri, seguendo la via tracciata da F. Severi nelle sue citate *Vorlesungen*, occorre premettere la seguente proposizione sull'intersezione di due o più falde di varietà analitiche (od in particolare algebriche) ⁽¹⁾.

È noto che due o più falde Φ_1, \dots, Φ_s , rispettivamente di dimensione k_1, \dots, k_s , ed ordine n_1, \dots, n_s , aventi la medesima origine O , e situate su d'una falda lineare Φ a k dimensioni di origine O , si segano lungo una varietà che consta di una o più falde di origine O , la cui dimensione è maggiore od uguale a

$$h = k_1 + \dots + k_s - (s-1)k.$$

(1) Per tutto quanto si riferisce a questo importante argomento, e per la prima parte dell'enunciato dato nel testo, vedi le citate *Vorlesungen*, Anhang I, n. 2, pp. 309-313. Il fondamento analitico delle considerazioni ivi contenute, è il teorema di esistenza delle funzioni analitiche implicite inteso nell'accezione più generale, quale risulta dai lavori di H. KISTLER, *Ueber Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen* (Dissertation, Göttingen, 1905); G. A. BLISS, *A generalization of Weierstrass' preparation theorem for a power series in several variables*, «Transactions of the Amer. Math. Soc.», vol. 13 (1912), p. 133; G. R. CLEMENTS, *Implicit functions defined by equations with vanishing Jacobian*, «Transactions of the Amer. Math. Soc.», vol. 14 (1913), p. 325; ecc.

Ebbene aggiungiamo che supposto $h > 0$, se i coni tangenti in O alle falde Φ_1, \dots, Φ_s (coni di vertice O , giacenti nello S_k quivi tangente a Φ , e rispettivamente di dimensione k_1, \dots, k_s ed ordine n_1, \dots, n_s) si segano precisamente lungo un cono H di dimensione h (il cui ordine sarà quindi uguale ad $n = n_1 \dots n_s$), la varietà completa intersezione di quelle s falde consta di una o più falde di origine O , la cui dimensione vale h (e non di più); queste ultime ammettono dei coni tangenti in O , che complessivamente costituiscono il cono H , onde di tali falde se ne ha una sola se H è irriducibile (in particolare se $n_1 = 1, \dots, n_s = 1$), ed in ogni caso la somma dei loro ordini vale n .

La proposizione enunciata, che può trovare applicazione in svariate questioni, si dimostra basandosi su di un notevole teorema di G. A. Bliss⁽¹⁾ sulle funzioni implicite definite da un sistema di equazioni a jacobiano nullo; ed anzi essa fornisce di questo teorema una semplice interpretazione geometrica.

7. Un altro studio che, pei nostri scopi, occorre premettere e completare, è quello della familiare rappresentazione delle curve piane algebriche di dato ordine n , coi punti di uno S_N [$N = \frac{1}{2}n(n+3)$]⁽²⁾, specialmente in relazione alle C_n piane aventi singolarità superiori. Senza entrare qui in dettagli, diremo soltanto che da tale studio, tenuta presente la prima parte della proposizione del n. precedente, segue facilmente la disuguaglianza della fine del n. 2. Usufruendo anche della seconda parte di tale proposizione, e limitandosi per semplicità ai sistemi regolari (n. 3), si dimostrano poi i seguenti teoremi:

1° Se esiste un sistema continuo regolare (n, p, k) , esistono pure dei sistemi regolari (n, p_1, k_1) , ove p_1, k_1 devono solamente soddisfare alle limitazioni

$$0 \leq k_1 \leq k, \quad p \leq p_1 \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - k_1.$$

Si individua un sistema regolare (n, p_1, k_1) mediante una curva generica del dato sistema (n, p, k) , considerando come virtualmente inesistenti un certo numero di cuspidi e di nodi, e considerando virtualmente come nodi un certo numero delle cuspidi restanti⁽³⁾.

2° Dati due sistemi regolari (n_1, p_1, k_1) ed (n_2, p_2, k_2) , se esiste una curva dell'un sistema che tocchi una curva dell'altro in h punti semplici, e la

(1) Vedi loc. cit. alla nota precedente.

(2) Cfr., p. es., F. SEVERI, *Vorlesungen* cit., Anhang F, n. 3, pp. 313-316.

(3) Queste locuzioni e quelle simili usate più sotto, acquistano significato preciso attraverso alla suddetta rappresentazione delle C_n piane coi punti di S_N ; esse sono analoghe a quelle introdotte da F. SEVERI nell'Op. cit.

seghi ulteriormente in $n_1, n_2 - 2h$ punti distinti, si può asserire l'esistenza di un sistema regolare (n, p, k) , con

$$n = n_1 + n_2, \quad p = p_1 + p_2 + h - 1, \quad k = k_1 + k_2 + h.$$

Questo sistema si individua mediante le due curve suddette, considerando *virtualmente* come cuspidi della curva complessiva i loro h punti di contatto.

3° Se esiste un sistema regolare (n, p, k) con $n \geq 3$, esiste pure un sistema regolare (n_1, p_1, k_1) , con

$$n_1 = n + 2, \quad p_1 = p + n - 2, \quad k_1 = k + n + 1.$$

Questo s'individua mediante una curva del dato sistema (n, p, k) , aggiungendole una retta generica contata due volte, e considerando *virtualmente* come cuspidi della curva complessiva, un punto generico di tale retta e le n intersezioni di questa colla curva suddetta.

Come facile conseguenza della teoria degli involucri di curve piane, si ha poi la seguente proposizione:

Il concetto di sistema continuo regolare è duale di sè stesso, ossia le curve reciproche di quelle di un dato sistema regolare, costituiscono ancora un sistema regolare.

8. I quattro teoremi del n. precedente, applicati alternativamente a partire dai sistemi continui regolari di curve con soli nodi⁽¹⁾, forniscono dei nuovi sistemi regolari di grandissima generalità. Limitandoci ad una delle più ovvie conseguenze, si può ad esempio asserire che:

Dati comunque gl'interi non negativi p e θ , esistono sistemi regolari (n, p, k) ove n è unicamente vincolato ad essere $\equiv \theta \pmod{2}$, ed a non essere superato da nessuno dei due numeri

$$2p + 2 + \frac{\theta}{3}, \quad 2p + 1 - \theta + \sqrt{8p + 8\theta + 1},$$

e dove k non superi

$$\frac{3}{2}n + 3p - 3 - \frac{1}{2}\theta.$$

Dal teorema 3° del n. 7, segue inoltre per induzione che:

(1) Di cui alla nota (2) di p. 34.

Esistono sistemi continui regolari

$$(2n, n^2 - 3n + 1, n^2) \text{ per } n \geq 3,$$

$$\text{e } (2n + 1, n^2 - 2n + 1, n^2 + n - 1) \text{ per } n \geq 1,$$

di curve (irriducibili) con sole cuspidi⁽¹⁾.

Queste proposizioni permettono già di poter affermare con rigore l'esistenza di tutte le curve aventi i caratteri plueckeriani non negativi, per valori sufficientemente piccoli dell'ordine o del genere⁽²⁾.

Meccanica. — *Un nuovo risultato sperimentale sulla contrazione delle vene liquide.* Nota di M. LELLI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Nell'aprile del corrente anno ho eseguito nel Laboratorio dell'Istituto di Idraulica di Pisa alcune esperienze di fononomia dirette a realizzare coefficienti di contrazione inferiori a $\frac{1}{2}$. In una serie di tali esperienze, delle quali dirò dopo premessi i precedenti della questione, il coefficiente di contrazione è risultato costantemente inferiore a 0.45.

2. In un precedente lavoro⁽⁴⁾ ho esposto alcune mie vedute sull'influenza che la viscosità esercita sulla contrazione di una vena liquida fluente liberamente nell'aria.

Il lavoro traeva la sua origine da due ricerche compiute, l'una da Levi-Civita⁽⁵⁾, l'altra da Cisotti⁽⁶⁾. Questi, seguendo il medesimo procedimento indicato da Levi-Civita, conclude con la seguente espressione del coefficiente di contrazione:

$$(1) \quad c = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_1^2} \int_{\omega} v^2 n \times h d\omega}{2 - \frac{\Omega_1}{\Omega_0} h \times k},$$

nella quale (cfr. figura, particolare B):

(1) Sono particolarmente da notarsi le curve dell'8° ordine con 16 cuspidi, e quelle del 5° ordine con 5 cuspidi; queste ultime sono già state segnalate da P. DEL PEZZO (« Rendic. Napoli », vol. 3 (2) 1889, p. 46).

(2) Ad esempio esistono sestiche con un nodo e 7 cuspidi, contro l'affermazione fatta da C. CRONE in « Acta Math. », vol. 2 (1883), p. 89.

(3) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(4) *Sulla contrazione delle vene liquide*, « Boll. dell'Unione Mat. Ital. », dicembre 1924.

(5) *Sulla contrazione delle vene liquide*, « Atti del R. Ist. Veneto », 1905, t. LXIV.

(6) *Sulla contrazione delle vene liquide*, « Atti del R. Ist. Veneto », 1915, t. LXXIV.

Ω , Ω_0 , Ω_1 sono rispettivamente le aree: della luce, che si suppone piana; di una sezione qualsiasi eseguita entro al serbatoio normalmente alla corrente; e della sezione contratta;

ω è la superficie interna della parete del serbatoio, compresa fra Ω_0 e Ω ;

\mathbf{n} , \mathbf{h} , \mathbf{k} sono vettori unitari perpendicolari rispettivamente alla parete ω , alla sezione contratta Ω_1 e ad Ω_0 , diretti come nella figura.

Il liquido era supposto perfetto, il moto permanente e irrotazionale.

Cisotti proponeva, infine, un dispositivo (Mem. cit., fig. 10) atto a provocare mediante un getto ascendente una contrazione, ai sensi della (1),

la più piccola possibile e senza alcun dubbio minore di $\frac{1}{2}$; dispositivo che

non presenta, peraltro, alcuna possibilità di applicazione sperimentale, poichè l'acqua del getto, ricadendo entro il tubo dal quale esce, modifica sin dall'inizio le caratteristiche dell'efflusso.

Anche Levi-Civita aveva proposto un dispositivo, suscettibile questo di un'applicazione, consistente in una luce di fondo munita di un tubo addizionale conico divergente verso l'interno, dal quale la vena dovrebbe fluire con una contrazione inferiore a $\frac{1}{2}$; ma esperienze compiute in seguito dal Masoni con acqua, nell'intento di verificare le previsioni di Levi-Civita, hanno avuto un esito negativo.

Allo scopo di giustificare questa mancata conferma sperimentale mi proposi, nel ricordato lavoro, di mettere in conto nell'espressione di c la piccola, ma evidentemente non trascurabile, influenza che la viscosità dell'acqua esercita sul fenomeno dell'efflusso.

Chiamando:

ε il coefficiente di viscosità tangenziale del liquido fluente;

ρ la sua densità; δ il coefficiente riduttore della velocità; η un numero che per l'acqua vale mediamente 0,0222:

λ la superficie conoidica laterale della vena, compresa fra Ω e Ω_1 ;

v_i , V_{ii} le velocità sulla parete ω e attraverso Ω_1 , quali si avrebbero nel caso in cui, a parità di ogni altra circostanza, il liquido fosse perfetto e sollecitato dalle medesime forze di massa e superficiali;

$\frac{dv}{dn}$ la derivata normale, verso l'interno, della velocità reale del liquido viscoso;

\mathbf{t} un vettore unitario diretto come \mathbf{v} ;

si trova:

$$(2) \quad c = \frac{1 - \frac{1}{\Omega V_{ii}^2} \left\{ \int_{\omega} v_i^2 \mathbf{n} d\omega + \frac{2\varepsilon}{\rho} \int_{\omega+\lambda} \frac{dv}{dn} \mathbf{t} d\omega \right\} \times \mathbf{h}}{2\delta^2 - (1 + 2\eta) \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \mathbf{h} \times \mathbf{k}},$$

espressione la quale, anche se la velocità v alla parete nel supposto regime fittizio di moto differisce notevolmente dalla velocità v che figura nella (1), rende ragione, per la presenza del termine in t , dell'esito negativo delle esperienze del Masoni.

Dell'argomento si è in seguito interessato anche De Marchi ⁽¹⁾, il quale ha rivolto particolarmente l'attenzione al caso di un grande serbatoio e ha dato due altre espressioni del coefficiente di contrazione per liquidi viscosi. Una è la seguente:

$$(3) \quad c = \frac{H}{2H_1\delta^2} + \frac{1}{2\Omega\delta^2} \left\{ \frac{P}{\gamma H_1} - \int_{\omega} \frac{d}{H_1} n d\omega - \frac{\varepsilon}{\gamma H_1} \int_{\omega+\lambda} \frac{dv}{dn} t d\omega \right\} \times h,$$

nella quale, fermo restando il significato degli altri simboli:

H ed H_1 sono i carichi sul centro della luce e della sezione contratta;

γ è il peso specifico del liquido che defluisce;

P è il peso del tronco di vena di contorno λ ;

δ è la depressione che si verifica sulla parete ω , depressione misurata a partire dalla pressione che si riscontra quando il liquido è in quiete, cioè la luce è chiusa.

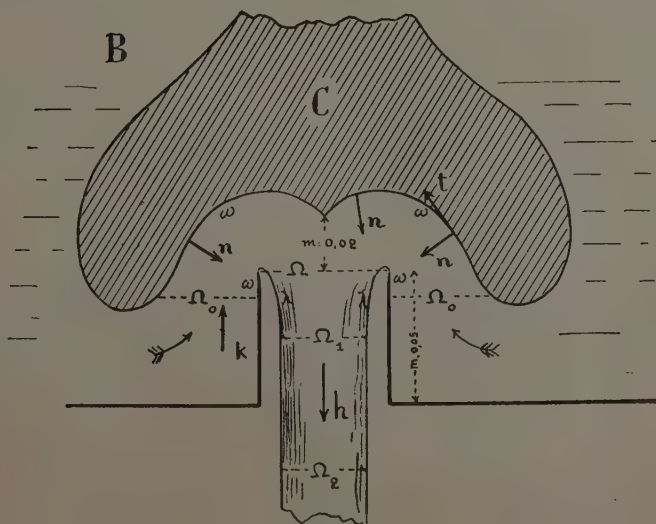
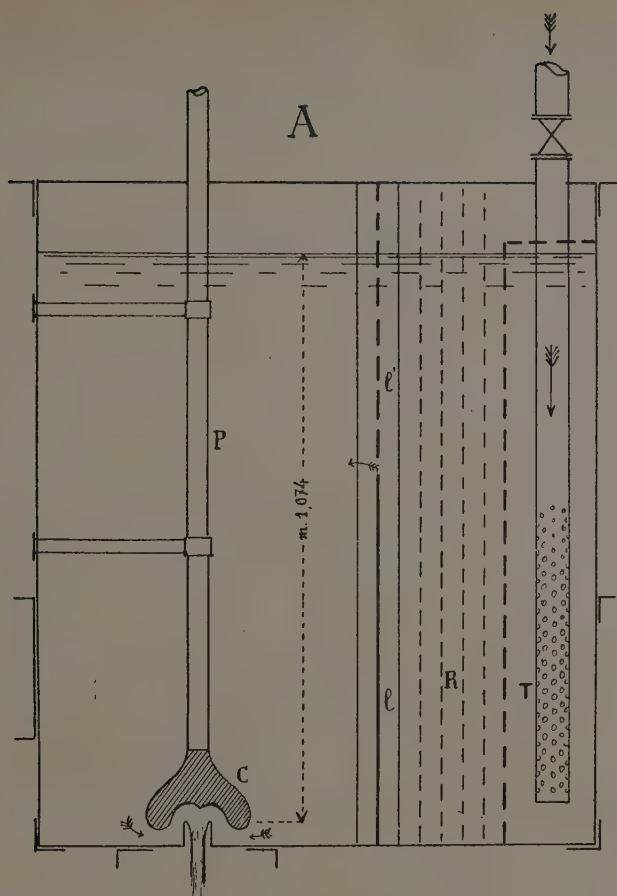
La (3) è di grande interesse pratico poichè, mentre rende ragione, come la (2), dell'esito delle esperienze, offre d'altra parte il vantaggio di poter verificare sperimentalmente l'estensione della parete ω sulla quale la funzione da integrarsi del terzo termine ha un valore apprezzabile.

Trasformando il termine in δ , De Marchi giunge dipoi ad un'altra espressione di c ove figurano gli elementi del moto nei punti di determinate superficie tracciate entro la massa liquida; ma le conclusioni che da questa si deducono non differiscono sostanzialmente da quelle ricavate dalle precedenti espressioni.

Le ricerche teoriche di De Marchi sono il complemento di numerose ed accurate esperienze, che formano l'oggetto principale della sua Memoria, eseguite nell'Istituto di Idraulica di Pisa sopra luci circolari munite di tubi addizionali cilindrici e conici applicati ad una parete verticale di un grande serbatoio. Il minimo valore di c riscontrato in tali esperienze è 0,5125 e si riferisce ad una luce di circa 5 cm. di diametro, con tubo cilindrico interno sottoposta ad un carico di m. 0,747.

3. Questi i precedenti della questione: dai quali si trae che, comunque si operi sulla luce mediante l'applicazione di tubi di qualsiasi foggia e quando il serbatoio abbia grandi dimensioni, non è praticamente possibile ridurre il coefficiente c al disotto di $\frac{1}{2}$.

(1) G. DE MARCHI, *Esperienze sulla contrazione delle vene liquide*, « Annali dei Lavori Pubblici », 1925, VIII,



Precisamente in seguito a questa sicura conclusione sperimentale raggiunta da De Marchi ho preferito ritornare al caso generale, cioè a serbatoi, le pareti dei quali, anzichè lontane (specialmente quella di fronte) dalla luce, sono molto prossime a questa, ed esercitano perciò una sensibile influenza sul fenomeno; ed ho ripreso quindi in esame il già citato dispositivo proposto dal Cisotti, modificandolo però, al fine di renderlo pratico e di possibile attuazione.

Mi sono valso in tali ricerche del medesimo serbatoio fatto costruire da De Marchi nel 1925 per le sue esperienze, nonchè della moderna installazione ausiliaria per l'alimentazione e le misure di portata di cui egli ha dotato l'Istituto di Pisa.

L'annessa figura riproduce il dispositivo adottato, che differisce da quello di Cisotti per essere il getto discendente anzichè ascendente e l'alimentazione attraverso Ω_0 ascendente invece che discendente; ciò che non modifica affatto il valore della contrazione.

Entro il serbatoio, sul fondo del quale è praticata una luce circolare del diametro di m. 0,04981, munita di un tubo addizionale cilindrico interno, è stata collocata un'asta P che porta un solido C di rotazione, coassiale al tubo, foggiato a campana in guisa tale che gli elementi liquidi abbiano a compiere, prima di uscire, una deviazione di circa 180 gradi.

L'alimentazione ha luogo a mezzo di un condotto verticale T forato nella sua parte inferiore. L'acqua uscente da T attraversa il sistema R di reti destinato ad assorbirne l'energia cinetica e a renderne più tranquillo il movimento, ed entra dipoi nel serbatoio propriamente detto attraverso la zona forata l' della parete l .

Quando la campana C è sollevata, l'efflusso avviene nel modo che gli idraulici conoscono: la vena è limpida, il suo contorno pressochè immobile, e il coefficiente di contrazione è di poco superiore a $\frac{1}{2}$.

Abbassando, invece, la campana, si osserva una graduale crescente alterazione del regime di efflusso causata dalla formazione di vortici, alterazione che dipoi decresce, riducendosi notevolmente, quando la campana ha assunto la posizione indicata nella figura.

Anche in tali condizioni la vena non è più trasparente, ma essa assume tuttavia un contorno abbastanza bene definito e regolare; ciò tanto più quanto più liscia è la parete inferiore della campana e quanto minore è lo scostamento dell'asse di questa dall'asse della vena.

Contemporaneamente si nota un sentito restringimento della vena, visibile anche senza istrumenti.

Al fine di escludere che quest'ultimo fatto possa avere origine da fenomeni singolari, in seguito ai quali non tutta la sezione Ω sarebbe attraversata dalla corrente (ciò che spiegherebbe altrimenti l'assottigliamento della vena), sono state eseguite nel Gabinetto di Idraulica e Costruzioni Idrau-

liche della Scuola d'Ingegneria di Bologna alcune esperienze preliminari sopra un modello più piccolo, nel quale tutti gli organi: le pareti del serbatoio, la campana e il tubo addizionale (all'estremità superiore di quest'ultimo, per renderla tagliente, si è applicato un anello metallico) erano di vetro, quindi trasparenti.

Si è così constatato che, di fatto, tutto lo spazio compreso fra la campana e la luce Ω è occupato da acqua in moto.

Eliminato pertanto questo dubbio fondamentale, si sono proseguite le esperienze a Pisa. Dopo provati diversi tipi di campana, la scelta è caduta sopra quello riprodotto nel particolare B della figura.

4. Riferiamo da ultimo i risultati medi di tre misure compiute nelle condizioni rappresentate dalla figura.

Ammesso, come generalmente si conviene, che la sezione contratta sia quella che si riscontra ad una distanza dalla luce Ω eguale a un raggio, senza conoscerne le dimensioni, si è calcolato c nel seguente modo indiretto:

Siano: D il diametro della luce; d_2 quello della sezione Ω_2 , poco oltre il fondo del serbatoio, sulla quale si sono comodamente eseguite misure dirette di rilievo; H_1 e H_2 i carichi sul centro delle sezioni Ω_1 e Ω_2 ; V_1 e V_2 le relative velocità medie; Q la portata della luce in regime permanente.

Si ha:

$$c = \frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{\Omega_2}{\Omega} \cdot \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \left(\frac{d_2}{D}\right)^2 \cdot \frac{V_2}{V_1},$$

dove

$$(4) \quad V_2 = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2},$$

mentre V_1 , ai sensi del teorema del Bernoulli applicato fra le sezioni Ω_1 e Ω_2 , è dato da:

$$(5) \quad V_1 = \sqrt{V_2^2 - 2g(H_2 - H_1)}.$$

E però risulta:

$$(6) \quad c = \left(\frac{d_2}{D}\right)^2 \frac{V_2}{\sqrt{V_2^2 - 2g(H_2 - H_1)}},$$

dalla quale, unitamente alla (4), si deduce c , dopo misurati D , d_2 , H_1 , H_2 e Q .

La distanza $H_2 - H_1$ e D sono stati misurati a mezzo di comuni longimetri, d_2 mediante un calibro a ponte (quest'ultima misura è stata eseguita lungo diversi diametri); la portata Q è risultata da uno stramazzo Thomson

col vertice in alto, perfettamente tirato, al quale affluiva l'acqua uscente dalla luce.

Si è così ottenuto:

$$D = \text{m. } 0,04981 \quad ; \quad d_2 = \text{m. } 0,033 \quad ; \quad H_2 - H_1 = \text{m. } 0,05 ;$$

$$Q = 0,00392 \text{ m}^3/\text{s.} ;$$

e perciò, sostituendo nella (6), si trova:

$$c = 0,449 .$$

Si è posto $d_2 = 0,033$ per rimanere sicuramente al disopra della verità in tale misura; ma, ammettendo che di tanto in tanto le punte del calibro possano essere lambite dalla vena, si avrebbe $d_2 = 0,0326$, nel qual caso risulta:

$$c = 0,438 .$$

Da ultimo, essendo $H_1 = \text{m. } 1,099$ e risultando dall'esperienza [mediante l'applicazione delle (4) e (5)] $V_1 = 4,475 \text{ m./s.}$, si trova per coefficiente riduttore della velocità:

$$\delta = 0,964 ,$$

valore leggermente inferiore a quello che, con la medesima luce, senza la campana e sotto il carico di m. 0,74 circa, ha trovato De Marchi nelle sue esperienze; ciò che sta a significare la piccola entità della perdita di energia causata dal moto vorticoso che l'acqua assume nell'intorno della luce.

5. Rimane pertanto dimostrata sperimentalmente la possibilità di realizzare con l'acqua deflussi con coefficiente di contrazione inferiore a $\frac{1}{2}$, in conformità con ciò che la teoria fondata da Levi-Civita aveva preveduto.

Meccanica. — *Sulle equazioni intrinseche del moto dei sistemi materiali a legami indipendenti dal tempo.* Nota ⁽¹⁾ di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nel moto di un punto materiale P, di massa unitaria, sollecitato dalla forza totale \mathbf{F} , ove si indichi: con s la lunghezza dell'arco di traiettoria c tra una origine arbitraria e la generica posizione, contata positivamente in un verso prefissato; si proietti l'equazione fondamentale:

$$\ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$$

sui tre spigoli del triedro principale (mobile) della traiettoria, quali risultano determinati dai tre versori \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , situati rispettivamente sulla tangente, orientata nel verso degli archi crescenti, sulla normale principale e sulla binormale in ordine destro; si ottengono, come è ben noto, le equazioni intrinseche del moto:

$$(1) \quad F_t = \ddot{s} \quad F_n = \frac{v^2}{\rho} \quad F_b = 0$$

la prima delle quali, quando sia nota la traiettoria c e si assegni la componente tangenziale F_t della forza totale in funzione di s , \dot{s} e t , permette di determinare univocamente (fissati i valori s_0 , \dot{s}_0 in un istante iniziale t_0) la funzione $s(t)$, che definisce la legge temporale secondo cui il punto si muove sulla traiettoria prestabilita.

Più generalmente sia dato un sistema materiale S di punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$), olonomo od anche *anolonomo*, a legami privi di attrito ed indipendenti dal tempo, comunque sollecitato:

Si introduca uno spazio rappresentativo V ad $n = 3N$ dimensioni euclideo, ossia tale che il quadrato della distanza ds di due punti infinitamente vicini x_v e $x_v + dx_v$, sia espresso dalla forma quadrata euclidea:

$$(2) \quad ds^2 = \sum_1^n dx_v^2.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1929.

Le configurazioni del sistema S si possono far corrispondere a punti dello spazio V per mezzo delle relazioni (di Hertz)⁽¹⁾:

$$(3) \quad x_{3i-2} = \sqrt{m_i} \xi_i \quad x_{3i-1} = \sqrt{m_i} \eta_i \quad x_{3i} = \sqrt{m_i} \zeta_i$$

con ξ_i, η_i, ζ_i , coordinate cartesiane del punto materiale P_i rispetto ad una terna galileiana ortogonale $\Omega\xi\eta\zeta$.

Denotando con Γ la traiettoria del sistema (come curva di V), in un generico moto, con s la lunghezza dell'arco di Γ , contata positivamente in un verso prefissato, tra una origine arbitraria ed un generico punto P , rappresentativo della configurazione del sistema in un istante t qualunque, vogliamo stabilire, nello spazio V , le relazioni analoghe alle (1), aventi le medesime espressioni formali, tali, che, nel loro insieme costituiscano (per naturale estensione del fenomeno dinamico elementare nello spazio ordinario) le equazioni intrinseche del moto del sistema S che si considera.

A tale scopo si osservi, che nella ipotesi essenziale che V sia uno spazio euclideo, si ottiene per il quadrato della curvatura c di una qualsiasi sua linea, l'espressione:

$$(4) \quad c^2 = \sum_v \left(\frac{d^2 x_v}{ds^2} \right)^2.$$

Inoltre per la (2) si ha:

$$(2') \quad \sum_v \left(\frac{dx_v}{ds} \right)^2 = 1,$$

da cui derivando rapporto all'arco si ottiene:

$$(5) \quad \sum_v \frac{d^2 x_v}{ds^2} \frac{dx_v}{ds} = 0.$$

D'altra parte i vincoli del sistema S , siano essi di posizione o di pura mobilità, essendo indipendenti dal tempo, vengono notoriamente espressi da equazioni:

$$(6) \quad \sum_i (a'_{k,i} \xi_i + a''_{k,i} \dot{\eta}_i + a'''_{k,i} \dot{\zeta}_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

lineari ed omogenee nelle componenti ξ_i, η_i, ζ_i , delle velocità v_i dei punti P_i del sistema, a coefficienti dipendenti dalle sole coordinate. Moltiplicando ciascuna delle (6) per dt , si ottengono altrettante equazioni lineari ed omogenee nei differenziali $d\xi_i, d\eta_i, d\zeta_i$, delle coordinate, quindi, in base alle (3), nei dx_v a coefficienti dipendenti dalle sole x_v . Ne segue, che nello spazio

(1) Si noti che se il sistema S è olonomo, si può scegliere come spazio delle configurazioni quello nel quale si suppongono variabili le coordinate lagrangiane essenziali, in numero eguale al grado r di libertà; si è scelto invece lo spazio euclideo V allo scopo di rappresentare le configurazioni di un qualunque sistema anche anolonomo.

V delle configurazioni del sistema, i vincoli influiscono esclusivamente sulla forma geometrica della traiettoria Γ , non già sulla relativa legge temporale di percorrenza; siffatta legge può essere scelta del tutto ad arbitrio, rimanendo in ogni caso rispettati i vincoli ⁽¹⁾.

Ciò posto applichiamo ora il noto teorema dell'Appell, recentemente dedotto dal nostro teorema del massimo effetto cineto-dinamico ⁽²⁾: « a partire dall'atto di moto del sistema nel generico istante t , le accelerazioni \mathbf{a}_i , che realmente assumono i punti P_i , nel moto naturale, hanno fra tutte le determinazioni delle accelerazioni \mathbf{a}_i^* , compatibili coi vincoli, tali valori da rendere minima la funzione:

$$(7) \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i^2 - \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}_i$$

riguardata come funzione quadratica, in generale non omogenea, delle \mathbf{a}_i , con m_i ed \mathbf{F}_i prefissate ».

D'altra parte, denotando con X_i, Y_i, Z_i , le componenti della forza attiva \mathbf{F}_i applicata al generico punto P_i , in base alle (3) manifestamente può scriversi:

$$(7') \quad \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}_i = \sum_i^N \frac{1}{\sqrt{m_i}} (X_i \ddot{x}_{3i-2} + Y_i \ddot{x}_{3i-1} + Z_i \ddot{x}_{3i}).$$

Ove si rappresenti nello spazio V , con \mathbf{F} un vettore dipendente da tutte e sole le forze attive \mathbf{F}_i , le cui componenti Ξ , siano espresse dalle relazioni:

$$(8) \quad \Xi_{3i-2} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} X_i \quad ; \quad \Xi_{3i-1} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} Y_i \quad ; \quad \Xi_{3i} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} Z_i$$

la (7') assume l'aspetto:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}_i = \sum_v^n \Xi_v \ddot{x}_v$$

e la (7) diviene:

$$(9) \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_v^n (\ddot{x}_v)^2 - \sum_v^n \Xi_v \ddot{x}_v.$$

Ma si ha notoriamente

$$(9') \quad \ddot{x}_v = \frac{d^2 x_v}{ds^2} \dot{s}^2 + \frac{dx_v}{ds} \ddot{s}.$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II, (2ª parte) p. 491.

(2) Cfr. E. GUGINO, *Sulla estensione del teorema del massimo effetto cineto-dinamico*, ecc. « Rend. Acc. Lincei », vol. IX, 1º sem., pp. 736-742.

Supposto fissato l'atto di moto allo istante generico t , la \dot{s} e le $\frac{dx_v}{ds}$ debbono in conseguenza ritenersi prefissate; il secondo membro della ultima relazione e quindi anche della (9), deve allora riguardarsi, nelle nostre considerazioni, funzione della \dot{s} , quale variabile del tutto indipendente ed inoltre funzione delle $\frac{d^2x_v}{ds^2}$, quali variabili soggette alle condizioni dei legami.

D'altra parte la (9), in base alla (9'), tenuto conto delle (2') e (5), può scriversi:

$$(10) \quad \varphi = \frac{1}{2} \left\{ \dot{s}^4 \sum_v^n \left(\frac{d^2x_v}{ds^2} \right)^2 + \ddot{s}^2 \right\} - \dot{s}^2 \sum_v^n \Xi_v \frac{d^2x_v}{ds^2} - \dot{s} \sum_v^n \Xi_v \frac{dx_v}{ds}.$$

Per il teorema già menzionato, tale funzione, nel moto naturale, a partire dalla configurazione del sistema allo istante generico t , deve risultare minima, fra tutte le possibili scelte ad arbitrio della \dot{s} e fra tutti i valori delle $\frac{d^2x_v}{ds^2}$ compatibili coi vincoli; ciò, giova ripeterlo, per la circostanza già messa in rilievo, che i vincoli, nella nostra ipotesi, impongono limitazioni soltanto alla forma geometrica della traiettoria, non già alla legge temporale secondo cui tale traiettoria viene percorsa. Ne segue, che innanzi tutto deve annullarsi la derivata della (10) rapporto ad \dot{s} ; di guisa che, qualunque sia l'istante t , deve avere luogo l'equazione:

$$(1) \quad \ddot{s} = \sum_v^n \Xi_v \frac{dx_v}{ds}$$

con che si ottiene pertanto un minimo effettivo della (10) rispetto a tutte le possibili determinazioni della \dot{s} , indipendentemente dagli altri argomenti, atteso il segno della corrispondente derivata seconda. Il secondo membro della (1), esprime, come è ben noto, per ciascun punto di Γ , la componente tangenziale del vettore \mathbf{F} definito dalle (8); sicchè può scriversi:

$$\ddot{s} = F_t$$

che rappresenta la prima equazione intrinseca del moto del sistema S , che si considera; tale equazione poteva anche dedursi, per altra via, dal teorema delle forze vive. Quando sia nota Γ , con che (supponendo assegnate le forze attive) anche F_t può ritenersi espressa in termini di s, \dot{s}, t , la (1), come nel caso di un solo punto nello spazio ordinario, permette di determinare univocamente, fissati i valori iniziali, la legge temporale secondo cui il sistema si muove sulla traiettoria prestabilita.

Tenendo conto della (I) il secondo membro della (10) rimane funzione soltanto delle $\frac{d^2x_v}{ds^2}$ compatibilmente coi vincoli; quindi deve riguardarsi (atteso il significato geometrico di tali derivate seconde) funzione del vettore curvatura $c\mathbf{n}$ di una qualsivoglia traiettoria Γ^* (\mathbf{n} versore della normale principale), consentita dai vincoli, nel generico punto P; tale vettore, per la condizione di ortogonalità espressa dalla (5), deve in ogni caso giacere nello iperpiano π normale a Γ^* nel corrispondente punto P. D'altra parte la (10), omettendo i termini indipendenti dalle $\frac{d^2x_v}{ds^2}$, può mettersi sotto la forma:

$$(II) \quad \varphi = \frac{s^4}{2} \sum_v \left(\frac{d^2x_v}{ds^2} \right)^2 - s^2 \sum_v \Xi_v \frac{d^2x_v}{ds^2} + \dots$$

oppure, tenendo conto della (4), nella forma equivalente:

$$(II') \quad \varphi = \frac{s^4}{2} c^2 - s^2 c F_n + \dots$$

ove con F_n abbiamo denotata la componente del vettore \mathbf{F} definito dalle (8), secondo la direzione ed il verso del vettore curvatura.

Per procedere ulteriormente nelle nostre considerazioni, esaminiamo dapprima il caso semplice, che tutti i punti P_i del sistema siano liberi, talchè le equazioni (6) dei vincoli non esistano. In tale caso, per caratterizzare la traiettoria Γ , relativa al moto naturale del sistema, occorre rendere minimo il secondo membro della (11'), rispetto a tutte le possibili determinazioni, scelte ad arbitrio, del modulo c e del versore \mathbf{n} del vettore curvatura, giacente nello iperpiano normale π ; ciò, per la circostanza, che in assenza di vincoli, siffatte determinazioni non sono soggette ad alcuna limitazione. Ne segue, che deve in primo luogo annullarsi la derivata della (11') rapporto al modulo c ; ponendo $c = \frac{1}{r}$, deve allora verificarsi la relazione:

$$(II) \quad F_n = \frac{s^2}{r}$$

che certamente corrisponde ad un minimo della (11') in quanto si consideri funzione dell'argomento c , tenuto conto del segno della corrispondente derivata seconda.

Dovendosi inoltre, fra tutti i possibili versori \mathbf{n}^* emananti da P e contenuti nello iperpiano normale π , scegliere quel particolare versore \mathbf{n} , che realizza l'anzidetta condizione di minimo, è necessario, che per tale particolare scelta, lo scalare F_n risulti massimo. Ciò dà luogo a due condizioni distinte, dipendenti separatamente dal modulo e dal segno di F_n : il mas-

simo modulo F_n , implica, che il versore n debba giacere sulla intersezione dell'iperpiano normale π col piano individuato dal vettore F , che è un dato del problema dinamico, e dalla tangente in P , alla traiettoria Γ , relativa al moto naturale del sistema, che è pure un dato della questione; di guisa che deve risultare nulla la componente di F secondo ogni binormale b_s :⁽¹⁾

$$(III) \quad F_{b_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n-2).$$

Il segno, necessariamente positivo, di F_n , implica che il verso del vettore curvatura, deve esser tale da formare un angolo acuto col vettore F . Le (I), (II) e (III) costituiscono manifestamente le equazioni intrinseche del moto dei sistemi liberi, comunque sollecitati.

Passiamo oramai al caso generale di un sistema S comunque vincolato con legami espressi da equazioni del tipo (6). Si vedrà, che la deduzione delle $n-1$ rimanenti equazioni intrinseche del moto, analoghe alle (II) e (III), può ricondursi al problema già trattato per i sistemi liberi.

Infatti, moltiplicando ciascuna delle (6) per $\frac{dt}{ds}$ e derivando rapporto all'arco, si deducono altrettante equazioni lineari ed in generale non omogenee, nelle derivate seconde delle coordinate cartesiane ξ_i, η_i, ζ_i :

$$(12) \quad \sum_i^N \left(a'_{k,i} \frac{d^2 \xi_i}{ds^2} + a''_{k,i} \frac{d^2 \eta_i}{ds^2} + a'''_{k,i} \frac{d^2 \zeta_i}{ds^2} \right) + \dots = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

ed i termini che si omettono risultano indipendenti da tali derivate seconde. Ponendo

$$A_{k,3i-2} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} a'_{k,i} \quad ; \quad A_{k,3i-1} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} a''_{k,i} \quad ; \quad A_{k,3i} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} a'''_{k,i}$$

e tenendo conto delle (3), le (12) possono scriversi:

$$(12') \quad \sum_v^r A_{k,v} \frac{d^2 x_v}{ds^2} + \dots = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Per le precedenti considerazioni, occorre rendere minima la (11) considerata come funzione delle variabili $\frac{d^2 x_v}{ds^2}$ soggette alle condizioni (12'); si tratta quindi di un minimo relativo, e si è ricondotti, colla nota regola dei moltiplicatori di Lagrange, a minimizzare la seguente funzione delle stesse variabili $\frac{d^2 x_v}{ds^2}$, riguardate però del tutto indipendenti:

$$(13) \quad \bar{\varphi} = \frac{s^4}{2} \sum_v^n \left(\frac{d^2 x_v}{ds^2} \right)^2 - s^2 \sum_v^n \left[\Xi_v - \sum_k^r \lambda_k A_{k,v} \right] \frac{d^2 x_v}{ds^2} + \dots$$

(1) Si noti che le binormali b_s in ogni punto P della traiettoria Γ costituiscono una varietà ad $n-2$ dimensioni.

funzione che si ottiene sommando alla (11) le r equazioni (12') dei vincoli, moltiplicate per opportuni parametri, che conviene mettere nella forma $\dot{s}^2 \lambda_k$, con λ_k ($k = 1, 2, \dots, r$) indeterminati.

Denotando con \mathbf{R} un vettore dipendente esclusivamente dai vincoli, le cui componenti Ξ'_v siano definite dalle relazioni:

$$(14) \quad \Xi'_v = - \sum_k^r \lambda_k A_{kv} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

la funzione (13), può mettersi sotto la forma:

$$\varphi = \frac{\dot{s}^4}{2} \sum_v^n \left(\frac{d^2 x_v}{ds^2} \right)^2 - \dot{s}^2 \sum_v^n \left[\Xi_v + \Xi'_v \right] \frac{d^2 x_v}{ds^2} + \dots$$

che differisce dalla (11) per la semplice aggiunta delle componenti del vettore \mathbf{R} alle componenti analoghe del vettore \mathbf{F} . Interpretiamo, nello spazio V , il vettore \mathbf{R} come un ente, che caratterizzi globalmente tutte e sole le azioni provenienti dai vincoli; poichè l'ultima relazione dev'essere trattata col medesimo procedimento formale adoperato a partire dalla (11), per i corrispondenti sistemi liberi, si riconosce, che il sistema S vincolato può considerarsi come libero, purchè alla sollecitazione attiva \mathbf{F} si aggiunga l'azione vincolare risultante \mathbf{R} . Giova rilevare che le (14), con riferimento allo spazio V , hanno espressione del tutto analoga a quella spettante alle componenti delle reazioni provenienti dai legami, che si esercitano realmente sui singoli punti P_i del sistema materiale di cui si tratta⁽¹⁾.

Ne consegue tra l'altro, che nel moto naturale di un generico sistema vincolato S , il vettore curvatura \mathbf{cn} in ciascun punto P della traiettoria Γ , deve avere tale modulo $c = \frac{1}{r}$ da verificare l'equazione:

$$(II') \quad \mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n = \frac{\dot{s}^2}{r}.$$

Inoltre la sua direzione deve coincidere con la retta intersezione dello iperpiano normale π col piano determinato dalla tangente in P e dalla forza totale risultante della sollecitazione attiva \mathbf{F} e della reazione vincolare \mathbf{R} ; di guisa che in ogni punto P di Γ e per ogni binormale \mathbf{b}_s , deve verificarsi l'equazione:

$$(III') \quad \mathbf{F}_{b_s} + \mathbf{R}_{b_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n-2).$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, p. 679, e vol. II (parte prima) p. 341.

Infine il suo verso deve esser tale da formare un angolo acuto col vettore risultante $\mathbf{F} + \mathbf{R}$.

Le (II') e (III') costituiscono manifestamente le $n - 1$ rimanenti equazioni intrinseche del moto di ogni sistema materiale S , comunque vincolato e sollecitato, purchè a legami privi di attrito ed indipendenti dal tempo.

Meccanica. — *Sul comportamento degli archi elastici molto ribassati.* Nota⁽¹⁾ di O. BELLUZZI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. Lo studio degli archi elastici molto ribassati può essere considerato sotto due diversi aspetti: 1° della determinazione del regime di equilibrio dell'arco soggetto a carichi; 2° della ricerca delle condizioni di stabilità dell'equilibrio stesso.

La prima questione fu studiata da J. Melan⁽²⁾ in base all'ipotesi che, per un carico uniformemente ripartito secondo l'orizzontale; la curva funicolare del carico coincida con la fibra media dell'arco.

Nella seconda ricerca⁽³⁾, ripresa recentemente in una serie di articoli da E. Baticle, A. Mesnager, G. Pigeaud, R. Chambaud⁽⁴⁾, si suppone ancora che la funicolare dei carichi coincida con la fibra media fino a quando ha inizio l'instabilità dell'equilibrio, e si trascurano inoltre le deformazioni che l'arco subisce fino a quell'istante.

Ora da un lato è ben noto che la supposizione della coincidenza della funicolare con la fibra media è lecita solamente nel caso in cui il raggio d'inerzia della sezione contenuto nel piano della fibra media, che sarà in seguito indicato con ρ , sia piccolissimo in confronto con la freccia dell'arco; mentre d'altra parte, a cagione della piccola entità delle ordinate dei punti della fibra media e della notevole deformabilità degli archi molto ribassati, è necessario tener conto degli spostamenti dei punti di detta fibra.

Nella presente Nota sono riassunti i risultati di una mia ricerca⁽⁵⁾ intesa precisamente a illustrare il comportamento di tali archi quando siano vincolati da due cerniere e a mettere in rilievo le divergenze del comportamento stesso rispetto a quello che risulta mediante le ordinarie teorie che

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1929,

(2) «Handbuch der Ingenieurwissenschaften», II Bd., V. Abt., p. 128 e sg.

(3) R. MAYER, *Knickfestigkeit*, ed. Springer, Berlino, 1921, p. 139 e sg.

(4) «Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences», 1929, n. 3; «Le Génie Civil», 1929, n. 5, 8, 12, 19, 20.

(5) Per maggiori dettagli cfr. l'articolo che uscirà prossimamente, sotto lo stesso titolo, negli «Annali dei Lavori Pubblici».

considerano l'equilibrio dell'arco, trascurando i mutamenti dovuti alla deformazione.

2. Abbiassi un arco elastico a due cerniere, di sezione costante e siano $y_0 = y_0(x)$, $y_1 = y_1(x)$ le equazioni cartesiane della sua fibra media prima e dopo la deformazione. Per l'ipotesi del forte ribassamento, vale l'equazione

$$(1) \quad EJ \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right) = M_x$$

nella quale i simboli hanno un significato noto.

Benchè si possa facilmente studiare il caso comune dell'arco parabolico⁽¹⁾, tuttavia, per ottenere risultati che si prestino meglio alla discussione, conviene considerare archi aventi la fibra media di forma speciale. Nel caso di archi circolari o parabolici, poco diversi da quelli qui considerati stante il forte ribassamento, i risultati avranno almeno valore qualitativo, se non esattamente quantitativo.

Esamineremo due diverse condizioni di carico e, per ciò che si riferisce alle dimensioni dell'arco, supporremo che siano date dapprima la corda l e la freccia f_0 .

Sia il carico uniformemente ripartito secondo l'orizzontale (valore unitario p). In tal caso conviene studiare un arco avente la fibra media coincidente con la deformata di una trave rettilinea e liberamente appoggiata, soggetta a un carico uniforme, rivolto verso l'alto e di valore unitario p_0 tale da produrre una freccia f_0 uguale a quella dell'arco. Si ha allora

$$(2) \quad y_0 = \frac{p_0}{24 EJ} (l^3 x - 2 l x^3 + x^4) = \frac{16 f_0}{5 l^4} (l^3 x - 2 l x^3 + x^4).$$

Se si pone $\frac{H}{EJ} = a^2$, $al = b$, $p_0 - p = p_1$ e si tiene conto delle condizioni di vincolo, l'integrale della (1) risulta espresso da

$$(3) \quad y_1 = \frac{p_1}{a^2 H} \left(\frac{1 - \cos b}{\sin b} \sin ax + \cos ax - 1 \right) - \frac{p_1 x (l - x)}{2 H}.$$

La reazione orizzontale H si può determinare nel modo seguente. Indicando con l' la lunghezza della fibra media e con l la corda prima della deformazione, con δ l'eventuale cedimento orizzontale relativo delle due imposte, si ha, per l'ipotesi del forte ribassamento:

$$l = l' - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx, \quad l + \delta = \left(l' - \frac{H l'}{EA} \right) - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx$$

(1) Cfr. l'articolo citato.

da cui, con buona approssimazione:

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx = \frac{Hl}{EA} + \delta.$$

Tenendo conto delle (2), (3) e ponendo $Q_1 = p_1 l = p_0 l - pl = Q_0 - Q$, $f_0/l = n_0$, si ottiene

$$(4) \quad Q_1 = Q_0 - Q = \pm 4 \sqrt{3} Hb \cos \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2,487 n_0^2 - \left(\frac{H}{EA} + \frac{\delta}{l} \right)}{12 + (24 + b^2)(1 + \cos b) - 60 \frac{\sin b}{b}}}.$$

3. Se agisce invece un carico P verticale concentrato sul vertice, si consideri un arco avente la fibra media coincidente con la deformata di una trave rettilinea e liberamente appoggiata, soggetta a un carico concentrato in mezzaria, rivolto verso l'alto e di valore P_0 tale da prodorre una freccia f_0 uguale a quella dell'arco. Si ha così

$$y_0 = \frac{P_0}{48 EJ} (3 l^2 x - 4 x^3) = \frac{f_0}{b} (3 l^2 x - 4 x^3).$$

Ponendo $P_0 - P = P_1$, si ottiene

$$(5) \quad y_1 = \frac{P_1}{2 a H \cos \frac{b}{2}} \sin ax - \frac{P_1 x}{2 H}$$

e, mediante un procedimento analogo al precedente,

$$(6) \quad P_1 = P_0 - P = \pm 4 H \cos \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2,4 n_0^2 - \left(\frac{H}{EA} + \frac{\delta}{l} \right)}{2 + \cos b - 3 \frac{\sin b}{b}}}.$$

4. Le equazioni (3), (4), (5), (6) sono valide anche se l'arco, per effetto della deformazione, passa sotto alla corda, conservandosi o no il senso della H ; come pure nel caso di un arco rovescio, soggetto a carichi rivolti verso il basso. In quest'ultimo caso, se si considera ancora H positiva quando è rivolta verso l'interno, conviene porre $\frac{|H|}{EJ} = a^2$ e mettere ia al posto di a nelle formule suddette, nelle quali perciò le funzioni circolari si trasformano in iperboliche.

Se l'arco degenera in una trave rettilinea, si ritrovano le equazioni ottenute da F. Takabeya⁽¹⁾.

(1) *Étude des pîces encastrées aux deux extrémités*, ed. Béranger, Parigi, 1926, formule (59), (135),

5. Per la discussione dei risultati, conviene supporre $\delta = 0$ e osservare che la (4) dà $Q_1 = 0$, $Q = Q_0$ per $H = 2,487 EAn_0^2$, nel qual caso la deformazione trasforma l'arco nella corda e H raggiunge il suo massimo valore, e per $H = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = H'$, $9H'$, ...

La reazione H potrà o no raggiungere qualcuno dei valori H' , $9H'$, ..., dipendentemente dalla grandezza di $2,487 EAn_0^2$ rispetto a tali valori. Esamineremo perciò separatamente i casi in cui $2,487 EAn_0^2$ è minore di H' , oppure è compreso fra H' e $9H'$, oppure è maggiore di $9H'$; cioè i casi in cui $f_0 \leq 1,992 \rho$, $1,992 \rho < f_0 \leq 5,976 \rho$, $f_0 > 5,976 \rho$. (Se l'arco è soggetto al carico P concentrato, si ha 2,4 in luogo di 2,487 e i limiti suddetti diventano 2,028 ρ e 6,084 ρ).

a) Sia $f_0 \leq 1,992 \rho$.

Attribuendo ad H valori crescenti da zero a $2,487 EAn_0^2$, il valore positivo di Q_1 diminuisce e perciò il carico Q aumenta. Quando $H = 2,487 EAn_0^2$, si ottiene $Q = Q_0$ e l'arco si trasforma nella corda.

Assumendo nella (4) il segno inferiore, si ottengono, per gli stessi valori di H, valori di Q simmetrici di quelli precedenti rispetto a Q_0 e e l'arco passa sotto alla corda. Quando $Q = 2Q_0$, l'arco si dispone secondo la curva simmetrica di quella d'origine rispetto alla corda e H naturalmente si annulla.

Per valori negativi di H si ottiene $|Q_1| > Q_0$, cioè $Q > 2Q_0$ oppure $Q < 0$. L'arco si deforma ulteriormente, oppure si deforma verso l'alto.

Le curve a) e b) della prima parte della figura rappresentano la legge di variazione H(Q) per due valori di f_0 , il secondo dei quali è più prossimo a 1,992 ρ . Le curve a') e b') rappresentano, per gli stessi valori di f_0 , la legge di variazione della freccia f_1 della fibra media deformata.

b) Sia $1,992 \rho < f_0 \leq 5,976 \rho$.

Quando H raggiunge il valore H' , si ottiene $Q = Q_0$. L'arco si deforma nella semionda di una sinusoida di freccia $f_1' = \frac{2}{\pi} \sqrt{2,487 f_0^2 - \pi^2 \rho^2}$.

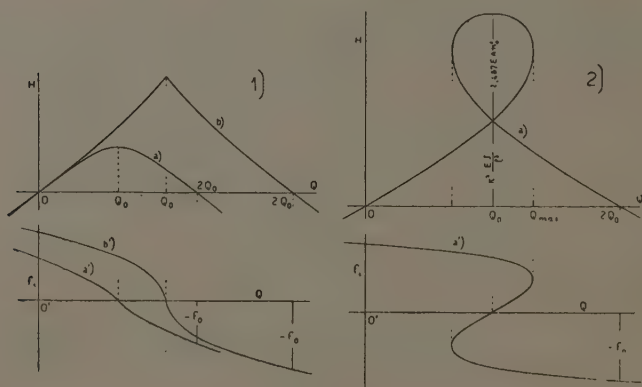
Per $H > H'$, si ottengono, assumendo nella (4) il segno superiore, valori di Q che aumentano fino a un valore Q_{\max} , per poi diminuire fino a Q_0 quando $H = 2,487 EAn_0^2$. Assumendo invece nella (4) il segno inferiore, risultano valori di Q simmetrici di quelli precedenti rispetto a Q_0 . La legge di variazione H(Q) è rappresentata nella seconda parte della figura in a), mentre in a') è rappresentata la legge $f_1(Q)$.

Quando Q raggiunge il valore Q_{\max} suddetto, si verifica un caso di instabilità dell'equilibrio, poichè, se si mantiene $Q = Q_{\max}$, come pure se si diminuisce Q in misura opportuna, la deformazione dell'arco aumenta finchè l'arco stesso non ha raggiunto una nuova configurazione di equilibrio stabile, sottostante alla corda.

Trattasi perciò di un genere d'instabilità di natura diversa da quella dei casi classici; poichè in questi le deformazioni che accompagnano l'instabilità hanno bensì inizio per un determinato valore critico del carico, ma, almeno teoricamente, aumentano soltanto se il carico, sia pure in misura limitatissima, aumenta ulteriormente.

La reazione $H_{cr.}$ corrispondente al carico Q_{max} può scendere fino al valore $H' = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ per $f_0 = 1,992 \rho$; aumenta col crescere di f_0 , e quando f_0 supera un determinato valore, $H_{cr.}$ risulta maggiore di $4H'$, potendo giungere fino a $9H'$.

In questo caso, prima che il carico Q raggiunga il valore Q_{max} , si manifesta l'instabilità con formazione di un flesso relativo⁽¹⁾ in corrispon-



denza del vertice, la quale instabilità, secondo le ricerche di R. Mayer⁽²⁾, ha luogo per valori di $H_{cr.}$ poco diversi da $4H'$.

Per conseguenza, i casi qui considerati corrispondenti a valori di H maggiori di $4H'$ sono realizzabili solo nell'ipotesi che si possa, in qualche modo, impedire all'arco di deformarsi secondo curve non simmetriche rispetto alla verticale per il vertice.

c) Infine, quando $f_0 > 5,976 \rho$, la reazione H raggiunge il valore $9H'$, senza che l'arco si trasformi nella corda.

Quando $H = 9H'$, si ottiene $Q = Q_0$ e l'arco si trasforma in una sinusoide costituita da tre semionde aventi una freccia $f_1''' = \frac{2}{3\pi} \sqrt{2,487 f_0^2 - 9\pi^2 \rho^2}$. Nel caso del carico Q ripartito, la semionda centrale rivolge la convessità

(1) Aumento della curvatura da una parte del vertice e diminuzione dall'altra parte.

(2) loc. cit.

verso l'alto, mentre la rivolge verso il basso, nel caso del carico P concentrato sul vertice.

Oltrepassata questa configurazione, la fibra media torna ad allungarsi e la reazione H diminuisce.

6. L'instabilità dell'equilibrio può pertanto verificarsi in due modi completamente diversi.

Se l'arco è molto ribassato, quando il carico Q (o P) raggiunge un determinato valore Q_{\max} , si inizia la fase d'instabilità e l'arco aumenta la sua deformazione, passando per configurazioni simmetriche rispetto alla verticale per il vertice. Il valore di $H_{cr.}$ può variare da un minimo uguale a $\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ fino a un massimo non molto diverso da $4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$.

Se invece l'arco ha un ribassamento meno spinto, l'instabilità si inizia con la formazione di un flessio relativo in corrispondenza del vertice dell'arco. I valori esatti di $H_{cr.}$ e di $Q_{cr.}$ si potrebbero determinare, in questo caso, istituendo una ricerca che permettesse di considerare deformazioni non simmetriche e che mettesse nel dovuto conto le deformazioni che avvengono durante la fase che precede l'instabilità.

La reazione $H_{cr.}$ può pertanto variare dal valore $\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$, sostenuto da G. Pigeaud, fino a un valore circa quattro volte maggiore, che si avvicina a quello sostenuto da suoi oppositori.

7. È possibile, infine, determinare⁽¹⁾ la legge di variazione della reazione H e della freccia di deformazione al variare del ribassamento dell'arco, fermi restando i valori della corda e dei carichi. Si ottengono risultati notevolmente diversi da quelli che si trovano mediante le ordinarie teorie.

(1) Cfr. l'articolo citato.

Geofisica. — *Caratteristiche fisiche fondamentali della pianura padana.* Nota ⁽¹⁾ di A. BELLUIGI, presentata dal Corrisp. A. ALESSIO.

1. La pianura padana è caratterizzata da anomalie negative della gravità se si eccettuano due aree che indicheremo sommariamente con i nomi Padova-Ceraino ed Ivrea ad anomalie positive (vedi carte delle isanomale $\Delta g'' = K$ del Costanzi e del Kossmat).

Anomalie negative si riscontrano per di più nel versante nord e nord-est dell'Appennino settentrionale, nelle Alpi, nell'Adriatico, tanto che la pianura padana si può così fisicamente caratterizzare: zona delimitata a sud da isanomale negative chiuse, schiacciate nel senso sud-nord, con l'asse maggiore lungo il margine appenninico; ad est dall'isanomala positiva periferica del mare Adriatico; ad ovest dall'isanomala positiva periferica dell'area di Ivrea, isanomala schiacciata nel senso est-ovest e parallela all'andamento marginale alpino; a nord dall'isanomala positiva di Padova, schiacciata nel senso sud-nord, e, in più, da due corridoi sud-nord di anomalie negative, delimitati rispettivamente dalle isanomale positive di Ivrea, Padova, Adriatica. Di questi due corridoi l'orientale è nella direttrice Bologna-Ferrara-Venezia-Pordenone-Alpi; l'occidentale nella direttrice: Voghera-Pavia-Milano-Alpi.

I valori della gravità nella direttrice orientale, da un minimo a Bologna passano ad un massimo negativo a Ferrara, per poi ridiscendere di nuovo gradatamente, procedendo verso nord, senza più raggiungere, in quella direzione, il minimo di Bologna.

Poichè nella direzione Mantova-Ferrara-Ravenna i valori della gravità aumentano fino a Ferrara per poi diminuire verso Ravenna, s'intuisce che nel triangolo Mantova-Chioggia-Bologna deve racchiudersi un disturbo locale, il quale, sebbene ad anomalia negativa rivela un eccesso di gravità locale, delimitato da isanomale chiuse, il che è stato confermato con numerose misure eötvössiane eseguite dall'A. G. I. P.

I valori della gravità, nella direttrice occidentale vanno crescendo da Voghera a Pavia piuttosto rapidamente, poi crescono ancora, più o meno regolarmente, fino alle Alpi (m. Generoso). Da Romagnano ad est la gravità diminuisce per poi risalire ad est di Milano, analogamente che da Padova a Chioggia all'Adriatico.

I profili della gravità nei due corridoi indicati hanno così un andamento simile dall'Appennino alla mezzaria della pianura, ma mentre un'area

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1929.

ad eccesso di gravità (pur ad anomalia negativa) si pronuncia nella zona di Ferrara, nel corridoio occidentale, al luogo dell'area chiusa ad eccesso di gravità, si dovrebbe rilevare un plateau esteso sud-nord, sempre ad eccesso di gravità rispetto alla pianura a sud, ma con un raccordo piuttosto pianeggiante a nord con le Alpi.

Misure di gradienti orizzontali della gravità definiscono maggiormente il fenomeno gravimetrico Ferrara-Mirandola come potrebbero pur definire maggiormente gli aspetti eötvössiani del fenomeno gravimetrico di Milano.

Con le due aree di anomalie positive pedalpine potremmo allineare i corridoi di anomalie negative (ma ad eccesso di gravità rispetto al terreno circostante), e così si profila un limite fisico sotto alla pianura padana tra il sistema alpino e quello appenninico, e, nello stesso tempo, un collegamento tra i due sistemi montani.

2. Un'importante osservazione da fare è che l'incremento della gravità da Scandiano (Reggio E.) a Ferrara, coincide o quasi con quello eötvössiano, il che significa che l'effetto gravimetrico si deve piuttosto ad una distribuzione orizzontale di masse, più dense verso la regione centrale della pianura, cadendo i minimi di gravità marginalmente all'Appennino. Come questa distribuzione avvenga, il problema è risolubile solo esaminando i dati eötvössiani, ma ciò esula dal presente studio.

Il forte deficit di gravità, da Scandiano a Ferrara è dato da $g'' = 150.10^{-3}$ C. G. S., la gravità aumentando da un minimo nella zona di Scandiano, fino ad un massimo nella zona di Ferrara, in modo piuttosto brusco in vicinanza del piede dell'Appennino.

La curva delle anomalie negative $g'' - \gamma_0 = k$ coincide press'a poco con la curva delle anomalie isostatiche, venendo a mancare o quasi, nel territorio in esame, la correzione di Bouguer, di modo che si rileva un massimo di anisostasia negativa ai piedi dell'Appennino, anisostasia che s'attenua progressivamente fino a Ferrara senza pervenire mai, in pianura, ad un rigoroso equilibrio o compensazione isostatica.

Che i massimi negativi di $\Delta g''$ non cadano sempre in corrispondenza delle massime altitudini, ma lungo depressioni marginali (Stille) a causa delle forti sedimentazioni, producendo quelle che il Kossmat chiama geosinclinali di secondo ordine, si tratta di un fenomeno quasi generale che si riscontra nella regione convessa dei grandi corrugamenti montani.

Solo da rilevare è che l'Appennino emiliano accenna ad una compensazione isostatica da Barigazzo a sud, con zone di anisostasia positiva.

D'altronde le Alpi, secondo Kossmat, non sono compensate a causa di anisostasie positive che si accentuano verso il raccordo sud di esse con la pianura padana.

È noto che la grandezza ed il segno delle anomalie di gravità dipendono dall'estensione regionale del materiale anomalo, non escluso quello che è oggetto della geologia superficiale. Si conoscono tentativi di spiega-

zione delle anomalie isostatiche negative nella pianura del Gange del Bourard, ma anche le serie obiezioni di A. Born.

Un'idea, nel caso nostro, si può avanzare: che la cintura delle anomalie positive ai piedi delle Alpi, rappresenta una compensazione regionale, che può estendersi, come è stato genericamente affermato dal Bowie, anche a distanza di 100 km. dalla struttura maggiormente non compensata.

Per il calcolo delle caratteristiche della depressione marginale appenninica o della struttura più densa a nord di essa, poniamo il seguente criterio che è più rigoroso dell'unico finora applicato (1).

Poniamo $U_{xz} = f(x; y; z; \sigma; \dots)$ e ricaviamo $(U_{xz})_{\max.}$; si prendano i valori di U_{xz} corrispondenti alle ascisse x_1, x_2, \dots, x_n tali che:

$$(U_{xz})_i = \Omega_i [U_{xz}]_{\max.}$$

dove Ω_i indica un coefficiente od un esponente frazionari. Potremo stabilire tante equazioni quante incognite appaiono nella $f(x; y; z; \sigma; \dots)$ e così dedurre profondità minime, massima, densità della massa perturbante caratterizzata da $U_{xz} = f(x; y; z; \sigma; \dots)$.

Dovendo fare attenzione più che altro agli ordini di grandezza è sufficiente limitarsi a porre:

$$f(x; y; z; \sigma; \dots) = k \Delta \sigma (\ln r_2^2 - \ln r_1^2)$$

r_1 e r_2 indicano le distanze di un punto stazione dai limiti superiore e inferiore della struttura più densa.

Facendo variare $\Delta \sigma$ da 0.1 a 1 (riferimento alla struttura più densa) si può tracciare una curva, sulla cui ascissa sono riportati i valori di $\Delta \sigma$ e sull'ordinata i valori di $z_2:z_1$.

Posto $(U_{xz})_{\max.} = 30.10^{-9}$ C. G. S., $\frac{\tilde{z}_2}{\tilde{z}_1}$ varia rapidamente per $\Delta \sigma$ da 0.1 ad 0.4 per poi variare pochissimo da 0.4 a 1. Le profondità minime della massa aumentano con l'aumentare di $\Delta \sigma$, nel caso in esame da 3 km. circa a 9 km., dimodochè le profondità massime risultano di 33 km. e 20 km. rispettivamente.

Posto $(U_{xz})_{\max.} = 50.10^{-9}$ C. G. S., valore medio osservato, $\tilde{z}_2:\tilde{z}_1$ varia ancor più bruscamente di prima per $\Delta \sigma$ da 0.1 a 0.5; da $\Delta \sigma = 0.6$ ad 1, $\frac{\tilde{z}_2}{\tilde{z}_1}$ assume valori da 1.8 ad 1.4. Le profondità minime aumentano da km. 1.5 a km. 8 e le massime da km. 44 a km. 9.

Utilizzando ora la recente carta della distribuzione dei disturbi magnetici locali in Europa del prof. Nippoldt, si può rilevare un marcato paral-

(1) KOENIGSBERGER, *Für Geoph. gravimetrischen Landesuntersuchung und über die Tiefenlage der störenden Massen*. «Zeit. f. prakt. Geologie», 1927, H. 5.

lelismo tra le isanomale pendolari e quelle magnetiche (linee propriamente quest'ultime di ugual deviazione dell'intensità verticale del magnetismo terrestre dal campo medio europeo, dalla somma cioè del campo omogeneo di tutta la Terra e del campo regionale europeo).

Al gradiente massimo della gravità di Borgoforte Mantova corrisponde un gradiente massimo di $\Delta\gamma$.

I valori $\Delta\gamma$ negativi caratteristici delle isanomale magnetiche della valle padana o dell'Appennino, stanno ad indicare che il campo magnetico delimitato da queste isanomale proviene da una magnetizzazione sud delle rocce profonde minore di quella del campo medio europeo: il minimo di questa magnetizzazione (-400γ circa) cade quasi nella zona marginale appenninica.

Tale coincidenza mentre conferma, ancora una volta, il principio che i grandi disturbi gravimetrici sono correlazionati a disturbi magnetici, significa altresì che una è la causa di questi disturbi gravimetrici e magnetici.

Dato l'ordine di grandezza di tali anomalie e le caratteristiche delle probabili masse gravimetricamente perturbanti, la causa delle anomalie magnetiche deve attribuirsi a terreni profondi a piccola suscettività magnetica differenziale rispetto ai terreni ricoprenti ed a piccola suscettività magnetica assoluta.

Circa la natura geologica di questi terreni profondi, ricoperti da masse sedimentarie, che possono dare notevoli perturbazioni fino a $+200 \gamma$ (Reich) si possono avanzare varie ipotesi, subordinatamente alle dimensioni che si stabiliscono per la depressione marginale appenninica.

Le anomalie negative diminuiscono nella regione di Ferrara (-200γ), analogamente a quanto accade per le anomalie negative gravimetriche; anche per questa via si può dedurre che si modifica, da sud a nord, la distribuzione orizzontale delle masse, da magneticamente meno permeabili a più permeabili.

Un'ultima osservazione riguarda la distribuzione dell'intensità delle scosse sismiche dovute a probabili focolari rettilinei (presumibilmente alla base della depressione marginale appenninica — sismi entocentrici).

Sembra, da quanto cortesemente ci ha comunicato il sismologo prof. Agamennone, che si possa stabilire una zona di ombra sismica lungo la mezzaria della regione orientale della valle padana. Questo fatto, spiegabile coll'ammettere una struttura profonda densa ed elastica, atta a giustificare quell'ottica particolare dei raggi elastici, illumina ancor più il fenomeno gravimetrico di Mirandola, che ha così oltre le individuate caratteristiche di gravità, altre elastiche e magnetiche. Sulle caratteristiche elastiche sarebbe necessario ritornare se si potesse disporre di sismogrammi ottenuti con apparecchi moderni, in modo da studiare le P_n , le \bar{P} (Mohorovicic) le P^* (Gutenberg), elementi questi che, analizzati, possono permettere interessanti deduzioni geologiche, come recentemente ha dimostrato lo stesso Gutenberg, identificando, dall'andamento delle isoseiste delle diverse onde longitudinali, alcune direzioni del sistema montuoso varisco sotto alla pianura germanica, direzioni individuate prima gravimetricamente, dal Kossmat.

Geofisica. — *Sulla influenza della elasticità del supporto sulla durata di oscillazione di due pendoli simultaneamente oscillanti su di esso.* Nota di P. DORE, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. E. SOLER.

Il problema della determinazione di formule praticamente atte al calcolo della perturbazione della durata di oscillazione di due pendoli, presso a poco equivalenti, simultaneamente oscillanti su di un comune supporto, dovuta alla flessione del supporto stesso, fu per la prima volta proposto — per quanto mi consti — dal Lorenzoni e dal Silva⁽²⁾, ai quali spetta il merito di avere messo in luce con ricerche teoriche e sperimentali la possibilità di utilizzare anche per la misura della gravità le oscillazioni di pendoli in così fatte condizioni, oscillazioni che, per non essere sincrone, erano state fino allora usate solo per la determinazione della flessione del supporto⁽³⁾.

Successivamente si sono occupati dell'argomento, che ha un interesse notevolissimo nella pratica della gravimetria, il Wenig-Meisnez⁽⁴⁾ nella sua opera complessa e cospicua, e, con recenti ricerche, due eminenti geofisici tedeschi i professori Berroth⁽⁵⁾ e Schmehl⁽⁶⁾.

Il Berroth e lo Schmehl partono dalle formule di Fürtwangler e Wenig-Meisnez⁽⁷⁾

$$(1) \quad \Delta S_i = \gamma (1 + a_{ji} \cos (\varphi_j - \varphi_i)) \quad (i, j = 1, 2)$$

in cui si indica con:

S_1 ed S_2 le durate di oscillazione che i due pendoli, cui attribuiamo i due indici 1 e 2, avrebbero se oscillassero soli su supporto rigido;

ΔS_1 e ΔS_2 le loro perturbazioni per effetto della flessione durante la contemporanea oscillazione;

$a_{21} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $a_{12} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ se con α_1, α_2 si indicano le amplitudini attuali dei pendoli;

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1929.

(2) Cfr. LORENZONI e SILVA, *Il supporto bipendolare Mioni a recipienti pneumatici* (R. Commissione Geodetica Italiana), Padova, 1912.

(3) Cfr. p. es. VENTURI, *Gli integrali generali del moto del bipendolo, ecc.*, Palermo, 1911, p. 15 e FÜRTWANGLER, «Sitz. Berl. Akad.», 1902, XII, p. 248.

(4) Cfr. *Observations de pendule dans les Pays Bas*, Delft, 1923.

(5) «Zeitschrift für Geophysik», I, 1924-1925, Heft, 3.

(6) «Zeitschrift für Geophysik», III, 1927, Heft, 4.

(7) Cfr. FÜRTWANGLER, loc. cit., WENIG-METSNEZ, loc. cit., p. 26.

φ_1, φ_2 , le fasi dei due pendoli $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ la loro fase reciproca;
 γ la perturbazione della durata di oscillazione (aumento di S_1 ed S_2)
 per un pendolo oscillante solo.

In base a tali formule viene determinata la influenza della flessione sul medio valore di una oscillazione ottenuta dalle osservazioni di n coincidenze da un tempo t_0 a un tempo t_1 , vale a dire il valore di

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \Delta S_i dt \quad (i = 1, 2)$$

sviluppando in serie di potenze di $(t_1 - t_0)$ il prodotto $ai_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)$,
 $(i, j = 1, 2)$.

Sovvengono per il calcolo dei coefficienti di tale serie i valori delle derivate prime del rapporto delle amplitudini e della fase, assegnati dal Fürtwangler nelle sue classiche ricerche sulle equazioni differenziali del bipendolo (1)

$$(2) \quad \frac{da_{21}}{dt} = -\frac{\pi}{S^2} \gamma (1 + a_{21}^2) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad S = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

$$(3) \quad \frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dt} = -\frac{\pi}{S^2} [(S_2 - S_1) + \gamma (a_{12} - a_{21}) \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

e le altre due che da queste si deducono scambiando gli indici fra loro.

Per questa via perviene lo Schmehl con una opportuna introduzione dei valori di a_{21}, a_{12} per $\varphi = \pi$ e limitandosi nello sviluppo ai termini nelle terze potenze di $(t_1 - t_0)$ a formule di riduzione di facile calcolo. Al riguardo delle quali per altro è da osservarsi che, nel caso di pendoli le cui durate di oscillazione differiscono, come lo Schmehl suppone e noi vogliamo supporre, di alcune unità della quinta decimale del secondo, e di osservazioni protratte per un certo tempo — più di un'ora p. es. e anche oltre come consentono gli apparati pneumatici, — non sembra, *a priori*, si possa esser sicuri, senza un esame delle condizioni in cui avviene la determinazione pendolare, che il resto della serie, fermandosi ai termini in $(t_1 - t_0)^3$ sia tale da garantire la approssimazione necessaria alle riduzioni.

A formule finite, indipendenti da sviluppi in serie, usate per la riduzione delle osservazioni fatte da noi in Italia, pervenne, nella Memoria sopra citata, il Lorenzoni. Tali formule, praticamente possono in molti casi, e in particolare in tutti quelli in cui lo sono state da noi, essere utilizzate, ma il loro fondamento, come più sotto sarà dimostrato, sta in una ipotesi che se è *a priori* accettabile nel caso dell'apparato cui il Lorenzoni si riferiva, tale non può ritenersi in casi diversi e più generali: non è tut-

(1) Cfr. loc. cit.

tavia difficile l'assegnare dei termini correttivi che le rendano atte ad uso più generale, sì che veramente fondamentali sono da considerarsi le geniali vedute dell'illustre Astronomo e Geodeta italiano in questo campo di ricerche.

Mi sia lecito qui accennare per sommi capi, riportando in alcuni casi le parole stesse dell'autore, la dimostrazione di cui trattasi che trovasi a pagg. 12-14 della Memoria. Suppone il Lorenzoni che i due pendoli di uguale massa e di durate di oscillazione prossimamente uguali S_1 ed S_2 , siano capaci, deviati che siano dalla verticale dello stesso angolo α di produrre nel supporto flessioni sensibilmente uguali fra loro, cui corrispondano spostamenti ϵ_1 ed ϵ_2 dei rispettivi tagli dei coltelli e deviazioni angolari ai rispettivi centri di oscillazione, molto prossimamente uguali fra loro e al loro medio $\frac{\epsilon}{l}$. Ponendo come zero dei tempi l'istante in cui i due pendoli vengono posti in movimento partendo l'uno dall'amplitudine $+\alpha$ l'altro dall'amplitudine $-\alpha$ l'elongazione della linea d'appoggio del primo coltello da solo sarebbe al tempo t

$$e_1 = \frac{\epsilon}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi}{S_1} \left(t + \frac{S_1}{2} \right) = \frac{\epsilon}{l} \cos \pi \frac{t}{S_1}$$

quella del secondo

$$e_2 = -\frac{\epsilon}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi}{S_2} \left(t + \frac{S_2}{2} \right) = -\frac{\epsilon}{l} \cos \pi \frac{t}{S_2}$$

sicchè per la solidità fra le due linee d'appoggio dovuta al supporto comune, la elongazione comune alle due linee sarà la risultante

$$(4) \quad E = \frac{\epsilon}{l} \left(\cos \frac{\pi t}{S_1} - \cos \frac{\pi t}{S_2} \right).$$

Di qui, con opportune trasformazioni, avvalendosi di risultati già da lui ottenuti nel classico lavoro « Relazione delle esperienze istituite nell'Osservatorio di Padova ecc. » e, comunque, anche per altra via istituibili, il Lorenzoni deduce agevolmente la perturbazione della durata di una oscillazione qualsiasi emmesima a partire da $t=0$

$$(5) \quad \Delta S^{(m+1)} = \frac{S}{2\alpha} \frac{\epsilon}{l} \left(1 - \cos 2\pi m \frac{S_1 - S_2}{S_1 S_2} S \right).$$

Esaminando più a fondo le cose, osserviamo che, indicando come di consueto con M la massa del pendolo, con l la lunghezza del pendolo matematico sincro, con a la distanza dell'asse di sospensione dal centro di gravità, con v la costante dipendente dalla elasticità del supporto, sarà

$\epsilon_i = \sigma \alpha_i$; ponendo $\sigma = \frac{agM}{vl}$. Il supporre pertanto $\frac{\epsilon_1}{l}, \frac{\epsilon_2}{l}$ prossimamente

uguali fra loro e al loro medio $\frac{\epsilon}{l}$ è lecito fino a che α_1 ed α_2 sono uguali e quindi, nell'ipotesi di amplitudini iniziali uguali, all'inizio del moto, ma non è più lecito quando tali amplitudini siano diverse tra loro e quindi, in proseguio di tempo, durante il moto, quando le reciproche perturbazioni delle ampiezze fanno sì che a_{21} si allontanano dalla unità. Nella espressione della elongazione comune alle due linee di appoggio non è dunque lecito mettere in evidenza $\frac{\epsilon}{l}$ sibbene solo $\frac{\sigma}{l}$: tale elongazione risulta quindi

$$(6) \quad E = \frac{\sigma}{l} \left\{ \alpha_1 \cos \pi \frac{t}{S_1} - \alpha_2 \cos \pi \frac{t}{S_2} \right\}.$$

Da questo punto in poi il procedimento del Lorenzoni per determinare la perturbazione della durata della oscillazione emmesima dopo il tempo o può essere seguito con le sole modificazioni imposte dalla diversa espressione di E. Al tempo $t = (m + \theta_1) S_1 = (m + \theta_1) \left(1 + \frac{\delta S}{S_2} \right) S_2$ con m intero, e $0 < \theta < 1$, $\delta S = S_2 - S_1$ risulta

$$E_{m+\theta} = \lambda (\mp 1) \cos \pi \theta_1 \pm \mu (\mp 1) \sin \pi \theta_1$$

ponendo

$$\lambda = \frac{\sigma}{l} \left\{ \alpha_1 - \alpha_2 \cos m\pi S_1 \frac{\delta S_1}{S_1 S_2} \right\}, \quad \mu = \frac{\sigma}{l} \alpha_2 \sin m\pi S_1 \frac{\delta S}{S_1 S_2}$$

e quindi

$$(7) \quad \Delta S_1^{(m+\theta)} = \frac{S_1}{2\alpha_1} \frac{\sigma}{l} \left\{ \alpha_1 - \alpha_2 \cos m\pi \frac{\delta S}{S_1 S_2} S_1 \right\} = \gamma \left(1 - a_{21} \cos m\pi \frac{S_1}{T} \right)$$

ponendo $T = \frac{S_1 S_2}{\delta S}$ e indicando con γ , come sopra si è detto, la perturbazione della durata per un solo pendolo. Alla (7) fa riscontro la formula analoga che da essa si otterrebbe per ΔS_2 scambiando fra loro i due indici. Tali due formule differiscono dalla (5) del Lorenzoni per la presenza del fattore a_{21} , a_{12} rispettivamente, e si vede agevolmente, introducendo la fase reciproca dei due pendoli, ed uno spostamento del suo zero, come esse coincidano con le (1) date dal Wenig-Meisnez.

L'introduzione della fase nelle relazioni dedotte dalla (5) già fu fatta dal Silva ⁽¹⁾ ponendo $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi \frac{\delta S}{S_2} (t - t_0)$, ma è forse opportuno

(1) È qui il luogo di far notare come già da molto tempo (cfr. *Relazioni delle osservazioni gravimetriche compiute nel 1913, Venezia 1914*) pervenne il SILVA ai risultati dati dallo SCHMEHL nella Nota, *Ueber ein einfaches Koinzidenzverfahren ecc.*, in « Tag. der Baltischen Geod. Comm. », Riga, 1927.

anche qui precisare: supponiamo i pendoli non rigorosamente equivalenti è quindi $\delta S \neq 0$, γ del comune ordine di grandezza (non superiore p. es. a $3 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$) e $\delta S \gg \gamma$, per la (3) la parte principale della variazione della fase nell'unità di tempo sarà $-\pi \frac{\delta S}{S^2}$ e precisamente quella che si avrebbe se non esistesse flessione del supporto. La presenza di tale flessione fa sì che l'uguaglianza $\varphi - \varphi_0 = -\pi \frac{\delta S}{S^2} (t - t_0)$ non sia legittima. Dalla (3) è però possibile dedurre uno sviluppo di $\varphi - \varphi_0$ per potenze positive di $(t - t_0)$ e si trova agevolmente

$$(8) \quad \varphi - \varphi_0 = -\pi \frac{\delta S}{S^2} (t - t_0) + \frac{\gamma}{\delta S} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) ((a_{12})_0 - (a_{21})_0) \\ + \text{termini in } \gamma^2 + \dots$$

Una così fatta espressione mostra che la sostituzione di $\varphi - \varphi_0$ a $-\pi \frac{\delta S}{S^2} (t - t_0)$ e viceversa (nel nostro caso è $t - t_0 = mS$) è lecita nella espressione di $\gamma \cos (\varphi - \varphi_0)$ a meno di termini in γ^2 anche per osservazioni lunghe, sempre che siano uguali le amplitudini iniziali. Lo stesso non può più dirsi se $(a_{21})_0 \neq (a_{12})_0$ per la presenza del fattore in $\frac{\gamma}{\delta S}$. La (2) e la (3) del resto dimostrano che anche per coppie di pendoli per cui sia $\delta S = 0$ se all'inizio del moto la fase reciproca è diversa da $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ e le amplitudini sono disuguali, e quando anche le amplitudini siano uguali e le fasi diverse da uno qualunque dei valori $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, si presenta, sia pur lentissima, una variazione della fase. Le fasi che si mantengono o che in generale tenderanno a stabilirsi nel moto dei due pendoli equivalenti sono appunto $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ cui corrisponde un massimo di variazione per il rapporto delle amplitudini. La fase $\frac{\pi}{2}$ è quella con cui si inizia il movimento del bipendolo quando si determina γ con il metodo di Borrass e non è qui il caso di insistere sulle relazioni che intercedono tra le circostanze suaccennate e le condizioni di applicazione di tale metodo, relazioni di cui del resto si occupa il Wenig-Meisnez. Stabilita così l'equivalenza della (7) e della prima delle (1) a meno del segno entro parentesi, che diverrà uguale se si assumerà come fase zero la fase uguale concorde, vediamo di confrontarla con (5). Mediante la (2) e la (3) si trova, indicando con φ_0 la fase corrispondente al tempo t_0

$$\begin{aligned}
 (9) \quad a_{21} \cos \varphi = (a_{21})_0 \cos \varphi_0 + \left[(a_{21})_0 \sin \varphi_0 \pi \frac{\delta S}{S^2} - \frac{\pi}{S^2} \gamma (a_{21})_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right] (t - t_0) - \\
 - \left[(a_{21})_0 \cos \varphi_0 \left(\pi \frac{\delta S}{S^2} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{S^2} \right)^2 \right] \left\{ \delta S \cdot \gamma \cdot (1 - 3 (a_{21})_0^2 \cos 2\varphi_0) - \gamma^2 ((a_{12})_0 - \right. \\
 \left. - (a_{21})_0^3 \cos 2\varphi_0) \right\} \frac{(t - t_0)^2}{2!} - \left[(a_{21})_0 \sin \varphi_0 \left(\pi \frac{\delta S}{S^2} \right)^3 - \left(\frac{\pi}{S^2} \right)^3 \right] \left\{ \delta S^2 \cdot \gamma \cdot 5 (a_{21})_0^2 \sin 2\varphi_0 + \right. \\
 \left. + \gamma^2 \delta S (4 (a_{21})_0 \sin \varphi_0 + 5 (a_{21})_0^3 \sin 3\varphi_0) + \text{termini in } \gamma^3 \right\} \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \\
 + \left[(a_{21})_0 \cos \varphi_0 \left(\pi \frac{\delta S}{S^2} \right)^4 + \dots \right] \frac{(t - t_0)^4}{4!} + \dots
 \end{aligned}$$

che è la serie usata dal Berroth e dallo Schmehl limitatamente ai termini del terzo ordine e per $\varphi_0 = \pi$. In ciascun termine della serie apparirà, dovuto alla parte di variazione di fase proveniente da δS , una espressione della forma

$$(-1)^i \cos \varphi_0 \left(\pi \frac{\delta S}{S^2} \right)^{2i} \frac{(t - t_0)^{2i}}{2i!}, \quad (-1)^i \sin \varphi_0 \left(\pi \frac{\delta S}{S^2} \right)^{2i+1} \frac{(t - t_0)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

a seconda della parità. Sommando per conto loro tali espressioni, con che nel caso comune di $|\delta S| \gg \gamma$ si prendono in considerazione tutti i termini di valore preponderante che potrebbero influire notevolmente sul valore del resto fermandosi ai termini del terzo ordine, la (9) diverrà, ponendo sotto il segno di coseno $\varphi - \varphi_0$ in luogo di $-\pi \frac{\delta S}{S^2} (t - t_0)$ e tenendo conto della uguaglianza $(a_{21})_0 = (a_{12})_0 = 1$ che supponiamo verificata

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \Delta S_1 = \gamma (1 - a_{21} \cos \varphi) = \gamma (1 - \cos \varphi) + \frac{\pi}{2 S^2} \gamma^2 \sin 2\varphi_0 (t - t_0) + \\
 + \left(\frac{\pi}{S^2} \right)^2 \gamma^2 \left\{ \delta S (1 - 3 \cos 2\varphi_0) + \gamma (1 - \cos 2\varphi_0) \right\} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \\
 + \left(\frac{\pi}{S^2} \right)^3 \gamma^2 \left\{ \delta S^2 5 \sin 2\varphi_0 + \gamma \delta S (4 \sin \varphi_0 + 5 \sin 3\varphi_0) \right\} \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots
 \end{aligned}$$

cui altra analoga si può aggiungere scambiando gli indici e i segni di φ_0 .

Al secondo membro di (5) dunque perchè l'uguaglianza sia legittima occorre aggiungere termini correttivi il cui valore è funzione della differenza delle durate di oscillazione, di γ , e del tempo che intercede fra l'inizio della oscillazione che si considera e l'inizio del moto, e di cui è facile pertanto assegnare l'ordine di grandezza.

È evidente intanto che nel caso di γ non superiore a $10^{-6} S$, di periodi di osservazione non superiori ad 1^h , e di differenze di durate di oscillazione sia pure di due o tre unità della quinta come si è sempre verifi-

cato per le misure bipendolari eseguite fino ad ora in Italia con l'apparato a mensola Mioni, nessuno dei termini correttivi, qualunque sia la fase iniziale e il numero d'ordine della oscillazione è da prendersi in considerazione perchè il suo apporto è inferiore ad una mezza unità della settima decimale, e la formula di Lorenzoni rimane perfettamente valida. In altre condizioni di osservazione occorrerebbe volta a volta esaminare i vari elementi di cui le correzioni sono funzione per stabilire quanti e quali termini, in (10), siano da prendersi in considerazione.

Agli effetti pratici, per altro, ciò che interessa si è la determinazione della correzione da attribuirsi non ad una ma alla media durata dedotta dalle osservazioni di n coincidenze dal tempo t_0 al tempo t vale a dire, come sopra si è detto,

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \Delta S_i dt$$

in cui a ΔS_i devono essere sostituite successivamente la sua espressione (10) e l'altra relativa al pendolo 2. In (10) il valore medio del primo termine può essere calcolato con il metodo usato dal Lorenzoni che dà

$$\gamma \left\{ 1 - \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{\varphi - \varphi_0 + k} \cos(\varphi_1 + \varphi_0) \right\}^{(1)}$$

(essendo K il numero dei periodi interi trascorsi al tempo t) e il valore medio dei termini correttivi, funzioni razionali intere di $(t - t_0)$, integrandoli appunto rispetto a t e dividendoli per $(t - t_0)$ il che porta per la perturbazione della durata media alla espressione

$$\begin{aligned} \overline{\Delta S_1} = & \gamma \left\{ 1 - \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{\varphi - \varphi_0 + k} \cos(\varphi_1 + \varphi_0) \right\} + \frac{\pi}{2S^2} \gamma^2 \sin 2\varphi_0 \frac{t - t_0}{2} - \\ & - \left(\frac{\pi}{S^2} \right)^2 \gamma \left\{ \delta S (1 - 3 \cos 2\varphi_0) - \gamma (1 - \cos 2\varphi_0) \right\} \frac{(t - t_0)^2}{3!} + \\ & + \left(\frac{\pi}{S^2} \right)^3 \gamma^3 \left\{ \delta S^2 5 \sin 2\varphi_0 + \dots \right\} \frac{(t - t_0)^3}{4!} + \dots \end{aligned}$$

e all'altra che da essa si deduce per $\overline{\Delta S_2}$, scambiando fra loro i segni di φ : i termini da prendersi in considerazione sono, come si è detto, da stabilirsi caso per caso e sono, ad ogni modo, evidenti le semplificazioni che si hanno apportando la correzione al pendolo medio della coppia.

È forse superfluo osservare che tutto quanto è detto sopra, come del resto anche i risultati di Schmehl, vale entro i limiti di applicabilità dei procedimenti di integrazione dell'equazione del bipendolo introdotti dal Fürtwangler.

(1) Cfr. SILVA, loc. cit., *Relazioni delle osservaz. grav. ecc.*, p. 12.

Oceanografia. — *Considerazioni teorico-sperimentali sul regime delle maree del Mare Adriatico* ⁽¹⁾. Nota I di M. TENANI, presentata ⁽²⁾ dal Socio L. PALAZZO.

1. — Nel corso del 1928 le RR. Navi *Tritone* e *Scilla* eseguirono sulla costa del Regno di Albania una serie di lavori idrografici che, fra l'altro, richiesero l'impianto temporaneo di due mareografi, a Durazzo e a S. Giovanni di Medua. Dalle registrazioni ottenute ho potuto ricavare le costanti armoniche della marea per queste due stazioni. Nell'esporre in questa Nota i risultati ottenuti, mi propongo di metterli in relazione con quelli già noti per altre località dell'Adriatico, inquadrandoli nello schema esplicativo delle maree di questo mare esposto dallo Sterneck nel 1919 ⁽³⁾ in base a considerazioni teoriche sulle osservazioni italiane e austroungariche allora note: per ben mettere in rilievo l'importanza di tale inquadramento e delle verifiche che ne conseguono riguardanti le suddette considerazioni teoriche, mi è necessario esporre per sommi capi il procedimento seguito per dedurre, in questo e in altri mari, lo schema esplicativo sopra accennato.

2. — Ricorderò come lo Sterneck fosse partito dalla constatazione, conforme del resto a quella enunciata qualche anno prima da lui stesso e dal Defant ⁽⁴⁾ in base però a dati meno completi, che le oscillazioni di marea dell'Adriatico sono dovute quasi esclusivamente ad oscillazioni indotte dal Mar Ionio attraverso il canale di Otranto: e che, ciò posto, partendo dalle equazioni differenziali del moto e della continuità (stabilite dal Lamb) cui debbono soddisfare le oscillazioni longitudinali in un canale comunicante ad una estremità con un mare a marea, egli aveva calcolato l'ampiezza relativa delle oscillazioni longitudinali aventi i periodi caratteristici delle varie componenti armoniche principali della marea in tutte le 40 sezioni trasversali in cui a tale scopo egli aveva suddiviso l'Adriatico. L'effettiva integrazione delle suddette equazioni avrebbe richiesto la conoscenza dei valori delle suddette ampiezze all'estremità meridionale del mare; in mancanza di tali valori, e cioè di osservazioni nelle immediate vicinanze del canale di Otranto, lo Sterneck era stato indotto a un ingegnoso artificio: approfittando infatti della constatata esistenza di una sezione ventrale delle oscillazioni longitudinali semidiurne all'altezza di Comisa, Pelagosa, Ragusa e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Idrografico della R. Marina, in Genova.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) R. von STERNECK, *Die Gezeitenerscheinungen in der Adria* (parte II) «Denkschriften der Akad. der Wiss. in Wien, Math. Natur-wiss. Klasse», vol. 96, p. 277, 1919.

(4) A. DEFANT, «*Annalen der Hydrographie*», ecc., 1914.

Meljine, ove pertanto si annullano le oscillazioni trasversali di cui diremo oltre, aveva cercato di scegliere le costanti d'integrazione in modo da mettere d'accordo in tale sezione le ampiezze delle oscillazioni longitudinali semidiurne calcolate, con quelle osservate: per le oscillazioni diurne si era regolato, nell'insufficienza dei dati osservati, in base ai rapporti teorici che l'analisi delle forze di marea lascia prevedere tra le ampiezze delle varie componenti.

Scelte così le dette costanti, egli aveva proceduto al calcolo delle ampiezze, che diremo *teoriche*, delle varie componenti armoniche delle oscillazioni longitudinali.

Considerando poi l'effetto deviatorio della rotazione terrestre sui movimenti assiali dell'acqua richiesti dalle calcolate oscillazioni longitudinali, egli era passato al calcolo delle oscillazioni trasversali, e cioè della loro ampiezza alle varie distanze dell'asse longitudinale del mare, in tutte le suddette sezioni.

Le oscillazioni trasversali così calcolate sono evidentemente sfasate di un quarto del periodo da quelle longitudinali: componendosi quindi con le longitudinali, danno luogo a oscillazioni risultanti, sfasate rispetto a quelle longitudinali di un angolo che è agevole calcolare in base al rapporto tra le ampiezze longitudinali e le ampiezze trasversali che le compongono: se il calcolo era esatto, le situazioni osservate nei vari luoghi (risultanti) per le varie componenti armoniche, corrette dell'angolo così dedotto, avrebbero dovuto fornire la situazione delle onde longitudinali e quindi la situazione delle varie componenti all'estremità meridionale del mare, nel Canale di Otranto. Le situazioni che parvero allo Sterneck le più sicure per eseguire il detto calcolo furono quelle calcolate in base a un anno di osservazioni per Pola e da queste trasse appunto le situazioni delle onde longitudinali che gli servivano per decomporre, con processo inverso a quello ora descritto, le ampiezze *osservate* nelle loro componenti longitudinali e trasversali ed effettuarne il confronto coi valori teorici calcolati.

3. - Tale verifica ebbe esito molto soddisfacente: sia le ampiezze teoriche, sia quelle dedotte nel modo ora detto dalle oscillazioni osservate, davano una conferma quantitativa molto brillante dell'anfidromia semidiurna già notata dal Grablovitz e dal padre dello Sterneck, il Generale R. von Sterneck, con centro sulla linea nodale delle oscillazioni longitudinali semidiurne che attraversa il mare a sud di Ancona: ma la conferma più sicura delle induzioni così fatte e così ardue, specie per quanto riguarda il calcolo delle oscillazioni trasversali e delle diurne, non poteva naturalmente avvenire in modo migliore che dal confronto, ora possibile, colle osservazioni effettuate nella parte più meridionale del mare.

4. - Le osservazioni da me utilizzate furono:

una serie di 29 giorni per Durazzo, ove il mareografo venne impiantato dalla R. N. *Tritone* sul lato di levante del pontile in legno; i giorni

considerati vanno dalle ore 0 (T M E C) del 30 maggio, alle ore 23 del 27 giugno 1928.

una serie di 15 giorni per S. Giovanni di Medua, ove il mareografo venne impiantato dalla R. N. *Scilla* alla testata del pontile in legno; i giorni considerati vanno dalle ore 0 (T M E C) del 29 aprile, alle ore 23 del 4 maggio 1928.

Ambedue i mareografi erano del tipo Richard, a cambiamento giornaliero dei diagrammi e in ambedue i casi la deduzione delle costanti armoniche venne effettuata col procedimento di Doodson ⁽¹⁾.

Le costanti ottenute sono le seguenti:

		M ₂	S ₂	N ₂	K ₂	K ₁	O ₁	P ₁	M ₄	MS ₄
Durazzo . . .	H = cm.	9.3	5.5	0.6	[1.5]	5.0	1.4	[1.6]	0.1	0.2
	g =	102°	104°	123°	[104°]	48°	27°	[48°]	105°	337°
S. Giov. di Medua	H = cm.	9.3	5.1	1.5	[1.4]	5.3	0.4	[1.7]	0.2	0.2
	g =	108°	106°	144°	[106°]	42°	352°	[42°]	198°	337°

La definizione della costante g qui adottata, e indicata secondo le notazioni del Tidal Institute, Liverpool ⁽²⁾, è la seguente: se x è, secondo le notazioni di Darwin raccomandate dalla Comm. delle Maree della Sez. Oceanografica del Cons. Int. delle Ricerche, la differenza tra la fase della componente di marea e quella della componente corrispondente delle forze attrattive nel medesimo luogo, l'argomento F della componente di marea in un istante qualunque, corrispondente a T ore di Grw., a $x = T + \lambda^{\circ}/15$ ore locali e a $y = T + S^{\circ}/15^{\circ}$ ore del meridiano dell'ora comune cui si intendono riferire per il confronto tutte le stazioni di una regione (nel nostro caso $S^{\circ} = 15^{\circ}$ E. Grw.), è, come è noto, fornito dalla seguente espressione (ove indichiamo in generale con A_t° l'argomento della componente delle forze attrattive all'ora t pel meridiano di Greenwich, con v° la velocità oraria della componente stessa, con p l'indice della componente di marea, ossia il numero delle sue alte maree durante un giorno solare e con C° la correzione di A_t° per la longitudine λ° della località):

$$F = A_x^{\circ} + C^{\circ} - x = A_y^{\circ} - v^{\circ}(y - x) + C^{\circ} - x = A_y^{\circ} - g$$

ove si è dunque posto:

$$g = x + v^{\circ}(S^{\circ} - \lambda^{\circ})/15 - C^{\circ};$$

essendo, come è noto, $C = (v^{\circ} - p \cdot 15^{\circ})\lambda^{\circ}/15$, si ha: $g = x + p\lambda^{\circ} - v^{\circ}S^{\circ}/15^{\circ}$, contando λ° e S° come positive verso E.

(1) A. T. DOODSON, « Phil. Trans. R. Soc. London A », 227, 1928.

(2) Vedi DOODSON, op. cit., p. 264; vedi anche « Bulletin Hydrographique du Bureau Hydrographique International », Monaco 1928, p. 210.

Si vede che in tutte le località che hanno uguale g per una determinata componente, l'alta marea avviene nel medesimo istante e cioè all'ora y del meridiano S° per cui $A_y = g$.

Non ho trovato nelle Memorie dello Sterneck l'esatta definizione della costante k' da lui usata; ma alcuni calcoli di verifica mi hanno convinto che, secondo le notazioni precedenti, si avrebbe

$$k' = x + v^\circ S^\circ - \lambda^\circ / 15^\circ;$$

si tratterebbe insomma della costante indicata con x nell'opera ultimamente citata. Per una regione di limitata estensione come l'Adriatico C è praticamente uguale per tutti i luoghi e molto piccola: ambedue le definizioni permettono bene il confronto dei valori. Ciò non è più rigoroso per una regione come l'Oceano Artico⁽¹⁾ ove λ varia da 0 a 360° .

Le costanti di K_2 e P_1 sono poste fra parentesi quadre perchè la lunghezza della serie osservata richiedeva di assumere *a priori* i loro g rispettivamente uguali a quelli di S_2 e K_1 .

Le costanti armoniche sopra esposte saranno ora utilizzate per le verifiche, di cui è detto sopra, delle deduzioni teoriche riguardanti l'estremità meridionale dell'Adriatico.

Fisica. — *Sulla teoria quantistica delle frange di interferenza.*
Nota di E. FERMI, presentata⁽²⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

In questo lavoro viene svolta, in base alla teoria di Dirac dell'irraggiamento, la teoria di un fenomeno di interferenza, e, precisamente, delle frange di Lippmann. Si vede dal procedimento che lo stesso metodo potrebbe applicarsi in generale alla trattazione di qualsiasi fenomeno di interferenza. Il risultato coincide con quello della teoria elettromagnetica classica.

Il punto di vista fondamentale della teoria di Dirac⁽³⁾ dell'irraggiamento, consiste nel trattare un atomo che emette oppure assorbe luce, e la radiazione nello spazio come un unico sistema, che ha come coordinate, oltre alle coordinate dell'atomo, anche certe altre variabili che servono a specificare i valori dei potenziali del campo elettromagnetico in ogni punto dello spazio. Se, per semplificare la considerazione, pensiamo la radiazione racchiusa entro una cavità, sappiamo che la radiazione potrà vibrare soltanto secondo certe frequenze caratteristiche, dipendenti dalla forma e dalle dimensioni della cavità. Si possono allora prendere come coordinate del campo

(1) R. von STERNECK, « Annalen der Hydrographie », ecc., III, 1928, p. 81.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(3) P. A. M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », 114, pp. 243, 710; 1927.

di radiazione, per ciascuna vibrazione fondamentale, il valore del campo elettrico istantaneo in uno dei ventri, oppure una grandezza ad esso proporzionale, per modo che per ogni frequenza fondamentale si ha una coordinata. Se si fanno allontanare all'infinito le pareti della cavità le vibrazioni fondamentali della radiazione finiscono per tendere a certe distribuzioni asintotiche, in modo che, al limite, cessa ogni influenza delle pareti della cavità sopra il fenomeno e ci si riconduce al caso dello spazio libero.

È noto che la teoria di Dirac rende conto in modo soddisfacente di tutto il gruppo di fenomeni connessi con gli scambi energetici tra la luce e la materia (emissione, assorbimento, vita media degli atomi, fenomeni di dispersione, ecc. . .). Essa invece deve essere in qualche modo integrata per rendere conto anche dell'azione che esercitano tra di loro due atomi vicini o due elettroni dello stesso atomo (propagazione dell'azione per potenziali ritardati, ecc. . .). Un tentativo di perfezionare la teoria di Dirac in questo senso è stato da me fatto in una Nota recente pubblicata in questi « Rendiconti ». Senza occuparmi di questo raffinamento della teoria vorrei far vedere in questa Nota, sopra un esempio concreto, che la teoria di Dirac rende conto anche dei fenomeni di interferenza; per modo che si può ben dire che essa comprende in sé tutte le proprietà dell'irradiazione.

Il criterio in base al quale si può costruire una teoria dell'interferenza è il seguente. Gli elementi del problema sono: un atomo emittente, A, che funziona da sorgente di luce; un interferometro, che possiamo, schematicamente, pensare costituito da un insieme di schermi opachi, di superficie riflettenti, oppure che delimitino mezzi di differente indice di rifrazione; infine un altro atomo B che, assorbendo più o meno intensamente la luce emessa da A, ci indica in quali regioni dello spazio la radiazione emessa da A arriva con intensità maggiore (frange chiare) e in quali punti essa arriva con intensità minore (frange oscure). Naturalmente, secondo il criterio fondamentale della teoria di Dirac, i due atomi A e B e il campo di radiazione dovranno venir considerati come un unico sistema, che deve venir trattato con i metodi della meccanica quantistica.

Consideriamo dapprima il caso che non ci sia l'interferometro. Supponiamo che, all'istante iniziale, l'atomo A sia eccitato e l'atomo B sia invece nello stato fondamentale; supporremo infine che, all'istante iniziale, non vi sia radiazione nello spazio circostante ai due atomi. Si trova allora che l'effetto dell'interazione tra i due atomi e il campo di radiazione è il seguente. Supponiamo che sia trascorso, dall'istante iniziale, un certo tempo t grande in confronto alla vita media dell'atomo A, in modo che sia praticamente nulla la probabilità che esso sia ancora eccitato. Si trova allora che se $t < \frac{r}{c}$ (r essendo la distanza tra i due atomi A e B) l'energia perduta dall'atomo A diseccitandosi si ritrova certamente in una delle com-

ponenti armoniche della radiazione. Se invece $t > \frac{r}{c}$ vi è sempre una certa probabilità di trovare l'energia perduta da A in una delle componenti della radiazione; vi è però anche una certa probabilità (inversamente proporzionale ad r^2) di non trovare energia di radiazione e di trovare invece eccitato l'atomo B. Come si vede in questi risultati che, per ristrettezza di spazio, non possiamo qui dimostrare, è contenuta la teoria della propagazione della luce con velocità eguale a c .

Dobbiamo ora analizzare quale influenza è esercitata, sopra il sistema costituito dai due atomi A e B e dalla radiazione, dalla presenza dell'interferometro. Osserviamo per questo che le vibrazioni fondamentali della radiazione racchiusa entro una cavità vengono alterate dalla presenza in essa di superficie riflettenti o rifrangenti, schermi, ecc. . . ; in modo che, mentre, nel caso che non vi sia l'interferometro, si possono prendere come vibrazioni fondamentali delle onde stazionarie piane, ciò non è più lecito quando vi sia l'interferometro, poichè verranno introdotte delle particolari condizioni ai limiti sulle superficie dei pezzi ottici che lo costituiscono.

Per svolgere la teoria sopra un esempio il più possibile semplice, vogliamo riferirci al caso delle frange di Lippmann che si formano per interferenza tra le onde luminose che arrivano sopra uno specchio piano e quelle che vengono riflesse all'indietro dallo specchio. Dovremo dunque considerare il sistema costituito da un atomo emittente, un atomo assorbente e la radiazione contenuta entro una cavità una delle cui pareti è costituita dallo specchio la cui presenza dà origine alle frange di Lippmann; dovremo poi passare al limite allontanando a distanza infinita tutte le pareti della cavità, ad eccezione, naturalmente, di quella costituita dallo specchio, che resta invece fissa.

Prendiamo un sistema di assi x, y, z in modo che gli assi y e z si trovino nel piano dello specchio. Per semplicità supporremo che i due atomi A e B si trovino tutti e due sull'asse delle x ; siano x e x' le loro ascisse. Ammetteremo anche che le direzioni di vibrazione dei due atomi, almeno per quanto riguarda gli stati quantici che ci interessano, coincidano con la direzione y .

Indichiamo con n ed n' i numeri che caratterizzano gli stati quantici dei due atomi e con $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s, \dots$ i numeri che caratterizzano gli stati quantici delle diverse componenti armoniche della radiazione. La funzione di Schroedinger sarà in generale una combinazione lineare

$$\Psi = \sum a_{nn' n_1 n_2 \dots n_s \dots} \psi_{nn' n_1 n_2 \dots n_s \dots}$$

delle funzioni corrispondenti agli stati quantici $n, n', n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$. I quadrati dei moduli delle a ,

$$|a_{nn' n_1 n_2 \dots n_s \dots}|^2$$

rappresentano la probabilità che i due atomi si trovino negli stati n ed n' e le diverse componenti di radiazione negli stati $n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$

Se non vi fosse interazione tra i due atomi e il campo di radiazione, le a sarebbero costanti. L'interazione ha invece per effetto che le a cessano di essere costanti ma vengono a dipendere dal tempo, soddisfacendo alla equazione differenziale

$$(1) \quad \dot{a}_n = \frac{2\pi i}{h} \sum_m H_{nm} a_m.$$

(Per semplicità tutti gli indici delle a sono stati riassunti con una sola lettera, n oppure m); H_{nm} sono gli elementi della matrice di perturbazione che rappresenta l'interazione tra i due atomi e la radiazione. Le equazioni differenziali (1) permettono di determinare i valori delle a conoscendo i loro valori iniziali.

Supporremo che inizialmente l'atomo A sia, eccitato nello stato quantico 2 ($n = 2$), invece l'atomo B si trovi nello stato fondamentale $n' = 1$; supporremo inoltre che inizialmente non vi sia radiazione nel campo, cioè $n_1 = n_2 = n_3 = \dots n_s = \dots = 0$. Ciò vuol dire che all'istante iniziale $t = 0$. Si può porre:

$$(2) \quad a_{2,1,0,0,\dots,0,\dots} = 1$$

e tutte le altre a eguali a zero; poichè è certo che, all'istante iniziale, i due atomi e la radiazione si trovano rispettivamente negli stati 2, 1, 0, 0, \dots , 0, \dots .

Se non vi fosse la perturbazione dovuta all'interazione, questa situazione non muterebbe col tempo. L'effetto della perturbazione rende invece, come si è detto, le a dipendenti dal tempo, per modo che alcune delle a che hanno valore iniziale nullo, possono, dopo un certo tempo, avere valore diverso da zero.

A noi interessa particolarmente di conoscere, in funzione del tempo, il valore della grandezza

$$a_{1,2,0,0,\dots,0,\dots}$$

poichè il quadrato del suo modulo rappresenta la probabilità che il primo atomo si sia diseccitato, passando dallo stato $n = 2$ allo stato $n = 1$, e che la energia da lui emessa sia stata assorbita dal secondo atomo il quale sia passato così dallo stato $n' = 1$ allo stato $n' = 2$.

Ci manca lo spazio per sviluppare qui il calcolo di $a_{1,2,0,0,\dots,0,\dots}$, in base alle equazioni differenziali (1) e alle condizioni iniziali (2). Dobbiamo qui limitarci a indicare il risultato, riservandoci di tornare in altro luogo sopra questo argomento. Ammettendo per semplicità che il primo atomo A abbia una vita media brevissima, e che invece la vita media del secondo atomo B sia lunghissima, si trova

$$(3) \quad a_{1,2,0,\dots,0,\dots} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_1 \\ -\frac{1}{x-x'} \frac{16\pi^1 e^2}{c^2 \hbar} \frac{\nu Q \nu' Q'}{2\pi i (\nu' - \nu) + \frac{1}{2\tau}} e^{\frac{2\pi i \nu' (x-x')}{c}} & \text{per } t_1 < t < t_2 \\ -\frac{16\pi^1 e^2}{c^2 \hbar} \frac{\nu Q \nu' Q'}{2\pi i (\nu' - \nu) + \frac{1}{2\tau}} \left[\frac{1}{x-x'} e^{\frac{2\pi i \nu' (x-x')}{c}} - \frac{1}{x+x'} e^{\frac{2\pi i \nu' (x+x')}{c}} \right] & \text{per } t > t_2. \end{cases}$$

In questa equazione ν e ν' sono le frequenze delle righe emesse dai due atomi nel salto quantico tra gli stati 2 ed 1. Q e Q' sono due grandezze il cui quadrato è proporzionale all'intensità con cui i due atomi emettono le dette righe (propriamente Q e Q' sono gli elementi 2, 1 delle matrici che rappresentano la componente y del momento elettrico dei due atomi), τ è la vita media dell'atomo A. τ per ipotesi è molto piccolo, e quindi la riga emessa dal primo atomo è molto larga; invece, essendo la vita media del secondo atomo assai lunga, la riga che esso è capace di assorbire è assai stretta. Abbiamo posto infine nell' (3)

$$(4) \quad t_1 = \frac{x-x'}{c} \quad ; \quad t_2 = \frac{x+x'}{c}$$

per modo che t_1 rappresenta l'istante in cui un'azione, partita da A all'istante 0 con velocità c , arriva in B; e t_2 rappresenta l'istante in cui essa vi ritorna dopo essersi riflessa sopra lo specchio.

Rileviamo dalla formula (3) che, fino all'istante t_1 , l'atomo B si eccita. Tra gli istanti t_1 e t_2 esso ha una certa probabilità di essere eccitato (questo effetto, classicamente, si interpreta come effetto dell'onda proveniente direttamente dall'atomo emittente A). Dopo l'istante t_2 la probabilità che l'atomo B sia eccitato viene di nuovo bruscamente a variare e può, secondo i casi, aumentare o diminuire (effetto dell'onda, partita da A, che ritorna in B dopo la riflessione sopra lo specchio).

Se consideriamo, ciò che praticamente interessa, un istante successivo a t_2 , per il quale è dunque applicabile la terza delle formule (3), riconosciamo subito che la probabilità di eccitazione dell'atomo B, dipende notevolmente dalla sua distanza x' dal piano dello specchio. Si vede immediatamente che le massime probabilità di eccitazione si hanno quando i due fattori esponenziali $e^{\frac{2\pi i \nu' (x+x')}{c}}$ hanno fase opposta, cioè quando

$$2\pi n + \pi = \frac{2\pi \nu' (x+x')}{c} - \frac{2\pi \nu' (x-x')}{c} = \frac{4\pi \nu'}{c} x' \quad (n = \text{numero intero})$$

ossia quando

$$x' = \frac{\lambda'}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Queste posizioni corrispondono, anche classicamente, ai ventri delle onde stazionarie. Similmente si trova che i nodi, in cui la probabilità di eccitazione dell'atomo B è minima, corrispondono invece alle posizioni

$$x' = \frac{\lambda'}{2} n.$$

Si ritrovano così in modo completo i risultati che dà in questo caso la teoria classica dell'interferenza.

Fisica. — *Sul potere emissivo totale del bismuto.* Nota di W. DEL REGNO, presentata⁽¹⁾ dal Socio M. CANTONE.

Dalla teoria elettromagnetica della luce, Planck, Hagen e Rubens, hanno ricavata la relazione

$$(1) \quad e_{\lambda} = 1 - r_{\lambda} = 0.365 \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} - 0.667 \frac{\rho}{\lambda} + \dots$$

che permette di conoscere per via teorica il potere riflettente ed il potere emissivo monocromatico di una sostanza qualsiasi in funzione della sua resistenza elettrica specifica. Tutta una serie di lavori sperimentali, classici quelli di Hagen e Rubens, dimostrano che l'accordo fra valori teorici e valori sperimentali è soddisfacente nel caso di radiazioni di grande lunghezza d'onda.

Sostituendo nella espressione che dà il potere emissivo totale di una sostanza

$$e = \frac{\int_0^{\infty} e'_{\lambda} e_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} e'_{\lambda} d\lambda}$$

ad e_{λ} la (1) e ad e'_{λ} la relazione di Planck sulla legge di distribuzione dell'energia nello spettro del corpo nero, Aschkinass⁽²⁾ e Foote⁽³⁾, più recentemente Davisson e Weeks⁽⁴⁾, hanno ricavate le seguenti relazioni:

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) ASCHKINASS, « Ann. d. Physik », 17, 960, 1905.

(3) FOOTE, « Bureau of standards », vol. II, n. 4, 1915.

(4) DAVISSON e WEEKS, « Journal of the optical. Soc. Am. », 8, 1924.

$$e = 0.5736 (\rho T)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Aschkinass})$$

$$e = 0.5736 (\rho T)^{\frac{1}{2}} - 0.1769 (\rho T) \quad (\text{Foote})$$

$$e = 0.576 (\rho T)^{\frac{1}{2}} - 0.178 (\rho T) + 0.044 (\rho T)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Foote, Davisson e Weeks})$$

$$e = 0.751 (\rho T)^{\frac{1}{2}} - 0.632 (\rho T) + 0.670 (\rho T)^{\frac{3}{2}} - 0.607 (\rho T)^2 \quad (\text{Davisson e Weeks}).$$

che permettono di determinare il potere emissivo di una sostanza qualsiasi per via teorica in funzione della temperatura assoluta e della resistenza elettrica specifica.

Mentre numerosi sono stati i lavori intesi a dare conferma sperimentale ai risultati della teoria per l'emissione monocromatica, assai scarsi sono i lavori che hanno avuto come scopo la verifica della teoria per l'emissione totale. Dei dodici metalli studiati solo per uno, il platino, si ha un buon numero di determinazioni con risultati concordanti: per gli altri si hanno solo poche determinazioni con scarso accordo fra i vari autori. Dall'insieme dei risultati ottenuti si ricava che la relazione teorica è con approssimazione verificata: per i metalli come l'alluminio, lo zinco, il platino, il nichel, i valori sperimentali sono un po' maggiori di quelli teorici, mentre per il piombo, l'argento, l'oro, sono un po' inferiori: questi due ultimi metalli anzi presentano una vera anomalia inquantochè solo per essi non è valida la deduzione teorica che ad una maggiore resistenza specifica corrisponda un maggior potere emissivo.

Queste deduzioni attendono conferme ed ulteriori contributi da nuovi studi su nuove sostanze, in intervalli di temperatura più ampi, che interessino tratti della curva teorica finora non ancora sottoposti a controllo.

Nella presente Nota sono indicati i risultati di una ricerca eseguita sul bismuto sostanza di cui si ignora la legge di emissione dedotta sperimentalmente.

Lo studio dell'emissione a basse temperature non è agevole per la difficoltà di disporre di un ricevitore di conveniente sensibilità.

Il pirometro di Fery funzionante da ricevitore, che dà buoni risultati per temperature alte, si dimostra insufficiente per temperature basse malgrado sia accoppiato ad un galvanometro di alta sensibilità e di piccolissima resistenza interna (circa 3 ohm). Ho cercato di migliorare la sensibilità eliminando l'assorbimento dovuto alla lente di fluorina impiegando un pirometro catottrico costruito nell'Istituto. Con questa sostituzione si ha difatti un notevole vantaggio perchè la sensibilità di questo ricevitore risulta cinque volte quella del ricevitore diottrico: ciò malgrado non poteva essere sufficiente per molte delle ricerche che mi proponevo. Ho potuto disporre

della sensibilità conveniente solo impiegando opportunamente una pila superficiale termoelettrica del tipo più recente dovuta al Moll.

Per il riscaldamento della lamina mi sono servito di un forno elettrico a tubo orizzontale con la lamina al centro e ciò perchè con questo metodo si può essere sicuri dell'uniformità di temperatura di tutta la lamina, temperatura che inoltre si può misurare con grande esattezza ponendo quasi a contatto della lamina, posteriormente, la saldatura di una pinza Le Chatelier.

A questo metodo potrebbe farsi l'appunto che sul ricevitore arrivi non solo l'energia emessa dalla lamina ma anche un po' dell'energia emessa dalle pareti del forno e riflessa dalla lamina. A rendere minima, se non del tutto trascurabile, questa causa di errore, ho sostituito al comune forno a

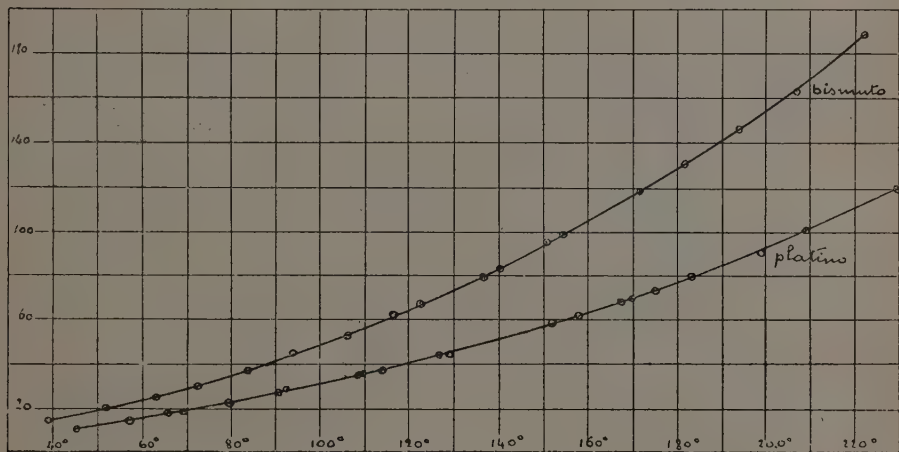


Fig. 1.

tubo, lungo 60 cm., un forno delle stesse dimensioni come bocca di emissione ma di lunghezza ridottissima, soli cm. 17.

La riduzione della lunghezza dei forni elettrici a resistenza naturalmente porta una riduzione della lunghezza della zona isoterma centrale: ciò poteva nel mio caso rendere illusorio il vantaggio che mi proponevo di ottenere impiegando questo metodo di riscaldamento. Con uno studio preliminare venne determinata la lunghezza della zona isoterma del forno e studiato il mezzo come estenderla: nel forno impiegato si poteva essere sicuri della uniformità di riscaldamento della lamina.

Riserbandomi di indicare in una prossima Nota i particolari del dispositivo sperimentale unitamente ai risultati per alcuni metalli sottoposti ad esame, dò i risultati relativi al bismuto.

Lo studio è stato fatto nell'intervallo 40°-250°, ma ad eliminare ogni dubbio che possa nascere dal fatto che si operava nell'aria si considerano

solo i risultati relativi all'intervallo 40°-210° nel quale nessuna traccia di ossidazione venne osservata, intervallo più che sufficiente per lo scopo che mi proponevo con questa ricerca.

Le determinazioni venivano fatte a temperatura rigorosamente costante e ripetute più volte: in media non si riusciva ad eseguire più di tre determinazioni nelle dodici ore. Nella fig. 1 si riportano i grafici di una delle serie eseguite: il confronto, per ottenere il potere emissivo, è stato eseguito prendendo come riferimento l'emissione del platino. Nella tabella che segue sono indicate solo tre delle diverse serie di misure eseguite in condizioni di diversa sensibilità: *d* indica la deviazione galvanometrica.

TABELLA I.

BISMUTO					PLATINO				
temp.	<i>d</i>	temp.	<i>d</i>		temp.	<i>d</i>	temp.	<i>d</i>	
	1 ^a sens.		1 ^a sens.	2 ^a sens.		1 ^a sens.		1 ^a sens.	2 ^a sens.
38°.1	13.0	41°.65	14.0	35.2	45°.0	10.0	43°.1	8.0	23.5
52°.5	18.0	51°.25	17.0	39.8	65°.6	17.4	57°.2	12.9	35.0
63°.1	24.0	63°.80	23.8	62.0	92°.0	28.0	69°.4	17.5	50.5
84°.1	36.0	75°.60	29.0	82.0	109°.4	35.2	79°.4	21.5	59.0
94°.1	41.0	88°.80	38.0	108.0	113°.3	35.6	90°.6	26.0	74.0
106°.9	51.0	104°.70	48.0	132.0	126°.1	43.6	108°.0	34.0	96.0
116°.9	62.0	122°.50	63.2	180.0	151°.8	58.0	128°.0	43.0	124.0
122°.8	66.0	141°.60	78.6	216.0	169°.7	70.8	153°.15	56.0	164.0
136°.9	78.0	151°.0	—	248.0	208°.7	96.0	157°.90	60.0	172.0
140°.5	82.0	165°.10	—	290.0	233°.3	122.8	174°.80	72.0	210.0
150°.5	95.0	165°.80	102.0	—	251°.4	142.0	198°.60	88.5	256.0
172°.1	116.0	170°.20	—	307.0	—	—	230°.60	121.0	341.0
193°.4	145.0	171°.10	119.0	—	—	—	249°.7	138.0	386.0
221°.5	188.0	191°.65	132.0	369.0	—	—	—	—	—
—	—	192°.80	134.0	381.0	—	—	—	—	—
—	—	195°.0	135.6	392.0	—	—	—	—	—
—	—	209°.6	156.0	442.0	—	—	—	—	—

Dall'insieme dei risultati ottenuti ho ricavato i valori dell'emissione del bismuto che sono indicati nella figura 2: nella stessa figura sono tracciate le curve con i valori teorici calcolati con le formole indicate, valori

che sono riportati nel seguente specchietto: per ρ si sono assunti i valori ottenuti da Hidseo Tsutsumi⁽¹⁾.

t	Aschkinass	Foote	Foote, Davis- son e Weeks	Davisson e Weeks
50°	0.112	0.112	0.112	0.133
100°	0.135	0.132	0.132	0.155
150°	0.153	0.151	0.152	0.175
200°	0.171	0.171	0.172	0.196
250°	0.189	0.194	0.197	0.219

Dal confronto si rileva che il bismuto non segue l'andamento teorico: il potere emissivo determinato per via sperimentale risulta di molto più

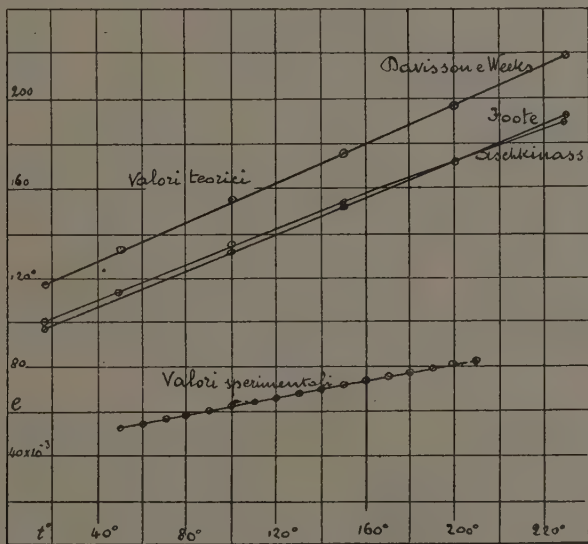


Fig. 2.

piccolo e quindi più grande il potere riflettente in confronto ai valori previsti dalla teoria.

L'esame della tabella precedente dimostra che il terzo termine che Davisson e Weeks aggiungono alla formola di Foote, nel nostro caso non

(1) H. TSUTSUMI, « Science Reports of Tôhoku Imperial University », vol. VII, n. 2, 1918.

ha influenza apprezzabile e la stessa influenza praticamente trascurabile ha il secondo termine del Foote nella formola dell'Aschkinass quando ci si riferisca all'intervallo 40° - 210° . I valori invece che si hanno applicando la formola di Davisson e Weeks e che sono in generale un po' maggiori di quelli che si hanno con le altre formole, nel caso del bismuto, malgrado la bassa temperatura di fusione di questo metallo, si scostano di non poco da quelli ottenuti con la formola di Foote e ciò a causa dell'alto valore della resistenza specifica del bismuto.

Per tale alto valore della resistenza specifica i valori di ρT sono maggiori di quelli che si hanno per gli altri metalli studiati: col bismuto si

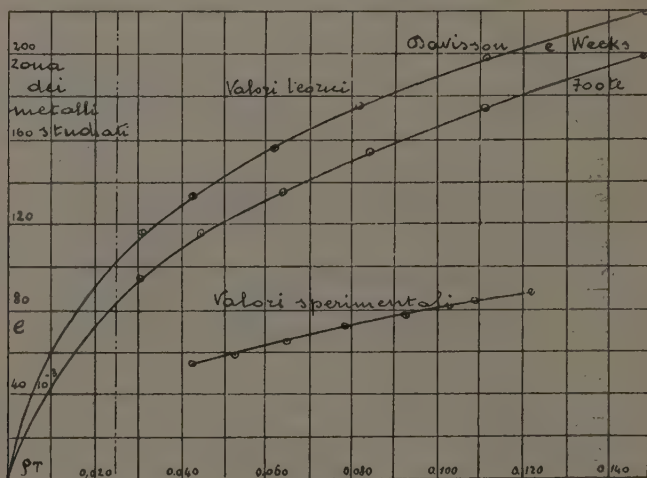


Fig. 3.

viene quindi ad esplorare un tratto nuovo della curva teorica come si rileva dalla fig. 3.

Formulando i valori teorici del Foote ed i valori sperimentali da me ottenuti con la relazione del tipo

$$e = KT^m$$

con la quale si esprimono i poteri emissivi delle varie sostanze abbiamo

$$\text{valore teorico} \quad e = 19.54 \cdot 10^{-5} \cdot T^{1.099}$$

$$\text{valore sperimentale} \quad e = 8.28 \cdot 10^{-5} \cdot T^{1.116}$$

e per $E = \sigma T^4$ emissione totale della sostanza

$$\text{valore teorico} \quad E = 11.2 \cdot 10^{-16} \cdot T^{5.099}$$

$$\text{valore sperimentale} \quad E = 4.769 \cdot 10^{-16} \cdot T^{5.116}$$

È molto probabile che i due valori, teorico e sperimentale, dell'esponente della T siano uguali: la differenza fra valori teorici e valori sperimentali sarebbe dovuta unicamente alla diversità del coefficiente K coefficiente che è funzione della resistenza specifica. Il potere riflettente maggiore di quello teorico sta ad indicare che al fenomeno della riflessione sul bismuto non partecipano solo gli elettroni liberi ma anche quelli degli atomi, cioè del reticolo, e che questo contributo è notevole.

Fisica. — *Di un confronto fra le variazioni col campo magnetico del coefficiente di Hall, del potere termoelettrico e della resistenza nel bismuto ordinario e nel bismuto compresso*⁽¹⁾. Nota di R. FEDELE, presentata⁽²⁾ dal Socio A. LO SURDO.

I tentativi finora fatti per spiegare le variazioni col campo magnetico del coefficiente di Hall, del potere termoelettrico e della resistenza, partendo dalla teoria elettronica, sono riusciti tutti infruttuosi. Con la teoria dualistica, infatti, si è pervenuti soltanto ad alcune relazioni tra effetto Hall e variazioni di resistenza col c. m.⁽³⁾, e l'ipotesi di La Rosa⁽⁴⁾, sulla variazione della concentrazione elettronica col campo, mentre conduce ad una formula che lega la variazione di resistenza con quella del potere termoelettrico (che sembra verificata sperimentalmente) d'altra parte però le conseguenze che da essa derivano per quanto riguarda un confronto tra le variazioni del potere termoelettrico e quelle analoghe dell'effetto Hall, sono in patente contraddizione con i risultati sperimentali⁽⁵⁾.

L'insuccesso riportato dalle due teorie nel tentativo di spiegazione dell'influenza del campo magnetico sui fenomeni in esame potrebbe imputarsi al fatto che non si è tenuto conto delle modificazioni di struttura che potrebbero verificarsi nel metallo per opera del campo magnetico. È infatti evidente che se modificazioni in tal senso esistono esse possono essere tali da influire notevolmente sulle variazioni che stiamo considerando. Queste, per conseguenza, non si potrebbero prestare ad un confronto fra le due teorie, non solo, ma nessun'altra teoria della conducibilità elettrica potrebbe riuscire a collocare in maniera soddisfacente le tre variazioni. È dunque una necessità importante accertarsi se sui tre fenomeni influisce o no un cambiamento

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Fisica della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(3) CORBINO O. M., *Variazioni di resistenza, ecc.*, «N. C.», [6], 16, p. 185, 1918.

(4) LA ROSA, *Un confronto fra la teoria elettronica e l'esperienza*, «N. C.», [6], 18, p. 39, 1919.

(5) CORBINO, *Potere termoelettrico e coefficiente di Hall*, «Rend. Acc. Lincei» [6], 2, p. 526, 1925.

di struttura del metallo. Per questo ho creduto conveniente vedere se le tre variazioni presentate da una pastiglia di bismuto - ottenuta polverizzando del bismuto puro e comprimendolo poi in uno stampo adatto ad una certa pressione - conservano lo stesso andamento delle analoghe variazioni presentate da un dischetto di bismuto ordinario. È indubitato che la pastiglia e il dischetto hanno struttura completamente differente.

Potere termoelettrico. - Per la misura delle variazioni del potere termoelettrico si è usato il metodo del La Rosa⁽¹⁾. Tale metodo - che consiste nello stabilire la differenza di temperatura per mezzo dell'effetto Peltier - ha

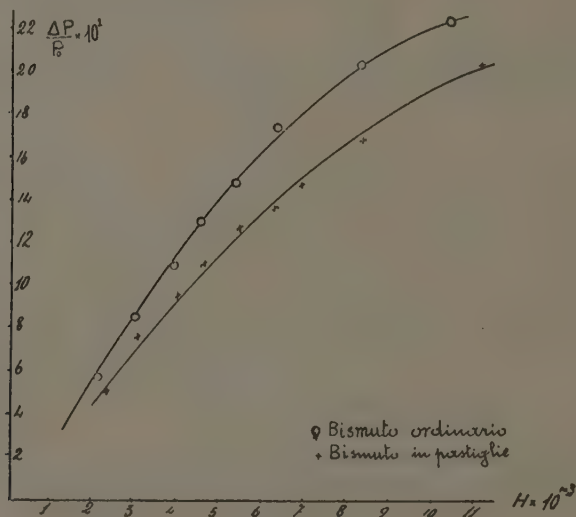


Fig. 1.

il vantaggio di rendere semplicissima la disposizione sperimentale, evitando gli errori che in queste ricerche deriverebbero dall'uso di bagni a temperature diverse. Le espansioni polari dell'elettrocalamita avevano un grande diametro relativamente alla loro distanza e alle dimensioni della coppia in esame di modo che il campo magnetico poteva considerarsi come uniforme in tutto lo spazio occupato dalla coppia stessa. Questa era costituita da due fili di rame saldati in due punti diametralmente opposti di un dischetto del diametro di cm. 1,5 e dello spessore di mm. 0,9 ottenuto comprimendo sotto rilevante pressione, in uno stampo adatto, del bismuto ridotto in polvere finissima mediante triturazione meccanica.

(1) «N. C.», [6], 18, p. 26, 1919.

Si è data questa forma alla coppia per poter fare su di essa, insieme allo studio della variazione del potere termoelettrico, anche quello dell'effetto Hall.

Per eliminare ogni influenza disturbatrice ho annessa la coppia in un mastice isolante mediante il quale il dischetto veniva trattenuto tra due vetrini. Il tutto veniva poi circondato da una camicia d'acqua in leggero movimento.

Nelle identiche condizioni sono state fatte le misure su di un dischetto di bismuto ordinario. I risultati sono riportati nella seguente tabella e nel diagramma della figura 1. $\frac{\Delta P}{P_0}$ indica la variazione del potere termoelettrico rispetto a quello a campo nullo.

H (gauss)	$\frac{\Delta P}{P_0}$ bismuto ordinario	$\frac{\Delta P}{P_0}$ bismuto in pastiglie
1315	0.019	—
2350	0.058	0.048
3050	0.085	0.077
3970	0.109	0.095
4630	0.131	0.113
5430	0.148	0.126
6300	0.178	0.135
6900	—	0.148
8370	0.204	0.166
10400	0.224	—
11080	—	0.204
11500	0.236	—

Effetto Hall. — Sugli stessi dischetti, come è stato detto, furono eseguite le misure dell'effetto Hall. Si è cercato soprattutto di rimanere nelle identiche condizioni delle esperienze precedenti; perciò si è mantenuta invariata la velocità dell'acqua nella camicia esterna e la corrente principale per l'effetto Hall aveva la stessa intensità di quella che nel caso precedente era servita come eccitatrice dell'effetto Peltier; le condizioni termiche del disco erano dunque rimaste immutate. Per la determinazione della f. e. m. di Hall è stato usato il metodo del compenso e si sono prese tutte le precauzioni per rendersi indipendenti da possibili dissimmetrie e dal calore joule.

Nella tabella seguente e nel diagramma della figura 2 sono riportati i valori ottenuti per la f. e. m. agli elettrodi secondari.

H (gauss)	E (u. e. m.) bismuto ordinario	E (u. e. m.) bismuto in pastiglie
2350	11350	11200
3050	14090	13660
3970	17160	16100
4630	18920	17900
5430	19810	19000
6900	24200	21600
8370	26540	22070
9500	27800	24300
11080	35270	—

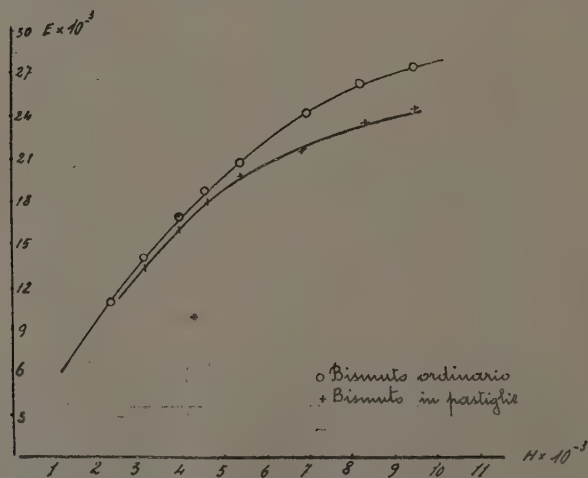


Fig. 2.

Resistenza elettrica. — Siccome per la misura della resistenza non è necessario ricorrere a misure assolute, si è trovato conveniente dedurre la variazione stessa dalla variazione della differenza di potenziale esistente fra due punti del dischetto che si trovano sulla stessa linea di corrente principale. Per questo ho saldati due fili in due punti che si trovano sul dia-

metro congiungente le sonde nel dischetto e li ho collegati attraverso una forte resistenza ad un galvanometro. Inviando sempre la stessa corrente, il rapporto tra le deviazioni con e senza il campo diventa allora eguale al rapporto tra la resistenza che il bismuto presenta allorchando agisce il campo e quella a campo nullo. Anche in queste misure la corrente inviata nel dischetto aveva la stessa intensità della corrente principale dell'effetto Hall e della corrente eccitatrice dell'effetto Peltier. Ecco riportati i valori ottenuti per la variazione di resistenza $\frac{\Delta R}{R_0}$ del bismuto ordinario e di quello in pastiglie:

H (gauss)	$\frac{\Delta R}{R_0}$ bismuto ordinario	$\frac{\Delta R}{R_0}$ bismuto in pastiglie
2350	0.052	—
3050	0.073	0.017
3970	0.095	0.019
4630	0.126	0.022
5430	0.168	0.036
6900	0.243	0.046
8370	0.328	0.073
9500	0.400	0.098

Con questi valori sono stati costruiti i diagrammi della figura 3.

Discussione dei risultati. — Da un primo esame dei risultati possiamo trarre una conclusione immediata. Nel diagramma della figura 1 si vede che la variazione dell'effetto Hall nel bismuto in pastiglia è più piccola di quella corrispondente nel bismuto ordinario. Questo comportamento porta una conferma alle vedute di Tieri⁽¹⁾ sulla tendenza dei cristallini di bismuto ad orientarsi in un campo magnetico. Infatti, per quanto minuta possa essere la triturazione, non si può distruggere completamente lo stato cristallino del bismuto ed allora, sotto l'azione del campo magnetico, i piccoli cristalli residui in seno alla pastiglia, che non sono completamente vincolati (la polvere di bismuto è semplicemente compressa), tenderanno ad orientarsi con l'asse principale parallelamente alle linee di forza del campo; la lamina si comporterà come l'analoga del bismuto fatto solidificare perpendicolarmente alle linee di forza del campo e presenterà quindi

(1) TIERI e PERSICO, «L'Elettrotecnico», 10, p. 206, 1915.

un valore dell'effetto Hall che è più piccolo di quello dell'ordinario bismuto. Inoltre, stando ai risultati di Defregger⁽¹⁾ riguardanti la diversa variazione col campo magnetico del p. t. e. in direzione dell'asse principale o perpendicolarmente ad esso in un cristallo di bismuto, e ammessa l'orientazione dei cristallini nella pastiglia, in questa si deve trovare una diminuzione della variazione del p. t. e. rispetto a quella del bismuto ordinario. E precisamente ciò che risulta da queste ricerche. (Fig. 2).

Riguardo alla variazione col campo magnetico dell'effetto Hall e del p. t. e. il bismuto ordinario e quello in pastiglie si comportano in maniera

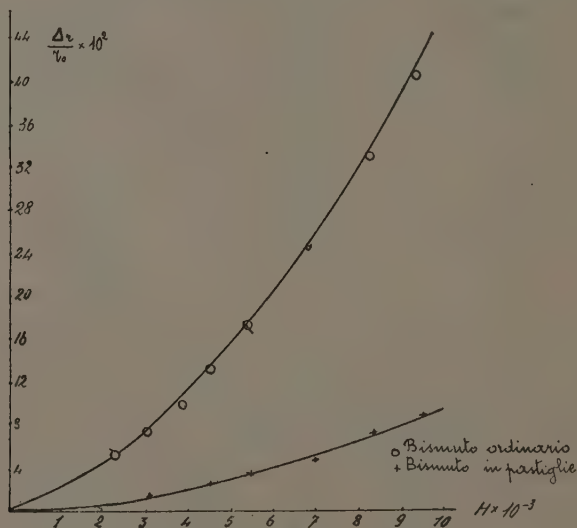


Fig. 3.

pressocchè identica, come si può vedere osservando le figure 1 e 2. Si arriva allora a questo risultato: che una profonda modificazione strutturale — quale è quella prodotta da una triturazione — non altera nè la variazione del potere termoelettrico nè quella dell'effetto Hall. Altrettanto non sembra — a prima vista — possa dirsi per la variazione di resistenza, poichè — come risulta dai diagrammi della figura 3 — la variazione di resistenza del bismuto in pastiglie conserva, è vero, lo stesso andamento di quella del bismuto ordinario, ma lo scarto tra le due variazioni è relativamente grande. Il Trabacchi nel 1918⁽²⁾, ritenne che la piccola variazione di resistenza (del

(1) WIED, « Ann. », 63, p. 97, 1897.

(2) « N. C. » [6], 16, p. 197, 1918.

4% circa che egli aveva trovato nelle pastiglie di fronte a quella del 20% del bismuto ordinario, doveva essere attribuita al fatto che alla resistenza primitiva propria del bismuto, si veniva ad aggiungere quella proveniente dal pulviscolo atmosferico che inevitabilmente si mescolava durante la triturazione. Una obiezione che si può fare all'ipotesi di Trabacchi è che la resistenza addizionale dovrebbe essere circa quadrupla di quella primitiva del bismuto, perchè esistesse una così grande differenza fra le due variazioni. Con l'ipotesi però dell'orientamento dei cristallini per opera del campo, non è necessario ammettere un così grande valore della resistenza addizionale, perchè una parte della diminuzione della variazione di resistenza, sarà dovuta al fatto che la pastiglia si comporta — per quello che si è detto precedentemente — come una lamina di bismuto fatta solidificare perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico. Perciò, malgrado lo scarto fra i valori delle variazioni, si deve ritenere che anche la variazione di resistenza con il campo non viene alterata da una modificazione nella struttura del metallo.

Concludendo, anche se eventualmente il campo provoca modificazioni strutturali, queste non hanno alcuna influenza sulle variazioni dell'effetto Hall, del potere termoelettrico e della resistenza. Quindi si deve ritenere che tali variazioni siano esclusivamente dovute ad azioni puramente elettrodinamiche e che l'insuccesso riportato dalle teorie elettroniche del tentativo di spiegazione dei fenomeni in esame, bisogna annoverarlo fra le prove negative delle teorie stesse.

Al *ch.^{mo}* prof. Tieri, che mi ha guidato e consigliato durante tutto il corso delle esperienze e che mi ha fornito i mezzi necessari per la ricerca, esprimo i sensi della mia viva gratitudine.

Fisica. — *A proposito di un supposto effetto dei raggi X nei raddrizzatori a cristallo.*⁽¹⁾ Nota⁽²⁾ di S. OBERTO, presentata dal Corresp. A. POCHETTINO.

Una recente Nota di W. Jackson⁽³⁾ illustra gli effetti dei raggi ultravioletti e dei raggi X sulle caratteristiche dei raddrizzatori a «cristallo».

Per i raggi X gli effetti sarebbero particolarmente vistosi conducendo addirittura alla simmetria delle caratteristiche rispetto alla origine, e qualche volta alla mancanza totale del raddrizzamento.

Ho voluto ripetere le esperienze per i raddrizzatori «Cuprox» adoperati ora correntemente per la carica di piccoli accumulatori. Contrariamente a

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1929.

(3) «Phil. Mag.», maggio 1929, p. 866.

quanto avviene nei rivelatori a cristallo, nei « Cuprox » il raddrizzamento avviene tra superfici, e non tra un'unica punta ed un piano. Questa considerazione mi fece ritenere che lo studio avrebbe potuto fornire risultati più completi anche dal punto di vista quantitativo.

Per una prova preliminare mi servii, per eccitare il tubo a raggi X, di una macchina elettrostatica a tre dischi del tipo Wehrsen e riscontrai immediatamente un discreto incremento di corrente nel raddrizzatore. Però per quanto il circuito che mi serviva a determinare la caratteristica del « Cuprox » ed il circuito di alimentazione del tubo fossero nettamente separati, riscontrai delle piccole scintille nei fili che conducevano al raddrizzatore. Tolto il tubo a raggi X e mantenendo in funzione la macchina elettrostatica la corrente, a differenza di potenziale applicato costante, aumentava ancora.

Ripetei più volte l'esperienza, determinando inizialmente la caratteristica del raddrizzatore, facendo scoccare nelle vicinanze delle scariche elettrostatiche di diversa potenza, e determinando immediatamente dopo e più volte in seguito la caratteristica influenzata.

Il dispositivo sperimentale per la determinazione delle caratteristiche è analogo a quello usato dal Jackson. Le differenze di potenziale applicate variavano da 0.5 a 1.5 volt e le correnti raggiungevano 50 milliampère. Le maggiori intensità da me adoperate non costituiscono però alcun pregiudizio contro i risultati delle esperienze dato il diverso tipo di raddrizzatore.

Posto il raddrizzatore a mezzo metro dalla macchina elettrostatica, e senza alcuna comunicazione con essa, appena quella si eccitava la corrente subiva un piccolo incremento; quando poi scocavano delle scintille di alcuni centimetri ai poli della macchina l'indice del milliamperometro reagiva immediatamente.

L'effetto risultava molto più marcato quando un tratto qualsiasi del circuito del raddrizzatore veniva introdotto sul cammino della scarica.

Dopo un minuto o due la scintillazione non provocava un ulteriore aumento della corrente, mentre le prime scariche davano un effetto evidenterissimo. Fermata la Wehrsen e rideterminata la caratteristica si lasciava in riposo il raddrizzatore determinandone ancora, di venti in venti minuti, il comportamento.

I risultati, espressi graficamente nel diagramma, sono i seguenti:

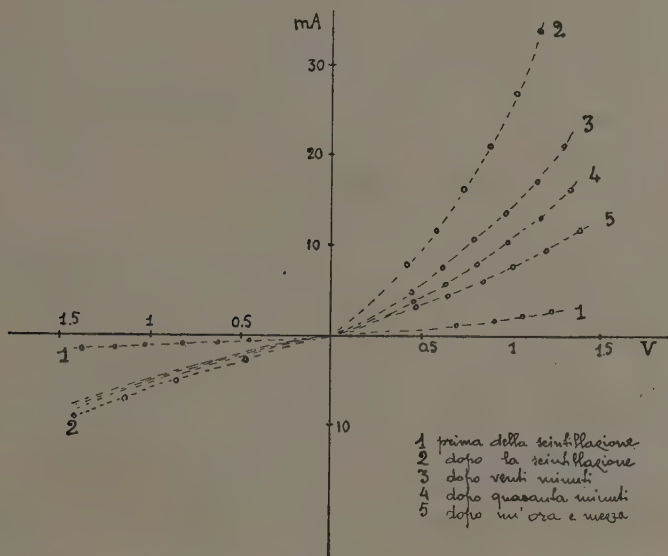
la caratteristica, con le correnti da me adoperate, non diventa simmetrica rispetto all'origine e conserva sempre il raddrizzamento;

l'effetto prodotto dalle scariche diminuisce gradatamente in un tempo così lungo che si può escludere assolutamente un eventuale effetto termico;

il ritorno alle condizioni iniziali non avviene mai completamente: più precisamente sembra che la caratteristica limite, dopo un riposo molto prolungato, corrisponda a condizioni di raddrizzamento meno favorevoli di quelle iniziali, precedenti la scarica.

Restava a sapere dove le condizioni di contatto restassero modificate. In un rivelatore a cristallo si deve ritenere che le cause esterne agiscano prevalentemente e determinino i maggiori effetti al contatto punta-cristallo. Nel «Cuprox» invece, come è noto, le due superfici dell'ossido ramoso, una rivolta alla lastrina madre, l'altra all'elettrodo esterno, sono apparentemente uguali. Nulla però dice che il contatto non sia più intimo da una parte che dall'altra.

Per determinare se le scintille avessero il loro effetto su una o sull'altra di queste due superfici provai a variare le condizioni della superficie



esterna, argentandola. L'argentatura si esegue in modo molto semplice immergendo il raddrizzatore in una soluzione diluitissima di nitrato di argento ⁽¹⁾.

La cellula argentata conserva il suo raddrizzamento, ma la sua resistenza interna per il nuovo più intimo e generale contatto è notevolmente diminuita.

In queste condizioni l'effetto delle scariche è assolutamente nullo. Avendo argentato il disco solo in parte è stato possibile controllare, nello stesso raddrizzatore, che l'effetto permaneva sull'ossido non argentato.

(1) Se la soluzione è troppo concentrata l'argento si deposita sull'ossido sotto forma di polvere nera che si stacca facilmente; se la soluzione è invece sufficientemente diluita l'argento si deposita perfettamente lucido e non può venire allontanato per semplice strofinio.

I raggi X, col raddrizzatore argentato, non hanno dato effetti apprezzabili.

Ripetei le esperienze su un piccolo raddrizzatore a galena per apparecchi radio. I fenomeni si ripetono nello stesso modo e per di più:

si vedono scattare delle scintilline fra la punta ed il cristallo;

si vede spesso che il ritorno verso le condizioni iniziali avviene a piccoli salti;

si vede nettamente che l'indice del milliamperometro si muove a scatti precisamente quando il tubo a raggi X, alimentato ora da un buon rocchetto, dà delle piccole scariche tra gli elettrodi ed il vetro;

il ritorno alla posizione iniziale è meno completo ed il raddrizzamento è molto peggiorato;

piccole scosse date al rivelatore a cristallo distruggono l'effetto;

il cristallo irradiato a parte si comporta come se l'irradiazione non fosse avvenuto;

talvolta una scintilla produce una diminuzione di corrente invece di un aumento.

Queste esperienze suggeriscono l'idea che le scintille vengono a stabilire un contatto più intimo fra l'elettrodo esterno e l'ossido ramoso nel « Cuprox », e la punta ed il cristallo nei raddrizzatori a galena. Le esperienze di W. Jackson non vengono perciò a stabilire integralmente, per quanto riguarda i raggi X, l'effetto supposto e devono essere corrette in larga misura dall'influenza delle scariche elettrostatiche che scoccavano nel tubo. Tanto più che egli stesso accenna a variazioni non graduali delle correnti nelle sue esperienze, ma piuttosto a scatti, ciò che gli impediva di determinare la curva della corrente col tempo di esposizione.

Fisica. — *Sulla sensibilità degli elettrometri* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di E. PERUCCA, presentata dal Corrisp. A. POCHETTINO.

Desidero segnalare una differenza concettuale di comportamento tra elettrometri a quadranti, a foglia, a filo, usati per la misura di piccolissime differenze di potenziale V_x mediante il metodo eterostatico. Sia $2V_0$ il potenziale ausiliario disponibile.

Sono possibili: a) la connessione all'ago (*Nadel-*, *Seiten-*, *Faden-schaltung*): V_x applicato tra l'ago e la custodia dell'elettrometro, i quadranti (o i piatti) sono portati ai potenziali ausiliari $+V_0$, $-V_0$ rispettivamente; cioè il punto medio della batteria è alla custodia, i due estremi

(1) Dal Laboratorio di Fisica Sperimentale della R. Scuola di Ingegneria, Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1929.

della batteria sono in connessione con i due piatti o le due coppie di quadranti;

b) la connessione ai piatti (*Platten-, Quadrantenschaltung*): uno dei piatti (o una coppia di quadranti) è unito alla gabbia ($V = 0$), all'ago è dato tutto il potenziale ausiliario $2V_0$; il potenziale incognito V_x è applicato tra i due piatti.

Sia x il parametro che fissa la posizione d'equilibrio dell'ago corrispondente al valore V_x ; per $V_x = 0$ sia $x = 0$; a rendere stabile la posizione d'equilibrio serve una forza elastica della forma $-k^2x$. Schematizzando opportunamente l'elettrometro, si può supporre che x misuri una *traslazione* dell'ago e, per V_x e quindi x molto piccoli, si hanno le seguenti formule ottenute tenendo conto solo dei termini del primo ordine in V_x e in x .

1) *Elettrometro a quadranti.* d è la distanza tra ago e quadranti.

a) Connessione all'ago:

$$(1) \quad x_f = \frac{V_0 V_x}{2\pi d \cdot k^2}$$

b) Connessione ai quadranti:

$$(2) \quad x_p = \frac{V_0 V_x}{2\pi d \cdot k^2}.$$

Dunque

$$(3) \quad \frac{x_p}{x_f} = 1.$$

Nell'elettrometro a quadranti le due connessioni sono equivalenti; ciò è già noto.

2) *Elettrometro a foglia.* Mi pongo nelle condizioni schematiche supposte in Geiger e Scheel, « *Hand. der Phys.* », vol. XII, p. 404, 1927. La foglia è assimilata a un piano conduttore indefinito, ed è per $V_x = 0$, quindi $x = 0$, equidistante dai due piatti, anch'essi piani paralleli indefiniti, cui si applica la tensione ausiliaria nella *Seitenschaltung*; d è la distanza tra i piatti.

Si hanno le formule seguenti:

a) Connessione alla foglia:

$$(4) \quad x_f = \frac{2 V_0 V_x \cdot d}{\pi \cdot k^2 \cdot d^3 - 4 V_0^2} = \frac{2 V_0 V_x \cdot d}{C_1 - 4 V_0^2}.$$

$C_1 = \frac{1}{\pi \cdot d}$ è la capacità della foglia, tra i piatti, per unità di superficie.

b) Connessione ai piatti:

$$(5) \quad x_p = \frac{2 V_o V_x \cdot d}{\pi \cdot k^2 \cdot d^3 - 16 V_o^2} = \frac{2 V_o V_x \cdot d}{\frac{C_1}{C_1} - 16 V_o^2}.$$

Per dati valori di k^2 , V_o , d , V_x è dunque sempre $x_p > x_f$, e poichè le sensibilità nelle due connessioni sono proporzionali ai valori x_p , x_f corrispondenti a una stessa V_x , anche le sensibilità sono diverse: *la connessione ai piatti nell'elettrometro a foglia è sempre più sensibile della connessione alla foglia.*

E precisamente dalle (4), (5) si ha:

$$(6) \quad \frac{x_p}{x_f} = 1 + \frac{6 V_o}{V_x} \cdot \frac{x_p}{d}.$$

Esempio numerico: Sia $V_o = 36$ volts, $d = 1$ cm, $V_x = 0,001$ volts. La forza elastica sia così piccola da dare $x_p = 0.001$ cm. Si ha allora:

$$\frac{x_p}{x_f} = 217, \text{ quindi } x_f = 0.0000046 \text{ cm. circa.}$$

Se la forza elastica avesse permesso solo lo spostamento $x_p = 0.0001$ cm., si sarebbe avuto

$$\frac{x_p}{x_f} = 22.5, \text{ quindi } x_f = 0.0000044 \text{ cm. circa.}$$

Un elettrometro a foglia che vanti, sia pure nella connessione ai piatti, la sensibilità di 0.001 volts con un microscopio micrometrico capace di misurare x fino a 0.01 mm. soltanto, deve presentare un rapporto $\frac{x_p}{x_f}$ delle sensibilità di circa 200. Nessun elettrometro a foglia, che io sappia, raggiunge tale sensibilità in pratica.

3) *Elettrometro a filo.* Si suppongono condizioni schematiche analoghe alle precedenti; l'equipaggio mobile è ora un filo rettilineo, inizialmente ($V_x = 0$; $x = 0$) equidistante dai due piatti piani, paralleli, indefiniti, della tensione ausiliaria. Sia d la distanza tra i piatti; a il raggio del filo, $\frac{a}{d}$ è molto piccolo,

$$(7) \quad C_1 = \frac{1}{2 \log \frac{2 \cdot d}{\pi \cdot a}}$$

è la capacità del filo tra i piatti, per unità di lunghezza.

Si hanno ora le seguenti formule:

a) Connessione al filo:

$$(8) \quad x_f = \frac{2 V_o V_x \cdot d}{\frac{k^2 \cdot d^2}{C_i} - 4 V_o^2}$$

formalmente identica alla (4), ciò ch'è naturale.

b) Connessione ai piatti:

$$(9) \quad x_p = \frac{2 V_o V_x \cdot d}{\frac{k^2 \cdot d^2}{C_i} - 4 V_o^2 \pi^2 C_i}$$

La sensibilità della *Plattenschaltung* rispetto a quella della *Fadenschaltung*, dipende dal valore di $\pi^2 \cdot C_i$. Dalle (8) e (9) si ha:

$$(10) \quad \frac{x_p}{x_f} = 1 + 2 (\pi^2 C_i - 1) \cdot \frac{V_o}{V_x} \cdot \frac{x_p}{d},$$

e questo rapporto è $\cong 1$ secondo che è $\pi^2 \cdot C_i \cong 1$.

Nell'elettrometro a filo la connessione ai piatti, rispetto alla connessione al filo, è più, meno, ugualmente sensibile, secondo che

$$(11) \quad C_i > \frac{1}{\pi^2} ; \quad C_i < \frac{1}{\pi^2} ; \quad C_i = \frac{1}{\pi^2}.$$

Negli elettrometri a filo finora realizzati si avvera or l'uno or l'altro di questi tre casi.

L'elettrometro di Lutz-Wulf non si presta a un controllo sperimentale della (10) perchè la connessione ai piatti non è realizzabile per le grandi sensibilità, il filo tende allora ad incollarsi sul microscopio di osservazione.

Nell'elettrometro di Lindemann e Keeley⁽¹⁾, a causa della forma incisa dei piatti, la capacità C_i è mal definita, ma siamo nel caso $\pi^2 \cdot C_i < 1$. In uno di questi elettrometri, per le sensibilità nella connessione al filo di 0.001 volts; 0.01 volts; 0.02 volts per divisione della scala del microscopio (= 0.00035 cm.), si è ottenuto sperimentalmente:

$$\frac{x_p}{x_f} = 0.075 ; \quad 0.5 ; \quad 0.64$$

rispettivamente.

(1) « Phil. Mag. », 47, p. 477, 1924. — Al. minor valore di C_i , cioè del coefficiente di induzione tra ago e piatti, e alla impossibilità di impiego di un microscopio di forte ingrandimento per l'osservazione dell'ago, si deve attribuire la minor sensibilità (pratica) dell'elettrometro di Lindemann e Keeley rispetto all'elettrometro Perucca. Si noti che tal coefficiente di induzione è in ambo i casi una piccola parte di ciò che costituisce la cosiddetta « capacità » dell'elettrometro.

L'elettrometro Perucca⁽¹⁾ si presta meglio a una applicazione numerica, e in esso si ha generalmente $\pi^2 \cdot C_1 > 1$.

I valori teorici ottenuti per tre esemplari di tale strumento sono stati

$$\frac{x_p}{x_f} = \text{da } 27 \text{ a } 36 \quad ; \quad \text{da } 3.4 \text{ a } 4.2 \quad ; \quad \text{da } 2 \text{ a } 2.5,$$

per le sensibilità di 0.001 volts, 0.01 volts; 0,02 volts per divisione della scala, rispettivamente.

I valori sperimentali sono stati in corrispondenza:

$$\text{da } 16 \text{ a } 29 \quad ; \quad \text{da } 2.5 \text{ a } 4 \quad ; \quad \text{da } 1.6 \text{ a } 2.5.$$

Questi sono inferiori ai valori teorici, ciò che è naturale perchè la (7) dà valori di C_1 superiori al vero.

Le formule precedenti sono il risultato di una teoria schematica degli elettrometri. Ciononostante questa teoria è già largamente capace di indicare la sostanziale differenza di comportamento tra elettrometri a quadranti, elettrometri a foglia, elettrometri a filo, e tra questi anzi distinguere nettamente l'elettrometro di Lindemann e Keeley da quello di Perucca.

Si noti infine che la maggior sensibilità di una delle due connessioni non costituisce un motivo di preferenze; mediante una semplice manovra dei piatti nell'elettrometro di Perucca, mediante una semplice manovra al potenziometro nell'elettrometro di Lindemann e Keeley, si ottiene la sensibilità desiderata nell'una o nell'altra connessione.

Sono altre le ragioni (comodità di montaggio dei dispositivi sperimentali, minor capacità, perturbazione del microscopio d'osservazione sull'equipaggio mobile, ...) che inducono a preferire piuttosto l'una che l'altra connessione; di regola è preferita la connessione al filo.

(1) « Zeitschr. für Instr., 47, p. 524, 1927; « Zeitschr. für Phys. », 49, p. 604, 1928.

Chimica. — *I solfati doppi del bismuto coi metalli alcalini.* — II. *Solfati doppi di bismuto e ammonio* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. CAGLIOTI e L. MALOSSÌ, presentata dal Socio F. ZAMBONINI.

Tempo fa, uno di noi, insieme alla Dott. A. Stolfi ⁽³⁾, ha fatto conoscere i risultati ottenuti dallo studio di una parte abbastanza estesa del sistema $\text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{K}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$ per l'isoterma di 25° . In continuazione di quelle ricerche rendiamo noti i risultati ai quali siamo pervenuti col sistema $\text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3 - (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$, sempre per l'isoterma di 25° .

Abbiamo operato esattamente come è riferito nel precedente lavoro, avendo adottato i procedimenti comuni d'analisi.

Del bismuto e ammonio, è stato studiato, almeno per quanto ci è noto, soltanto il composto $(\text{NH}_4)\text{Bi} \cdot (\text{SO}_4)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ottenuto da Lüddecke ⁽⁴⁾ per aggiunta di solfato acido d'ammonio ad una soluzione fortemente nitrica di nitrato di bismuto; ma non ci risulta che siano state mai eseguite ricerche sistematiche che ci permettessero di fare dei possibili confronti coi risultati a cui conduce lo studio dei solfati doppi dei metalli delle terre rare coi metalli alcalini, eseguito nel nostro Istituto ⁽⁵⁾.

Come per i solfati doppi col potassio, abbiamo eseguito delle ricerche preliminari, aggiungendo ad una soluzione concentrata di nitrato di bismuto acida per acido nitrico, una soluzione di solfato ammonico in quantità calcolata per ottenere i composti 1:3 ed 1:1.

Dal liquido ottenuto mescolando le due soluzioni, dopo un paio di giorni si separarono dei cristallini, che furono raccolti, asciugati fra carta da filtro e analizzati.

Sebbene le proporzioni dei due sali fossero molto diverse, i prodotti ottenuti sono risultati identici ed omogenei; costituiti perciò da un medesimo sale doppio, con le identiche proprietà ottiche. Gli individui cristallini danno la figura di interferenza delle sostanze biassiche e presentano estinzione parallela all'allungamento. Normalmente alla faccia su cui sono poggiati i cristalli, esce una bisettrice di un piccolo angolo dagli assi ottici; sono fortemente birifrangenti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1929.

(3) V. CAGLIOTI e A. STOLFI, «Rend. Acc. Lincei», (6), 1927, I, 896.

(4) «Ann.», 140 (1866), 279.

(5) ZAMBONINI e allievi. *Ricerche sui solfati doppi dei metalli delle terre rare coi metalli alcalini*, pubblicati dal 2° semestre 1924 in poi «Rend. R. Acc. Lincei», Serie 5^a e 6^a.

All'analisi han dato:

Trovato

Calcolato per $\text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot (\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$

Bi 50.12 — 49.87

49.86

SO_4 45.45 — 45.60

45.84

NH_4 4.11 — 4.20

4.30

I risultati ottenuti, per l'isoterma di 25 % sono raccolti nella seguente tabella:

TABELLA I.

N. dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione della fase solida					Costituenti del corpo di fondo
	$\text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3$	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	H_2O	$\frac{(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	Bi	NH_4	SO_4	H_2O	$\frac{\text{R. M. Bi}}{\text{R. M. SO}_4}$	
1	0.10	23.50	76.40	0.307	71.80	ass.	16.35	6.18*	2.02	$\text{Bi}_2(\text{OH})_4\text{SO}_4$
2	0.101	25.02	74.88	0.334	71.70	»	16.40	6.30*	2.01	
3	0.103	25.27	74.63	0.338	71.68	»	16.38	6.28	2.01	
4	0.103	25.34	74.56	0.340	70.20	0.51	16.90	5.00	1.903	$\text{Bi}_2\text{SO}_4(\text{OH})_4$
5	0.11	25.45	74.44	0.342	69.54	1.68	17.50	4.35	1.826	$(\text{NH}_4)_3\text{Bi}(\text{SO}_4)_3$
6	0.115	25.50	74.39	0.342	38.20	9.77	52.44	—	0.3348	$(\text{NH}_4)_3\text{Bi}(\text{SO}_4)_3$
7	0.125	32.52	67.36	0.483	38.15	9.74	52.30	—	0.335	
8	0.13	36.37	63.50	0.573	38.10	9.78	52.37	—	0.334	
9	0.13	39.01	60.86	0.641	38.20	9.83	52.45	—	0.3348	$(\text{NH}_4)_3\text{Bi}(\text{SO}_4)_3$
10	0.14	40.36	59.50	0.678	38.00	9.75	52.50	—	0.3327	
11	0.14	41.10	58.76	0.699	36.64	10.74	53.03	—	0.317	
12	0.14	41.20	58.66	0.702	35.20	11.00	54.15	—	0.299	$(\text{NH}_4)_3\text{Bi}(\text{SO}_4)_3$
13	0.14	41.10	58.76	0.699	34.64	11.20	54.45	—	0.292	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$

* Completamente eliminata a 180°.

Composizione dei composti ottenuti:

	Bi	NH_4	SO_4	H_2O
$\text{Bi}_2\text{O}_3 \cdot \text{SO}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	71.81	—	16.50	6.19
$\text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 3(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$	37.91	9.81	52.28	—

Nella fig. 1 sono rappresentati i risultati esposti nella tabella precedente: e però allo scopo di indicare anche il campo di esistenza del solfato

basico $\text{Bi}_2\text{O}_3 \cdot \text{SO}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, abbiamo lievemente modificato il metodo di rappresentazione di cui ci siamo serviti nello studio del sistema precedente col solfato potassico: abbiamo segnato sull'asse delle ascisse il rapporto $\frac{(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$ della fase liquida e sulle ordinate il quoziente dei rapporti molecolari di Bi e SO_4 della fase solida.

Non abbiamo estesa la ricerca al disotto del valore 0.334 dell'ascissa perchè già il corpo di fondo non conteneva più solfato ammonico ed eravamo nel campo d'esistenza dei solfati basici, il cui studio per lo scopo del presente lavoro, non ha interesse.

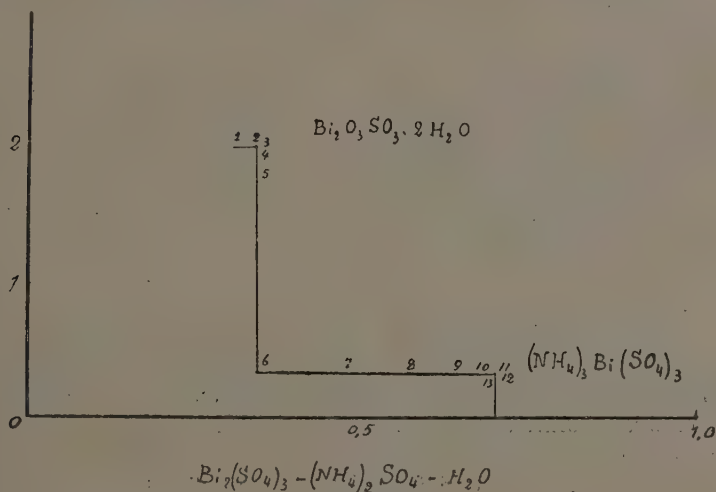


Fig. 1.

Come si vede, analogamente a quanto si verifica col potassio, alla temperatura di 25° si forma un solo composto, perfettamente anidro; $(\text{NH}_4)_3\text{Bi}(\text{SO}_4)_3$, con un campo di esistenza abbastanza esteso, essendo in equilibrio con soluzioni che contengono da 25.50 % a 40.36 % di $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$.

I cristallini ottenuti appaiono al microscopio, omogenei, benchè assai piccoli, sotto forma di lamine a contorno esagonale, ma alquanto allungate; hanno estinzione non parallela all'allungamento e sono debolmente birifrangenti.

Non abbiamo riscontrato nel sistema la formazione del composto 1 : 1 che invece si ottiene per cristallizzazione da soluzioni di nitrato di bismuto e solfato ammonico, alla temperatura ambiente, come abbiamo riferito sopra. È importante osservare, però, che mentre Lüddecke ha ottenuto il

composto con 8 molecole di acqua di cristallizzazione, nelle condizioni in cui noi abbiamo operato, esso s'ottiene assolutamente anidro.

A differenza di quanto si verificava nel sistema col potassio, abbiamo potuto definire la costituzione di un sale basico che è in equilibrio col composto 1 : 3. Esso risponde alla formula $\text{Bi}_2\text{O}_3 \cdot \text{SO}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Non abbiamo delimitato il suo campo di esistenza da entrambe le parti; solo possiamo dire, per ora, che esso è, da una parte, in equilibrio col solfato doppio 1 : 3; e si ottiene puro da soluzioni che contengono dal 25.27 % al 23.50 % di $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$.

Il prodotto, osservato al microscopio, si presenta sotto forma di begli aggregati di aghi con netta polarizzazione di aggregato e la caratteristica croce nera.

Il composto è stato preparato da diversi sperimentatori⁽¹⁾; tra essi meritano particolare menzione Lüddecke e Remsen e Grigham⁽²⁾ i quali lo hanno ottenuto per decomposizione con acqua a caldo del solfato doppio di bismuto e ammonio e rispettivamente di bismuto e potassio.

I risultati delle nostre ricerche, confermano questa origine, la quale viene convalidata dal fatto che noi non siamo riusciti a ottenere il solfato doppio 1 : 1 alla temperatura di 25°.

L'acqua del composto viene eliminata soltanto a 180° e completamente.

Dalle ricerche da noi eseguite, appare già una certa differenza di comportamento tra solfato ammonico e solfato potassico, rispetto al solfato di bismuto. Col solfato potassico non si era riusciti ad ottenere il composto 1 : 1 che, invece, si forma coll'ammonio per cristallizzazione a temperatura ordinaria, in soluzioni fortemente acide.

È assai degno di nota il fatto che nella serie di solfati doppi dei metalli delle terre rare con il solfato ammonico, il composto 1 : 1 si forma sempre con un certo numero di molecole d'acqua: è ottoidrato nel cerio⁽³⁾ e nel neodimio⁽⁴⁾, ottoidrato e diidrato nel lantanio⁽⁵⁾; il composto 1 : 3 si forma solo con il lantanio, mentre poi gli altri tipi di sali doppi riscontrati nei sistemi con le terre, non si rinvencono invece nel sistema solfato di bismuto - solfato di ammonio.

(1) HEINTZ, « Pogg. », 63, p. 77 (1844). LÜDDECKE, loc. cit.

(2) REMSEN e BRIGHAM, « Am. Chem. J. » 14, p. 171 (1892).

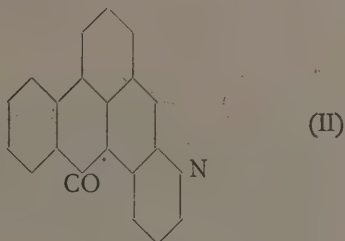
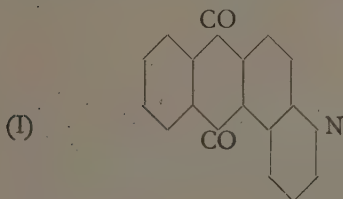
(3) ZAMBONINI e RESTAINO, « Rend. R. Acc. Lincei ». (6^a) 1926, 1^o sem., 3^o, 178.

(4) ZAMBONINI e STOLFI, loc. cit., (6^a) 1927, 1^o sem., 5^o, 832.

(5) ZAMBONINI e STOLFI, loc. cit., (6^a) 1926, 2^o sem., 4^o, 424.

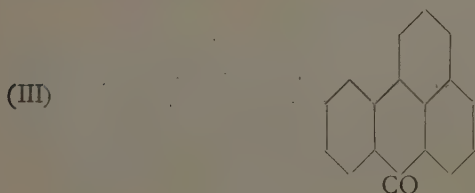
Chimica. — *Sistemi eteronucleari policondensati*⁽¹⁾. Nota di G. CHARRIER, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. ERRERA.

La sintesi di Skraup⁽³⁾, applicata da O. Bally⁽⁴⁾ al β -amino-antrachinone allo scopo di ottenere l'antrachinonchinolina corrispondente (I) portò invece alla benzantronchinolina (II)



saldandosi nella condensazione contemporaneamente al nucleo piridico anche un nuovo nucleo benzenico.

Provando a far reagire nelle stesse condizioni semplicemente l'antrachinone in luogo del β -aminoantrachinone, Bally, come è noto, scoprì il benzantrone (III)



sostanza di grande importanza per i corpi di alta condensazione a cui può dar luogo e che presentano il massimo interesse anche nella tecnica come sostanze coloranti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università di Siena.

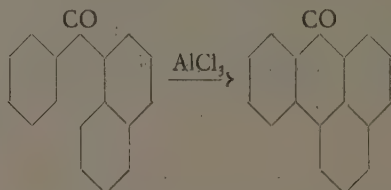
(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1929.

(3) «Monatsh.», 1, 316, 1880; 2, 139, 1881.

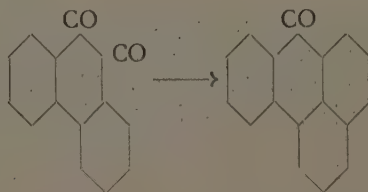
(4) «Ber.», 38, 194, 1905; BALLY e SCHOLL, «Ber.», 44, 1656, 1911; Bad. D. R. P. 171939, 176018, 176019, 1904; «Frdl.», 8, 369, 372, 374.

Il benzantrone venne ottenuto in vari modi: partendo da altri derivati antracenici, ad esempio dall'antranolo⁽¹⁾, dall'antraidrochinone e dall'antracene stesso⁽²⁾ e recentemente anche dall'acido ortobenzoilbenzoico⁽³⁾.

Inoltre la condensazione per fusione con cloruro di alluminio anidro del fenil- α -naftilchetone porta pure a questo composto⁽⁴⁾



Si può ancora ricordare la sintesi del benzantrone di Schaarschmidt partendo dal 3, 4-benzofluorenone⁽⁵⁾. Recentemente J. S. Turski e R. Pragerowa⁽⁶⁾ ottennero il benzantrone sottoponendo alla condensazione benzantronica con glicerina, acido solforico e solfato ferroso (come riducente) il fenantrenchinone



Avendo già da tempo messo in evidenza in numerose reazioni⁽⁷⁾ la completa analogia esistente tra fenantrenchinone e 2-N-fenil-1, 2-nafto-1, 2, 3-triazolchinone (rispettivamente tra fenantrene e 2-N-fenil-1, 2-nafto-1, 2, 3-triazolo) confermata recentemente anche con metodo chimico-fisico da altri⁽⁸⁾,

(1) BALLY e SCHOLL, « Ber. », 44, 1656, 1911.

(2) D. R. P. 176019, 1904; « Frdl. », 8, 374.

(3) BELLONI e COLLI, Brevetto italiano n. 262532, 1929.

(4) SCHOLL e SEER, « Ann. », 394, 111, 1912; « Monatsh. », 33, 1 1912; SCHOLL, D. R. P. 239671, 1918; « Frdl. », 10, 682.

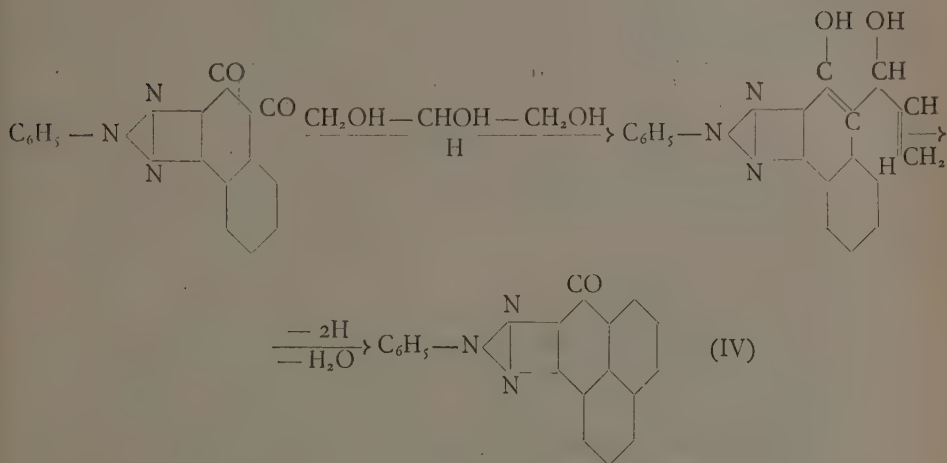
(5) « Ber. », 50, 294, 1082, 1917; 51, 1074, 1082, 1918.

(6) « Przemyśl Chemiczny », 13, 33, 1929; « Chem. Zentr. », 1929, I, 1692.

(7) « Rend. Accad. Lincei », [5], 33, I, 346, 1924; [6], 4, 312, 1926; « Gazz. Chim. Ital. », 53, 829, 862, 1923; 54, 610, 647, 982, 1924; 55, 7, 1925; 56, 191, 196, 1926; 57, 749, 1927; 58, 254, 1928.

(8) L. FIESER e MARION A. AMES, « J. Am. Chem. Soc. », 49, 2604, 1927.

ho voluto stabilire se il 2-N-fenil-1,2-nafto-1,2,3-triazolchinone fosse capace di condensarsi con la glicerina in soluzione solforica in presenza di solfato ferroso per dare l'analogo 2-N-feniltriazolico (IV) del benzantrone secondo lo schema

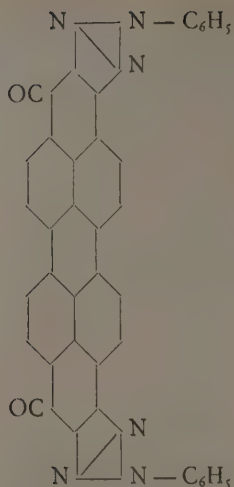


il quale differisce dal benzantrone ordinario per contenere nel resto antro-nico della molecola un nucleo triazolico 2-N-fenilato in luogo di un nucleo benzenico.

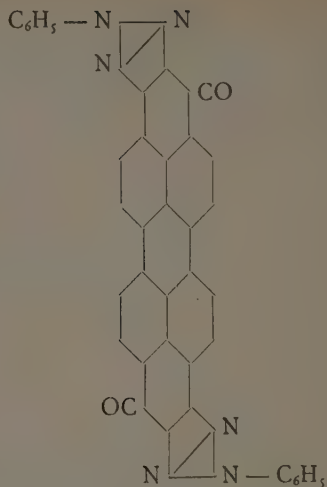
Ho potuto constatare che effettivamente la condensazione tra 2-N-fenil-naftotriazolchinone e glicerina si effettua, essendo riuscito ad isolare un composto di color giallo chiaro, dotato di elevato punto di fusione (sopra 300°), solubile in acido solforico concentrato con colorazione rosso sangue, al quale ad un esame preliminare pare corrisponda la composizione della formula IV.

Anche da alcune reazioni eseguite per ora con piccola quantità di so-stanza e al puro scopo di saggiarne la reattività, il nuovo composto risul-terebbe comportarsi analogamente al benzantrone ordinario.

Il nuovo analogo eterociclico del benzantrone, possedendo libere le po-sizioni occorrenti per la formazione del nucleo centrale perilenico, può dar luogo per condensazione, similmente al comune benzantrone, ai due ana-loghi 2-N-feniltriazolici del violantrone e dell'isoviolantrone

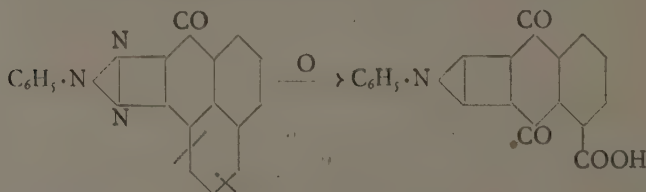


Analogo triazolico del violantrone

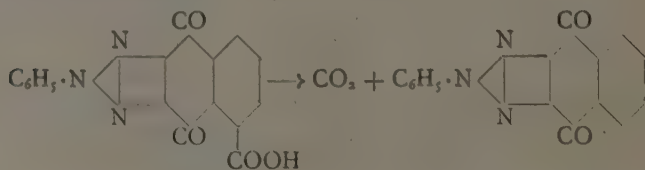


Analogo triazolico dell'isoviolantrone

Per scissione ossidativa dal benzantrone 2-N-feniltriazolico si deve ottenere, analogamente a quanto avviene col benzantrone ordinario⁽¹⁾, l'acido 1-carbossilico dell'analogo 2-N-feniltriazolico dell'antrachinone



dal quale per eliminazione di anidride carbonica



si giunge all'analogo 2-N-feniltriazolico dell'antrachinone, difficilmente accessibile per altra via.

(1) LIEBERMANN e ROKA, « Ber. », 41, 1425, 1908.

La parte sperimentale verrà pubblicata nella « Gazzetta Chimica Italiana ».

Riassunto. — La sintesi benzantronica di Bally dall'antrachinone, estesa da Turski e Pragierowa al fenantrenchinone, viene applicata al 2-N-fenil-1, 2-nafto-1, 2, 3-triazolchinone, ottenendosi un composto, che, in modo affatto preliminare, si può ritenere, ai saggi e alle analisi eseguite, come l'analogo 2-N-feniltriazolico del benzantrone.

Petrografia. — *Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti.* Nota II di A. BIANCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

c) *Serie calcescisti-ofioliti.* — In tutto il versante meridionale dell'alta e media Valle Aurina, a occidente di Val Del Vento, sono largamente sviluppate le formazioni mesozoiche di calcescisti (*l. s.*) ed ofioliti. In esse sono incise la Valle Rossa, le Valli delle Lepri, del Porco, dell'Orso e la parte inferiore di Val Chiusa, Val Chiusetta e degli altri valloni minori, che scendono trasversalmente su Valle Aurina dalla catena che la separa da Valle di Riva.

Il confine fra la massa dei Tauri e la serie dei « Calcescisti » (*l. s.*), trovasi lungo il fondo della stessa Valle Aurina. Solo nella regione della gola di S. Pietro l'Aurino incide profondamente il suo corso entro il mesozoico lasciando poco più a nord la zona del contatto con l'ortogneiss, caratterizzata da una serie di alternanze di *gneiss scistoso*, epidotico-granatifero, più o meno cloritico, con *calcescisti gneissici*, epidotici o tormaliniferi e con banchi di *calcarei dolomitici*.

I *calcescisti* della sinistra di Valle Aurina hanno talora *facies molto calcarea* con tessitura granulare poco scistosa, come si può osservare a sud di S. Valentino in Predoi, a nord della Vedretta Rossa, nell'alta Valle delle Lepri, ecc.

Più diffusi sono *calcescisti tipici*: con tessitura scistosa; con quarzo, muscovite, calcite come prevalenti; con clorite, magnetite, tormalina, o anche titanite ed epidoto come accessori; spesso con un po' di sostanza carboniosa, talora con rare tracce di albite (a monte della gola di S. Pietro, sulla sinistra di Val Del Vento, nella Valle delle Lepri, ecc.).

La presenza di elementi più numerosi di albite determina qua e là il passaggio a forme di *calcescisti gneissici* (per esempio di fronte a Lutago e a nord della gola di S. Pietro).

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

Si notano anche fitte alternanze di calcescisti tipici con *filladi sericitiche carboniose*, ricche di quarzo, e poco calcaree, come nella regione di Punta Nera, fra Valle delle Lepri e Valle di Riva. *Filladi carboniose tormalinifere* (pretriasiche?), si notano in questa stessa località, fra i calcescisti di Punta Nera e i banchi di calcari dolomitici di Croda Bianca; a nord di questa si alternano ripetutamente *micascisti cloritici tormaliniferi*, con *calcescisti* e con *prasiniti*.

Fra le *ofioliti* della serie mesozoica troviamo rari e limitati affioramenti di *rocce serpentinosi*. La massa più notevole di serpentini si trova sulla destra di Val Chiusa Grande, fra i calcescisti ed i banchi di calcari triasici che li separano dalle filladi di Cima Dura.

Molto più largamente rappresentate sono le *prasiniti epidotiche* od *amfiboliche*, talora ricche anche di clorite o di biotite. La regione ove queste rocce verdi si trovano in maggior massa, fra i calcescisti, è quella di Valle Rossa, a sud di Casere, nell'Alta Valle Aurina. Alcune di queste intercalazioni ofiolitiche presentano notevole interesse anche per la loro mineralizzazione utile a pirite e a calcopirite, che nel passato ha dato vita secolare alle miniere cuprifere di Predoi. Si osserva pure, nelle litoclasti di queste rocce verdi, la presenza di cristalli di albite, di titanite, e di altri minerali, che sono oggetto di studio particolare del dott. Cavinato. Il tipo ofiolitico prevalente in Valle Rossa è costituito da una prasinite porfiroide, in cui anfibolo, epidoto ed albite (senza geminazione) si trovano in quantità quasi equivalente. Da queste si passa a *prasiniti amfiboliche*, più o meno cloritiche, oppure a *prasiniti epidotiche*.

Molto interessante l'osservazione dell'anfibolo, che presenta talora caratteri normali di orneblenda verde, più o meno ferrifera, e talora invece carattere di anfibolo glaucofanico poco ferriero (*gastaldite*).

Notevole è soprattutto il fatto che in alcune zone, dove le prasiniti amfiboliche sono più scure e compatte, più povere di epidoto ed albite, si osserva un regolare *accrescimento di orneblenda verde su gastaldite*. Si ripete qui, nelle stesse formazioni geologiche, lo stesso interessante fenomeno osservato già nelle ofioliti della regione della Grivola da G. B. Dal Piaz e da questi particolarmente studiato, come motivo petrografico importante anche per la interpretazione tettonica di dettaglio della regione ⁽¹⁾.

Anche presso il Rifugio Giogo Lungo, dove s'alternano, come ho già accennato, con le formazioni mesozoiche le digitazioni di parascisti della serie del Picco, si trovano prasiniti amfiboliche, poverissime di albite e con questa doppia generazione di anfibolo.

Prasiniti epidotiche prevalgono assieme a *prasiniti cloritiche*, e s'alternano, come ho accennato, con calcescisti, calcefiri, filladi a nord di Croda

(1) DAL PIAZ G. B., *Geologia della catena Herbelet-Grivola-Grand Nomenon*. «Mem. Istit. Geologico di Padova», vol. VII, Padova, 1928.

Bianca, fra i banchi di calcari e calcari dolomitici triasici di questa ed i calcescisti dell'alta Val delle Lepri.

La formazione dei calcescisti ed ofioliti si va riducendo notevolmente nella parte occidentale di Valle Aurina, specialmente nella regione di Luta-
tago, costretta fra la massa gneissica dei Tauri e la fillade quarzifera del gruppo di Cima Dura, per riprendere notevole sviluppo ad occidente di Lappago.

II. AUSTRIDI.

Serie delle Grisonidi. — a) *Filladi quarzifere e paragneiss di Cima Dura.* — Nella parte superiore di Val Chiusetta e di Val Chiusa Grande, che scendono dal gruppo della Cima Dura sulla sinistra di Valle Aurina, predomina a sud delle formazioni mesozoiche già ricordate (calcescisti, serpentini e calcari triasici), un tipo di *fillade* grigia o grigio-verde, lucente, *ricchissima di quarzo*, in concentrazioni microgranulari (con evidente cataclasi) rivestite da straterelli ondulati di *sericite*. Con questi componenti essenziali si trovano quasi sempre elementi di *granato*, di *clorite* o di *orneblenda* e quantità accessorie di tormalina, apatite, magnetite. Si ripete qui cioè, con maggior sviluppo, la formazione rocciosa, che si osserva a sud della conca di Luta-
tago.

Nella parte più alta della stessa Valle Chiusa Grande a questo tipo di fillade quarzifera si associano *micascisti gneissici granatiferi*, *paragneiss sericitici* ad *epidoto*, *scisti anfibolico-biotitici* ricchissimi di quarzo e granatiferi.

b) *Scisti filladici e paragneiss della regione di Riva di Tures.* — Parascisti analoghi a questi ultimi ricordati, con tessitura generalmente più minuta, laminata, regolarmente scistosa, si sviluppano su tutto il versante meridionale della catena tra Cima Dura e Punta Nera, e nella Conca di Riva di Tures, chiusa a sud dal massiccio delle Vedrette Giganti.

Presso Malga Dura (Alpe dei Dossi) predomina un *micascisto filladico granatifero* minutamente scistoso, passante verso sud a *fillade quarzifera* (che presenta fenomeni di intensa compressione unilaterale e laminazione dei granuli di quarzo), e verso nord a *micascisti gneissici* con albite, alternanti con *parascisti verdi*, *cloritici*, *anfibolici*, od *epidotici*.

Queste formazioni si susseguono fino alle rocce meridionali di Punta Nera e Croda Bianca, dove banchi di quarzite, di fillade e di calcari, già ricordati, le separano dalla serie dei calcescisti ed ofioliti di Val delle Lepri.

Più ad oriente, a nord-ovest di Riva di Tures, prevalgono invece forme di *paragneiss a due miche*, passanti a micascisti gneissici, cloritici, od anfibolici, spesso ricchi di granato, o di tormalina, come elementi accessori. Il feldispato è anche qui molto sodico nei tipi più sialici (albite o albite oligoclasica), talora accompagnato da qualche piccolo elemento di

microclino. È invece esclusivamente sodico-calcico, di composizione variabile da oligoclasio ad andesina-labradoritica nei tipi di gneiss filladici più femici. Si nota la successione zonare inversa, con nucleo più sodico.

A sud di Riva di Tures riprendono il predominio *micascisti filladici*, ricchi di quarzo e di *biotite*, che in alcuni punti (presso Hellauer, e a nord di M. Covoni) si alternano ripetutamente con banchi sottili di *scisti anfibolico-biotitici*, ricchi di titanite; in altri punti contengono banchi di *filladi quarzifere sericitiche* (fra Malga Terna e Malga Epago). In queste ultime è notevole il subparallelo orientamento dei granuli lenticolari, allungati di quarzo, sotto la prevalente pressione unilaterale, rivelato da irregolari ma quasi simultanee estinzioni. Si ripete cioè il fenomeno osservato da G. B. Trener, nelle quarziti del Tonale e confermato poi da Sander anche per la regione contigua occidentale ⁽¹⁾.

Nel complesso, pur variando di composizione, tutta serie di parascisti di Riva di Tures, per la grana minuta e la tessitura finissima, regolarmente scistosa, per la tinta scura a fondo grigio-bruniccio, per la prevalenza in genere di biotite, per la facies cristallina caratteristica e nettamente distinta dalla serie di paragneiss e micascisti del Picco dei Tre Signori.

c) *Ortogneiss aplitici e gneiss occhiadini fra i parascisti della regione di Riva di Tures.* — Degna di particolare menzione è la presenza fra le formazioni para già descritte a nord di Malga Dura, di una roccia gneissica, muscovitica, chiara, ricca di quarzo e di feldispati (microclino ed albite) che ha « facies » di *ortogneiss*, e composizione compresa fra quella di un granito aplitico, alquanto potassico, e quella di un granito engadinico. Ciò è dimostrato dallo studio chimico-petrografico particolare eseguito da G. Semerano sugli esemplari da me raccolti ⁽²⁾.

Fra l'Alpe dei Sassi e la conca di Riva di Tures, alla base delle pendici orientali della Cima di Riva, si trova un *gneiss occhiadino* a grosse ghiandole di microclino in associazione micropertitica con poca albite. Questi due feldispati, assieme a quarzo e muscovite, costituiscono gli elementi fondamentali della roccia, che contiene anche tracce di biotite e clorite, e, come accessori, epidoto, apatite, zirconio, titanite, granato.

Ho affidato a G. Semerano anche lo studio di dettaglio di questo gneiss occhiadino e riporto qui, dalla sua Nota in corso di stampa, l'analisi di questa roccia (II), assieme a quella dell'altro ortogneiss sopra ricordato: (Malga Dura) (I); nella colonna III riporto l'analisi di F. Becke sul gneiss occhiadino del Castello di Campo Tures ⁽³⁾.

(1) Vedi SANDER B., *Note illustrative della Carta Geologica delle Tre Venezie. Foglio Bressanone*, Sezione Geolog. Uff. Idrog. R. Magistrato alle Acque, Padova, 1925, p. 40.

(2) SEMERANO G., *Sulla natura di alcuni gneiss della regione fra Alpi Aurine e Vedrette Giganti*, « Atti Accad. Veneto-Trentino-Istria », Padova, 1929, vol. XX.

(3) BECKE F., *Chemische Analysen von krystallinen Gesteinen der Zentralkette der Ostalpen* « Denkschr. Akad. Wiss. (Math. Nat. Cl.) », Vienna, 1913, LXXV, 153.

	I	II	III
SiO ₂ =	75.52	72.23	73.15
TiO ₂ =	0.08	0.17	—
Al ₂ O ₃ =	12.87	14.00	13.78
Fe ₂ O ₃ =	0.71	0.56	1.47
FeO =	0.57	1.98	0.94
MnO =	tr.	0.02	—
MgO =	0.40	0.60	0.66
CaO =	1.02	1.58	1.89
K ₂ O =	5.51	5.42	4.26
Na ₂ O =	2.92	2.86	2.49
H ₂ O =	0.43	0.39	1.58
CO ₂ =	—	0.21	0.60
Somma	100.03	100.02	100.82

Risulta chiaramente per l'ortogneiss occhiadino di Alpe dei Sassi una composizione di tipo granitico, di serie alcalino-potassica. La roccia è distintamente meno aplitica dell'ortogneiss muscovitico di Malga Dura; ha però in comune con esso l'abbondanza di potassio, a cui corrisponde nella composizione mineralogica la prevalenza del microclino. Il confronto delle analisi II e III mostra l'analoga chimica oltre che mineralogica e strutturale, fra i due tipi di occhiadino di Riva di Tures (più fresco e, forse anche per questo, un po' più alcalino) e di Campo Tures.

Lo stesso tipo di gneiss occhiadino si ritrova infatti poco sopra S. Maurizio, sulla strada Campo Tures-Acereto; costituisce pure la roccia del Castello di Campo Tures e si sviluppa poi, ad occidente, in Valle dei Molini, in mezzo alla serie dei « gneiss di Mules », che sono la continuazione degli scisti della regione di Riva di Tures. Anche fra questi gneiss, prevalentemente para, sono indicati da B. Sander ⁽¹⁾, ad occidente di Campo Tures, altre intercalazioni di ortogneiss, aplitici, muscovitici, che, secondo Sander, corrisponderebbero ai gneiss di Anterselva, e che ricordano l'ortogneiss di Malga Dura sopra descritto.

d) *Massiccio tonalitico delle Vedrette Giganti.* — La nota massa tonalitica delle Vedrette Giganti (*Rieserferner*), si è intrusa, a sud della Valle

(1) SANDER B., *Foglio Bressanone della Carta Geologica delle Tre Venezie*, e *Note illustrative ecc.*, loc. cit.

di Riva, nelle formazioni scistose sopraccennate. Questa roccia eruttiva fu studiata petrograficamente già molti anni or sono da Becke ¹⁾.

Mi limiterò qui per ora a dare alcuni brevi cenni sulla parte periferica settentrionale della massa eruttiva, che tiene a contatto col parascisti della Valle di Riva di Tures.

Il tipo della roccia eruttiva sul versante settentrionale delle Vedrette Giganti è quello di una diorite quarzifera a grana media, talora con facies granodioritica, a biotite prevalente, talora con facies tonalitica, diotritico-orneblendica.

L'epidoto non manca mai fra gli elementi della roccia, la diorite si trova solo come elemento secondario, associato a biotite, ed ornneblenda. Accessori sono zircone, apatite e talora titanite e magnetite.

Il feldispato di tipo plagioclastico ha composizione variabile, da una labradorite, o labradorite-oronotica nell'interno, ad una andesina o ad una oligoclasio andesinico alla periferia. Si ha dunque forte zonatura normale, a differenza di quanto si è osservato nel gneiss del Tauri. Il quarzo, in quantità minore del feldispato, presenta nelle parti periferiche della massa, marcati fenomeni di intassiasi, pur senza rivelare unilaterali di compressione. Nella regione del Ponte Totel in Val di Riva, il torrente incide una gola nella parte periferica settentrionale della massa tonalitica, che sulla destra presenta facies laminata e un poco scistosa. Si tratta però sempre di modificazioni della tessitura della roccia, non mai di profonde trasformazioni della struttura, per ricristallizzazione metamorfica.

Da ciò una chiara, fondamentale distinzione fra la massa tonalitica delle Vedrette Giganti e la massa di composizione analoga, e talora anche di facies macroscopica simile, ma essenzialmente metamorfica dell'ortogneiss del Tauri, che, come abbiamo detto, presenta struttura nettamente cristalloblastica.

Lungo la sinistra della Valle di Riva si osserva una facies granulata a grana media o grossa, talora povera di elementi colorati, talora più ricca invece di elementi anfibolici.

La tonalite dell'alta Valle di Riva, nella regione ad occidente di Sasso Lungo di Collalto, presenta generalmente grana più minuta, facies biotitica, e frequenti differenziazioni aplitiche e concentrazioni femiche.

Sul versante nord-ovest di M. Coroni, lungo il sentiero che scende dal Rifugio della Vedretta di Ries, presso il contatto della tonalite con gli scisti filadici, che qui presentano facies basica, ricca di ornneblenda, di biotite, di titanite, ho potuto osservare un'apofisi della massa eruttiva stessa.

Questa è differenziata in senso aplitico, presentando fra i feldispati la comparsa di microclino, fra le miche l'associazione di muscovite alla biotite,

¹⁾ Becke, E., *Petrographische Studien an Tonalit des Rieserferner*, v. Tscherm. Miner. Petr. Mit. v. Wien, 1892, XIII, 379.

e fra feldispati e quarzo la frequenza di associazioni micropegmatitiche. Gli scisti filladici orneblendici presentano evidenti azioni del metamorfismo di contatto subito. Come minerale di nuova formazione si trova in essi abbondante *pirosseno diopsidico*, che in alcuni punti accompagna l'orneblenda, in altri la sostituisce quasi completamente. Abbiamo qui un esempio di *contatto primario intrusivo*. Mi limito per ora solo a questo breve cenno sui rapporti fra le formazioni scistose di Riva e la più recente massa tonalitica delle Vedrette intrusa in esse, riservandomi di riprendere in esame poi, in modo più completo, il problema.

Embriologia. — *Ricerche di embriologia sperimentale nei Ciclostomi.* — I. *Le malformazioni osservate e il tempo nel quale possono essere determinate*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di S. RANZI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Le mie precedenti ricerche sulle malformazioni, che per effetto di agenti inibitori possono essere determinate nel corso dello sviluppo dei Cefalopodi, non mi permettevano, come dissi⁽³⁾, di portare un contributo circa il meccanismo di azione degli agenti inibitori per parecchie ragioni dipendenti dal materiale sul quale sperimentavo, dalle sue condizioni di vita e di allevamento.

Per cercare di estendere le nostre conoscenze in questa direzione scelsi, come materiale di esperimento, le ova di *Petromyzon planeri* Bl.: il lento sviluppo di queste ova, la perfetta sincronia degli stadi tra tutte le ova di una medesima fecondazione allevate nelle stesse condizioni, la possibilità di avere, per mezzo di fecondazione artificiale, un numero di ova molto elevato, fecondate nello stesso momento, quindi nei giorni successivi nello stesso stadio di sviluppo, mettevano a mia disposizione un materiale prezioso. Potevo infatti, usando una soluzione relativamente molto concentrata di $\text{LiCl} \left(\frac{m}{15} \right)$, ridurre il periodo di soggiorno nella soluzione al minimo (7-9 ore) e agire così in un periodo ben definito dello sviluppo, onde vedere in quale maniera ad una differenza di stadio sottoposto all'azione dell'agente inibitore corrispondesse una differenza di malformazione; perchè sebbene già dalle ricerche di Herbst⁽⁴⁾ su Echinodermi, di Stockard⁽⁵⁾ su

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1929.

(3) RANZI S., «Pubbl. Staz. Zoologica Napoli», vol. 9, p. 81, 1928 (vedi pp. 86-90).

(4) HERBST C., «Arch. f. Entw. Mechan.», Bd. 2, p. 455, 1896.

(5) STOCKARD C. R., «Am. Journ. of Anat.», vol. 10, p. 369, 1910.

Teleostei, di Cotronei ⁽¹⁾ su Anfibi e mie (op. cit.) su Cefalopodi, si potesse, in linea generale, dire che esistono stadi ben determinati nei quali bisogna agire per provocare le singole malformazioni, la quistione doveva essere ancora accuratamente analizzata. Una siffatta analisi cercherò di fare in questa Nota.

1. — *Ova tenute in LiCl tra lo stadio di 16 blastomeri e quello di giovani morule con 8 macromeri*: La segmentazione di queste ova procede regolarmente, ma la maggior parte di esse allo stadio di blastula presenta un forte sviluppo del blastocele ed è in seguito incapace di gastrulare, restando in uno stadio paragonabile all'exogastrula di Herbst ⁽²⁾. Al quinto giorno di sviluppo queste exogastrule presentano il polo animale formato da un solo strato di cellule, che forma la volta del blastocele, mentre una grossa massa di macromeri occupa l'emisfero vegetativo, che ha una sezione trasversale più stretta di quella dell'emisfero animale, per cui tutto l'embrione prende l'aspetto di un fungo, con la base corrispondente al polo vegetativo (fig. 1). Queste exogastrule, nelle quali non si osserva alcuna traccia di introflessione, non sono capaci di ulteriore sviluppo e muoiono. Al settimo giorno nelle culture non ne trovo più alcuna viva; permangono invece altri embrioni che hanno più o meno regolarmente gastrulato ⁽³⁾ o che sono simili ai controlli; da questi embrioni, allevati per circa 30 giorni, si originano larvette in massima parte non dissimili dai controlli e qualche forma (scarsa) con malformazioni cefaliche o del faringe.

2. — *Ova tenute in LiCl tra lo stadio di giovani morule con 8 macromeri e quello di giovani blastule*: A spese di queste ova si formano blastule normali e blastule a blastocele più grande. Mentre le prime gastrulano regolarmente le seconde non sono capaci di gastrulare regolarmente, in queste ultime però, verso il quinto giorno di sviluppo (terzo dopo l'azione del LiCl), si forma una piccola introflessione, scavata in mezzo alla massa dei macromeri. In un secondo tempo i micromeri cominciano ad avvolgere i macromeri, ma l'avvolgimento non è regolare, perchè il tappo vitellino è costituito da una massa di macromeri, sporgente fuori, che è quasi strozzata dall'ectoderma che si estende, come di norma, per avvolgere tutto l'ovo (fig. 2). Al settimo giorno, col progredire dello sviluppo e quindi del processo di chiusura del blastoporo, una parte (più o meno grande) dei macromeri resta fuori del blastoporo ed è rigettata mentre l'embrione continua il suo sviluppo (completamento della chiusura del blastoporo, formazione della gronda midollare ecc.). In stadi successivi questi embrioni, se i macromeri rigettati non sono troppi (nel qual caso segue la morte), non

(1) COTRONEI G., « Arch. Ital. de Biol. », vol. 71, p. 83, 1922.

(2) HERBST C., « Mitt. Zool. Stat. Neapel », Bd. 11, p. 136, 1893.

(3) Nel corso della gastrulazione di questi embrioni osservo tutte le anomalie che sono descritte negli esperimenti 2, 3 e trovo anche rarissimi casi di spina bifida.

differiscono dai controlli e dagli embrioni che, in questi stessi allevamenti, hanno seguito sviluppo normale, o quasi, presentando leggere anomalie di gastrulazione; continuando l'allevamento, al 9° giorno trovo rarissimi embrioni con spina bifida, e al 30° giorno, trovo larvette simili ai controlli, altre con malformazioni cefaliche e del faringe.

3. — *Ova tenute in LiCl tra lo stadio di giovane blastula e quello di blastula più avanzata*: Alla fine dell'esperimento queste blastule spesso presentano forte sviluppo del blastoceles, la gastrulazione però avviene e, sebbene

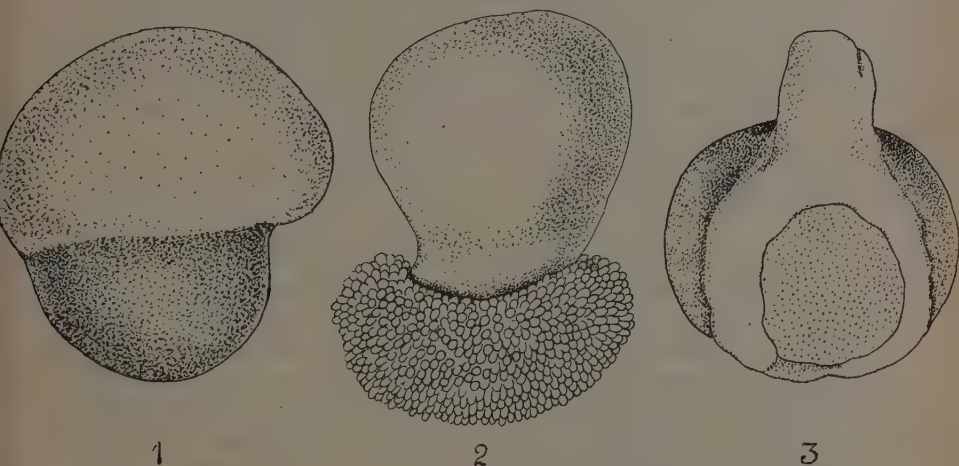


Fig. 1. — Exogastrula (osservata nella serie di esperimenti n. 1).

Fig. 2. — Anomalia della gastrulazione con rigettamento di abbondante materiale macromerico (osservata nelle serie di esperimenti 1 [non comune], 2 [comunissima]).

Fig. 3. — Embrione con spina bifida (osservato nelle serie di esperimenti 1 [rarissimo], 2 [rarissimo], 3 [non comune]).

a volte si osservi, come nell'esperimento precedente, incompleta introflessione dei macromeri e rigettamento di una parte di essi, l'inizio della gastrulazione è quasi normale (poco distinguibile da quello dei controlli), la quantità di macromeri rigettati scarsa, la mortalità quasi nulla. Terminata la gastrulazione, questi embrioni ad irregolare gastrulazione, come quelli che in questi stessi allevamenti hanno regolarmente gastrulato, si sviluppano in maniera apparentemente normale e danno luogo sia a larvette simili ai controlli sia a larvette con malformazioni cefaliche e del faringe. Al nono giorno di sviluppo trovo (rari) embrioni con spina bifida (fig. 3). Sono questi embrioni corrispondenti a quelli osservati da Hertwig⁽¹⁾ in Rana con

(1) HERTWIG O., « Arch. f. mikr. Anat. », Bd. 39, p. 353; 1892.

estremità cefalica unica e tronco, per una zona più o meno lunga, diviso longitudinalmente con corda doppia, e due abbozzi del tubo neurale tra i quali si scorge il tappo vitellino. Questi embrioni sono incapaci di progredire nello sviluppo e muoiono.

4. - *Ova tenute in LiCl tra lo stadio di avanzata blastula e l'inizio della gastrulazione*: Risultato simile a quello delle precedenti esperienze (n. 3).

5. - *Ova tenute in LiCl tra l'inizio della gastrulazione e quando il labbro dorsale del blastoporo è ben netto*: Rari casi di asintassia blastoporale (spina bifida ecc.) che interessano la sola parte più caudale dell'embrione; la massima parte di queste ova gastrula invece normalmente e, negli stadi molto avanzati, si osservano embrioni con malformazioni cefaliche e del faringe accompagnati da embrioni normali.

6. - *Ova tenute in LiCl in stadi successivi*: Tutti gli embrioni di queste esperienze terminano regolarmente la gastrulazione. Negli stadi seguenti si osservano frequentemente malformazioni dell'estremità cefalica e del faringe.

Da questi risultati delle mie esperienze si può concludere che il LiCl⁽¹⁾ in dosi non letali non determina mai modificazioni irreversibili in un organo, che sta sviluppandosi nel momento dell'azione diretta del sale, ma può solo determinare modificazioni di processi che si inizieranno dopo qualche tempo dal momento dell'azione⁽²⁾. Resta quindi dimostrata la necessità di un periodo di latenza dell'azione dell'agente inibitore, che non è capace di modificare irreversibilmente, o irreversibilmente arrestare, un processo embriogenetico in atto nel momento della sua azione.

Un altro fatto risulta dalle mie ricerche: se l'azione inibitrice si esercita in successivi stadi di sviluppo e se le malformazioni ottenibili sono A, B, C, D: un'azione in stadio sufficientemente precoce produce A, B, C, D ed embrioni normali; un'azione in stadio successivo B, C, D ed embrioni normali; un'azione in stadio ancora successivo C, D ed embrioni normali; mentre agendo in stadi ancora successivi possono solo ottenersi D e normali ed infine in stadi molto avanzati è impossibile determinare malformazioni. La proporzione delle singole malformazioni e degli embrioni normali, nei singoli esperimenti, varia con lo stadio nel quale si sperimenta e, forse, con l'intensità dell'agente inibitore.

(1) Un'altra serie di esperienze che ho in corso mi sembra dimostrare lo stesso fatto per MgCl₂ e credo il fatto passibile di larga generalizzazione.

(2) Prendiamo ad es. il caso degli embrioni della 2^a esperienza: in ova poste in LiCl allo stadio di monule con 8 macromeri non può più essere impedita una, sia pur irregolare, gastrulazione: queste ova sono tolte dal LiCl alla fine del secondo giorno di incubazione e la gastrulazione dei controlli si inizia solo alla fine del terzo, onde si conclude che un periodo di latenza di più di 24 ore non è sufficiente a determinare l'arresto completo della gastrulazione.

Queste due conclusioni non sono in antitesi, anzi perfettamente si accordano, con i dati già dai sopracitati autori raccolti e con ricerche che ho in corso nell'influenza di LiCl , MgCl_2 , CaCl_2 , KCl , NaCl sullo sviluppo di *Amphioxus*. Molte considerazioni scaturirebbero dalla combinazione di questi due principî con quanto ho scritto nella discussione dei risultati delle esperienze da me fatte sugli embrioni dei Cefalopodi (op. cit., pp. 136-148), ma una simile trattazione sarà fatta altrove.

Embriologia sperimentale. — *Risultati di esperimenti sullo sviluppo dell'occhio nell'embrione di pollo* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. REVERBERI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Mi propongo in questa Nota di mostrare come i concetti generali applicati alla embriologia causale dell'occhio dei Vertebrati e dedotti specialmente in base agli studi sullo sviluppo degli Anfibi, possano e debbano, almeno in parte, applicarsi anche all'embrione di pollo.

Le ricerche di embriologia sperimentale sull'occhio degli uccelli non sono molto numerose — probabilmente per le difficoltà tecniche — e riguardano piuttosto problemi particolari, il cui studio fu intrapreso con intendimenti e metodi diversi da quelli da me seguiti. Ed è perciò che ho cercato di indagare i vari aspetti della meccanica dello sviluppo dell'occhio del pollo, in senso largo, mediante tipi di esperimenti diversi, eseguiti su un ragguardevole numero d'embrioni. Un'analisi documentata dei risultati ottenuti mi riprometto di presentarla, *in extenso*, in un altro lavoro.

La prima questione di cui mi sono occupato è stata quella di vedere se l'asportazione totale o parziale dell'abbozzo oculare fosse seguita o non da rigenerazione, e ciò in un periodo successivo alla determinazione degli organi, quando cioè i diversi territori corrispondenti ai vari abbozzi — in quanto già definiti — rendono l'embrione *un mosaico di organi autodifferenziabili*. È infatti noto che mentre in tale stadio alcuni organi, asportati sperimentalmente, sono capaci di rigenerarsi tanto *ex novo* quanto da parti di essi lasciate *in situ*, altri organi invece non godono di tale proprietà.

Così mentre il cristallino di tritone adulto — secondo le ricerche di Colucci (1891) ⁽³⁾ e sebbene si tratti piuttosto di un esempio di metaplasia — si forma integralmente dopo l'ablazione parziale o totale di esso, invece, per

(1) Le presenti ricerche furono iniziate nel 1928 per il conseguimento della laurea in Scienze Naturali e continuate nell'anno seguente nel Laboratorio di Zoologia della R. Università di Roma. Al prof. Pasquale Pasquini che mi suggerì le ricerche e mi diresse nel portarle a compimento, esprimo i sensi della più viva gratitudine.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1929.

(3) «Memorie R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna», S. V, t. I.

riferire un esempio più consono a queste ricerche, l'asportazione dell'abbozzo di uno degli arti posteriori nell'embrione di pollo di 65 h. di incubazione, non è seguita mai da rigenerazione, nè totale, nè parziale dell'arto (Spurling, 1923) ⁽¹⁾.

Che l'abbozzo presuntivo dell'occhio sia un sistema autodifferenziabile e cioè capace di evolversi indipendentemente da relazioni meccaniche, nervose e umorali ch'esso contrae con gli altri organi durante lo sviluppo, è stato ampiamente dimostrato dallo Spemann sugli anfibî con tecniche precise e che non lasciano dubbi di sorta. Le ricerche successive di altri autori per mezzo di trapianti dell'abbozzo oculare su embrioni della stessa specie (trapianti omoplastici) o di specie e genere diverso (trapianti eteroplastici) — in differenti momenti dell'ontogenesi — e riferite nelle più recenti bibliografie ⁽²⁾ hanno confermato e precisato il concetto di autodifferenziamento dell'abbozzo stesso, estendendo tale capacità alla vescicola ottica che ha rivelato, altresì, il suo spiccato potere di autoregolazione (Pasquini, 1929) ⁽³⁾.

L'autodifferenziamento dell'abbozzo oculare negli uccelli veniva dimostrato da Danchakoff (1924) ⁽⁴⁾, e Hoadley (1926) ⁽⁵⁾ mediante il trapianto sulla membrana corio-allantoidea di embrioni avanzati nello sviluppo e da Strangewais e Fell (1926) ⁽⁶⁾ con la coltivazione *in vitro* di abbozzi desunti da embrioni di 64 h. di incubazione.

E tale potere di autodifferenziamento dell'abbozzo oculare, in rapporto con la sua determinazione, veniva riscontrato dall'Hoadley non sincrono per tutti i costituenti dell'occhio, il quale anzi, nel suo intero complesso, deve intendersi determinato solo all'epoca della comparsa dei somiti.

Le mie esperienze di asportazione totale della vescicola ottica mi hanno messo in grado di seguire, in molti casi, la sua ulteriore evoluzione e quindi il differenziamento indipendente di essa: la parte ablata non veniva però trasportata e impiantata sulla membrana corio-allantoidea di un altro embrione di stadio più avanzato, ma restava *in situ* e in prossimità dell'embrione stesso operato. Ho potuto così riscontrare che la vescicola ottica primaria può continuare a evolversi indipendentemente dal territorio encefalico anche se non fu posta in rapporto con i vasi o le isole sanguigne che in tale epoca non erano ancora presenti. Inoltre quando l'autodifferenziamento avveniva *in situ* — per successivi fenomeni tendenti a ristabilire una certa contiguità fra le parti allontanate — spesso ho notato che, almeno a questo stadio, nessuna continuità nervosa si stabiliva fra il cervello e l'occhio differenziato: il peducolo ottico era, in questi casi, completamente assente.

(1) «Anat. Rec.», 1923, vol. 26.

(2) Cfr. quella di P. PASQUINI in «Boll. Ist. Zool. R. Univ.», Roma, 1927, vol. V.

(3) «Atti Pont. Acc. Sc. N. Lincei», anno LXXXII, 1929.

(4) «Zeitschr. Anat. u. Entwickl.», 1924, Bd. 74.

(5) «Journ. Exper. Zool.», 1926, vol. 43.

(6) «Proc. R. Soc.», London, B. vol. 100.

Il problema della rigenerazione dell'occhio negli uccelli era stato ag-gredito molto prima di me, dal Barfurth e Dragendorff (1902)⁽¹⁾ e dal Dragendorff (1903)⁽²⁾, ma realmente con un metodo che poteva lasciare seri dubbi sulle conclusioni dedotte. Tanto che, negli anfibî, la ragione dei risultati opposti ottenuti da King (1905)⁽³⁾ e Bell (1907)⁽⁴⁾ proprio a pro-posito del problema della rigenerazione oculare, era stata imputata dal Bell precisamente al metodo imperfetto (e simile a quello usato dal Dragendorff) seguito da King.

Inoltre tali autori si erano serviti come materiale d'esperimento di em-brioni di uccelli in stadio piuttosto avanzato, e cioè quando la vescicola ottica era già introflessa in calice e il cristallino separato o in via di sepa-razione dall'epidermide. Ora è ben noto il fatto che esiste uno stretto le-game — durante lo sviluppo — fra il fattore tempo e il potere rigenerativo delle parti, e che cioè questo potere è tanto più grande quanto più giovane è lo stadio su cui si opera.

Mi sono chiesto quindi se in conformità di questo fatto, fosse stato possibile ottenere processi rigenerativi più attivi e più profondi di quelli messi in evidenza dal Dragendorff ed è perciò che eseguii le mie operazioni su embrioni a vescicola ottica primaria, sia quando essa è già ben delineata, sia quando si presenta appena come una leggera estroflessione laterale encefalica.

Ho eliminato, innanzi tutto, l'uso dell'ago arroventato per distruggere il territorio oculare, come era stato fatto in passato dagli altri autori, ed ho seguito un metodo di tecnica, tentato, ma abbandonato da essi per la difficoltà d'impiego, e certamente superiore all'uso dell'ago rovente: ho cioè tagliato la vescicola ottica mediante forbicine da iridectomia. I vantaggi principali di questo metodo possono ridursi ai seguenti: 1° asportazione precisa e completa del territorio in esperimento; 2° determinazione dei li-miti della lesione; 3° realizzazione delle condizioni ideali per la rigenera-zione, per l'esclusione di fattori possibili inibitori del processo e consistenti specialmente nella diffusione di sostanze tossiche che si originano dal ter-ritorio necrotizzato (ostacolo fisiologico).

Nelle esperienze di Barfurth e Dragendorff la zona oculare necrotizzata rimaneva invece *in situ* e agiva sia come ostacolo meccanico, sia come osta-colo fisiologico alla rigenerazione; inoltre la localizzazione dei limiti della lesione risultava imprecisa per le stesse condizioni dipendenti dall'uso del-l'ago riscaldato.

Per una giusta ponderazione della diversità del metodo, si ricordino i differenti risultati ottenuti, negli anfibî, da Bell e da King e più sopra accennati.

(1) « Verh. Anat. Ges. in Halle », 1902.

(2) « Inaug. Diss. », Rostock, 1903.

(3) « Arch. f. Entwickl.-Mech. », 1905, Bd. 19.

(4) « Arch. f. Entwickl.-Mech. », 1907, Bd. 23.

Le mie conclusioni — per ciò che riguarda il problema della rigenerazione in generale — convengono pienamente con quelle degli autori più volte ricordati, e le ampliano in quanto accertano che *già nello stadio di 7 somiti, nell'embrione di pollo, non è possibile alcuna rigenerazione del territorio oculare dopo la sua asportazione totale*. Se più precocemente nello sviluppo ciò possa avvenire, dalle mie ricerche non è lecito indurlo, ma — per altre considerazioni dedotte dall'esperimento — non pare probabile.

Questi risultati — analogicamente — mostrano come le conclusioni opposte cui si era giunti a riguardo della rigenerazione totale del territorio oculare negli anfibî, non posino soltanto — secondo quanto sostiene il Bell — su una ragione di metodo; e di ciò ci danno una definitiva conferma i risultati di Pasquini (1928)⁽¹⁾ che, in vari tipi di esperimenti condotti sugli anfibî della stessa specie usata dal Bell, ha dimostrato che l'asportazione totale della vescicola ottica non è mai seguita da rigenerazione.

Risultati che serviranno a lumeggiare meglio il comportamento dei fenomeni regolativi nel territorio oculare, furono da me raggiunti con un tipo di operazione finora non applicato mai all'embrione di pollo e consistente nell'ablazione del territorio encefalico interposto fra gli abbozzi oculari. Mi riserbo di darne particolareggiata esposizione nel lavoro in preparazione.

Per ciò poi che riguarda la morfogenesi del cristallino, è ben conosciuto il suo comportamento negli anfibî. Infatti, mentre in alcune specie, la sua evoluzione è dipendente dal calice in modo che senza di esso l'ectoderma lentogeno non si trasforma in lente, e, invece, pezzi di epidermide indifferente in presenza del calice si differenziano in cristallino; al contrario, in altre specie, il cristallino è autodifferenziabile.

Negli uccelli — secondo Danchakoff (1926)⁽²⁾ e in seguito al trapianto di ectoderma cefalico o territorio oculare sulla membrana corio-allantoidea di embrioni in sviluppo assai avanzato — qualsiasi pezzo di ectoderma ha la capacità di trasformarsi in cristallino se è posto in presenza del calice ottico, e, viceversa, il placode della lente non si trasforma in cristallino se non è in presenza della vescicola ottica.

Negli embrioni da me studiati, tanto nei casi di rigenerazione parziale del calice ottico, quanto nei casi di differenziamento spontaneo e indipendente del territorio oculare, non ho mai trovato un caso di calice senza cristallino, nè di cristallino senza calice: d'altra parte essendo stato con certezza asportato completamente l'ectoderma lentogeno, bisogna ammettere che anche altre porzioni dell'ectoderma cefalico siano capaci, in presenza di un calice, di trasformarsi in cristallino. Naturalmente sono da eccettuarsi quei casi in cui la formazione della lente è avvenuta dal margine del calice ottico.

(1) « Monit. Zool. Ital. », 1928, a. XXXIX, nn. 3-4.

(2) *Contr. to Embryology*, « Carnegie Inst. v. Washington, n. 94.

Assai interessante mi sembra il riferire un reperto singolare presentatosi nei miei esperimenti, poichè può meglio indicare i rapporti che intercedono fra vescicola ottica e cristallino. In uno degli esemplari operati di ablazione totale della vescicola ottica primaria, la zona tagliata si è evoluta indipendentemente da qualsiasi rapporto nervoso: dall'ectoderma sovrapposto alla vescicola si è differenziato un cristallino il quale, pur mostrando netta la trasformazione delle sue cellule in fibre, non si è invaginato, ma ricopre il calice stesso sotto forma di una piastra ispessita. Le condizioni per le quali il cristallino non si è introflesso si devono ricercare nella forma del calice, che presenta i foglietti di cui è costituito invaginati l'uno nell'altro come normalmente, ma con i margini vicinissimi fra loro: il cristallino quindi non ha potuto introflettersi nell'ampia cavità. La quale per altro non è completamente libera perchè dai margini del foglietto retinico e corioideo si è avuta la formazione di una piega riflessa verso l'interno, la quale, per l'allontanamento delle due parti di cui è continuazione, ha presa una forma vescicolare. Tralasciando la questione se si debba o no interpretare questo fatto come un accenno di formazione metaplasica di cristallino dai margini del calice, ciò tuttavia rende ragione delle condizioni meccaniche della mancata introflessione dell'ectoderma lentogeno: il quale pur avendo subito la trasformazione solita, tuttavia non ha assunto la forma vescicolare che ha di regola.

Da ciò adunque risulta che la vescicola ottica deve intendersi, anche nel pollo, come il determinante della trasformazione dell'ectoderma lentogeno in cristallino (individualizzabile come tale per la presenza delle fibre) e, insieme a condizioni meccaniche, anche della sua invaginazione; il che dimostra — insieme con i risultati già sopra brevemente esposti — come i fatti principali riguardanti la meccanica dello sviluppo dell'occhio, desunti specialmente dallo studio degli anfibî, siano in gran parte applicabili anche agli embrioni di pollo.

Embriologia sperimentale. — *L'otocisti degli Anfibi anuri considerata come sistema a mosaico. Dimostrazione sperimentale*⁽¹⁾. Nota II⁽²⁾ di C. GUARESCHI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

In una precedente Nota⁽³⁾ ho detto che l'otocisti, o vescicola otica primaria, degli Anfibi anuri, può essere considerata, nel suo sviluppo, come un sistema a mosaico. Ho dato anche un breve cenno bibliografico della questione.

Ora voglio occuparmi più particolarmente del concetto di equipotenzialità e di mosaico, e sopra tutto delle prove sperimentali che a favore di tale ultima concezione si possono portare.

Sotto tale punto di vista due sono gli ordini di esperienze che si possono eseguire: quelle di asportazione parziale, e quelle di fusione. È chiaro che se da una porzione di un individuo o di un abbozzo di un organo, o se da due individui o da due abbozzi di organi completi, o leggermente lesi di cui si provochi la fusione, si sviluppa un individuo od un organo completo e regolare nella forma, se non nella grandezza, allora si potrà parlare di sistemi equipotenziali; nel caso contrario bisognerà ammettere il concetto di sistema a mosaico⁽⁴⁾. Di tali esperienze si sono serviti, fra gli altri, il Driesch per le uova degli Echinodermi, il Roux per quelle di Rana, l'Harrison per gli abbozzi degli arti, e, ultimamente, il Pasquini per l'occhio.

Per l'otocisti tali prove non sono state date con sicurezza nè dallo Spemann⁽⁵⁾, nè dal Levy⁽⁶⁾, i quali con traumi e lesioni apportati sulla parte anteriore di neurule di Triton, ottennero otocisti asimmetriche e malformate, e nemmeno dallo Streeter⁽⁷⁾ che, trapiantando una otocisti allo stadio di coppa otica, accanto ad un'altra, non ottenne la fusione. Di questi reperti si sono serviti alcuni autori per sostenere lo sviluppo a mosaico dell'otocisti.

Ma tali conclusioni sono andate assai più oltre di quanto i risultati sperimentali ottenuti permettessero di dedurre: nelle esperienze dei primi

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia Comparata della Regia Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1929.

(3) «Rend. R. Acc. Lincei», vol. IX, serie 6^a, pp. 666-668, 1929.

(4) Vedi PASQUINI, («Rend. R. Acc. Lincei», vol. IX, serie 6^a, pp. 99-104, 1929 e «Atti Pont. Acc. Sc. Nuovi Lincei», anno 82, pp. 103-115, 1929) ove trovasi anche una estesa bibliografia sull'argomento.

(5) «Arch. f. Entw. mech. d. Org.», Bd. 15, 1902.

(6) Idem, Bd. 20, 1906.

(7) «Anat. Rec.», vol. III, 1909.

due le condizioni spaziali erano troppo profondamente mutate e i risultati furono tutt'altro che esaurienti; quanto alla incapacità di fondersi, quando anche fosse assolutamente dimostrata, può essere dovuta a molte cause (meccaniche, di spazio, di rapida cicatrizzazione, di repulsione, ecc.) che non hanno nulla a che fare con la nostra questione. D'altra parte tale incapacità non esiste, come dirò fra breve. E che la questione non fosse risolta, lo dimostra il fatto che la Kaan⁽¹⁾, proprio di recente, si è proposta nettamente questo problema, senza per altro riuscire, come ho già detto⁽²⁾, e come lei stessa riconosce, a risolverlo con sicurezza.

Già il primo ordine di prove, quello della asportazione di parti, nelle esperienze che ho eseguito a tale proposito, porta a considerare l'otocisti come un sistema a mosaico. Una vescicola otica, a cui si sia asportata una parte, si chiude a livello della ferita con una parete monostratificata di epitelio pavimentoso, frutto della cicatrizzazione. È bene notare però che tale caso limite si ottiene in Bufo, perchè in Rana, nella quale, come ha già osservato lo Spirito⁽³⁾, i processi rigenerativi sono di molto maggior entità, la vescicola lesa si arrotonda, assumendo una forma quasi normale, senza però giungere mai alla rigenerazione delle varie formazioni che erano contenute potenzialmente nella parte asportata (*ductus endolymphaticus*, canali semicircolari, zone di senso).

Caratteristiche sono le esperienze di trapianto delle mezze vescicole asportate. In tali casi si sviluppano le formazioni che potenzialmente erano contenute nella parte trapiantata, e quelle soltanto. Abbiamo così la prova chiarissima che l'otocisti è un sistema a mosaico, e contemporaneamente il controllo rigoroso dell'operazione, poichè una parte delle formazioni si osservano nel donatore, l'altra nell'ospite. Così in una di queste coppie ho trovato il *ductus endolymphaticus* nel donatore, e i tre canali e la zona di senso nell'ospite; in un'altra coppia la vescicola del donatore (trattandosi di Rana si è formata una vescicola quasi normale in forma) presenta il *ductus* e la zona di senso, quella dell'ospite i tre canali semicircolari.

Tali esperienze quindi affrontano in pieno, e lo risolvono in senso positivo, anche il problema della pre-localizzazione delle varie formazioni nella vescicola otica primaria.

Anche il secondo ordine di esperienze (fusioni) ci porta a conclusioni identiche a quelle che si possono ricavare dalle asportazioni parziali.

Oltre al caso di cui ho già parlato nella mia Nota precedente⁽⁴⁾ ho adesso ottenuto altri due casi di fusione, ambedue in Rana. Il primo è un caso di fusione parziale, in cui le due otocisti, unite cranialmente, sono separate caudalmente, ma rimangono in comunicazione per mezzo dei canali

(1) « J. Exp. Zool. », vol. XLVI, 1926.

(2) GUARESCHI, op. cit.

(3) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. IX, serie 6^a, pp. 797-799, 1929.

(4) Loc. cit.

semicircolari laterali, poichè quello dell'otocisti trapiantata sbocca in quello della normale; il secondo è un caso di fusione totale, che, come risultato, ha dato una otocisti quasi normale per la forma complessiva; leggermente ipertrofizzata, ma provvista di cinque canali semicircolari, di due zone sensitive, e di un *ductus endolymphaticus*. In questo reperto le due otocisti, completamente fuse e compenstrate, hanno conservato la proprietà di dare ognuna le proprie formazioni senza inibirsi vicendevolmente. Il canale semicircolare mancante è il dorsale dell'otocisti trapiantata della quale manca anche il *ductus endolymphaticus*. Ambedue queste formazioni dovevano presumibilmente derivare dalla zona che è stata lesa.

Perchè è bene tener presente che, pur esistendone la possibilità, la fusione avviene tuttavia con grande difficoltà: per ottenerla è necessario ledere ambedue le otocisti e metterle in stretto contatto per le due parti cruenti. È evidente che in tal modo si deve portar via qualche parte delle future otocisti. Anche con tutte queste precauzioni l'esperienza non è di sicura riuscita: ho ottenuto un caso di due otocisti lese (e che fossero lese lo dimostra la mancanza di alcune delle loro parti) che pur presentando ben differenziate le loro formazioni, e pur essendo continue nelle pareti, sono rimaste separate per mezzo di una esilissima membrana monostratificata di cellule pavimentose, così che le loro cavità non sono comunicanti.

Con i risultati di questi tipi di esperienze, la questione dello sviluppo a mosaico dell'otocisti, già sospettata, ma non mai sicuramente provata, resta definitivamente dimostrata:

a) *con la ripetizione di esperienze già eseguite dalla Kaan (asportazioni parziali);*

b) *con esperienze non mai eseguite sull'otocisti, ma già usate per altri organi (fusioni);*

c) *con esperienze assolutamente originali (trapianto di parti); resta pure dimostrato la prelocalizzazione delle varie formazioni nella vescicola otica primaria.*

Concludendo:

1° L'asportazione di una parte della vescicola otica porta alla formazione di una semplice parete monostratificata di cicatrizzazione che la chiude (Bufo), o alla chiusura e alla regolazione in forma dell'otocisti (Rana), senza che mai si rigenerino però le formazioni che erano potenzialmente contenute nella parte asportata;

2° Il trapianto di una parte dell'otocisti porta allo sviluppo delle formazioni che erano in essa potenzialmente contenute, e di esse sole.

3° I casi di mancata fusione dell'otocisti non sono sufficienti a dimostrare il suo sviluppo a mosaico;

4° La fusione di due otocisti, più o meno complete, può giungere fino alla formazione di una vescicola unica quasi normale di forma (Rana) ma provvista di tutte le formazioni che in ciascuna delle due parti erano potenzialmente contenute.

Fisiologia. — *Il potere regolatore della reazione*⁽¹⁾ *dell'acqua di mare*⁽²⁾. Nota di R. MARGARIA, presentata⁽³⁾ dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Le accurate analisi compiute, già molti anni or sono, sulla composizione dell'acqua del mare, hanno messo in rilievo l'interessante fatto di una forte analogia esistente tra quest'acqua ed il sangue.

Questa analogia soprattutto è notevole per il sangue di specie inferiori marine e va attenuandosi passando agli animali superiori e ai vertebrati.

La seguente tabella del contenuto percentuale delle varie sostanze nell'acqua di mare e nel siero di sangue dei mammiferi, riportata da Macalum, mette in evidenza particolare l'analogia accennata.

TABELLA

Composizione dei sali nell'acqua di mare e nel siero di sangue (°/o):

		Acqua di mare	Siero di sangue
Sodio	Na	30.59	39
Magnesio	Mg	3.79	0.4
Calcio	Ca	1.20	1
Potassio	K	1.11	2.7
Cloro	Cl	55.27	45
Solfatione	SO ₄	7.66	—
Carbonatione	CO ₃	0.21	12
Bromo	Br	0.19	—
Acido fosforico	H ₃ PO ₄	—	0.4

Ciò indusse parecchi autori a supporre che l'acqua di mare fosse un liquido fisiologicamente equilibrato, e molte ricerche su varie specie animali vennero compiute in questo senso.

In seguito a prove sull'azione dell'iniezione endovenosa di acqua di mare opportunamente diluita, il Quinton giunge alla conclusione che l'acqua di mare è fisiologicamente equilibrata per i mammiferi e che pre-

(1) Intendo per «regolatore della reazione» quello che si intende col termine tedesco «Puffer», inglese «buffer», francese «tampon».

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino - Sezione Marina di Trieste.

(3) Nella seduta del 21 aprile 1929.

senta vantaggi superiori a quelli delle soluzioni fisiologiche artificiali. A risultati consimili per altre specie animali giungono Loeb⁽¹⁾,⁽²⁾, Frederiq⁽³⁾, Viale⁽⁴⁾, McClendon⁽⁵⁾, Ziganow⁽⁶⁾. Altri autori riscontrano invece una inferiorità dell'acqua di mare rispetto alle soluzioni fisiologiche comuni nel mantenere la funzione di organi sopravvivenenti (Hèdon e Fleig⁽⁷⁾, Ghirardi⁽⁸⁾).

A parte il fatto se l'acqua di mare sia, oppure no, un liquido fisiologicamente equilibrato più di quanto lo siano le soluzioni fisiologiche comuni, in considerazione della grande importanza che ha l'acqua di mare nella fisiologia e nella applicazione che se ne è fatta nelle citate ricerche e in molte altre, mi è parso non privo di interesse studiare il potere regolatore della reazione dell'acqua di mare, tanto più che a questo supposto potere regolatore erano stati attribuiti alcuni fenomeni che si manifestavano per azione dell'acqua di mare stessa. Così ad esempio Loeb⁽²⁾ trova che le uova di riccio di mare non maturano in una soluzione di van t'Hoff se non vi si aggiungono tracce di NaOH, mentre maturano bene nell'acqua di mare: siccome la soluzione di van t'Hoff ha, come l'acqua di mare, una concentrazione di idrogenioni vicina alla neutralità, questo autore attribuisce questo fenomeno a una mancanza del potere regolatore della reazione del liquido di van t'Hoff, la cui reazione si sposterebbe rapidamente verso l'acidità all'inizio del processo di maturazione delle uova; egli suppone che l'acqua di mare abbia invece un notevole potere regolatore che impedisce questo spostamento della reazione. E Viale⁽⁴⁾, che riscontra nei preparati di sistema nervoso centrale della rana perfusi con acqua di mare, resa isotonica, una maggior sopravvivenza e una maggiore vivacità di quella riscontrata nei preparati trattati con liquido di Ringer, pone, tra le altre, l'ipotesi che l'azione favorevole dell'acqua di mare potrebbe essere dovuta ad una resistenza maggiore allo spostamento della reazione.

(1) LOEB J., *Ueber die relative Giftigkeit von destilliertem Wasser, Zuckerlösungen und Lösungen von einzelnen Bestandtheilen des Seewassers für Seetiere*. «Pflügers Archiv», 97, p. 394, 1903.

(2) LOEB J., *Ueber die Reaktion des Seewassers und die Rolle der Hydroxylionen bei der Befruchtung der Seeigelleier*. «Pflügers Arch.», 99, p. 637, 1903.

(3) FREDERIQ L., *Action du milieu marin sur les invertébrés*. «Arch. Int. de Physiol.», 19, p. 309, 1922.

(4) HERLITZKA A., *Sui liquidi atti a conservare la funzione dei tessuti sopravvivenenti*, Nota III; VIALE G., *Azione di alcuni solventi dei lipoidi su la sopravvivenza del sistema nervoso nelle rane*. «Arch. di Fisiol.», VIII, p. 537, 1910.

(5) MCCLENDON J. F., *The composition especially the hydrogenion concentration of sea water in relation to marine organism*. «Journ. of Biol. Chemistry», 28, p. 135, 1917.

(6) ZIGANOW S. W., *Stellt Meerwasser eine physiologisch e äquilibrirte Lösung für isolirte Organe der Warmblüter dar?* «Biochem. Zeitschr.», 196, p. 333, 1928.

(7) HÉDON et FLEIG, *L'eau de mer constitue-t-elle un milieu nutritif capable d'entretenir le fonctionnement des organes réparés du corps*. «C. R. Soc. de Biol.», 57, p. 306, 1905.

(8) GHIRARDI E., *È l'acqua di mare un «mezzo fisiologico» per i mammiferi?* «Arch. di Fisiol.», XXIV, p. 176, 1926.

Da tutte queste considerazioni appare quanto sia importante conoscere la resistenza allo spostamento della reazione dell'acqua di mare, tanto più che sappiamo che il pH dell'acqua di mare ha un valore discretamente diverso da quello dei liquidi dell'organismo, di 8-8.4 circa. E poichè l'acqua di mare, usata come liquido di perfusione, si arricchisce subito di CO_2 non appena giunge in contatto coi tessuti, è interessante conoscere anche quale variazione subisce nel pH quando venga messa in equilibrio con aria a varia tensione di CO_2 , e quale sia il suo potere regolatore in tali condizioni.

Una curva di titolazione dell'acqua di mare nella regione alcalina, eseguita Haas⁽¹⁾, con determinazioni di pH di acqua di mare alla quale veniva aggiunta una quantità varia di una soluzione 2.5 N di NaOH: questa autrice osservò che la concentrazione di idrogenioni dapprima decresce rapidamente fino ad un pH di 10 circa, di poi sempre più lentamente per la precipitazione dell'idrossido di magnesio; quando questo è stato tutto precipitato (pH = 10.4 circa), l'aggiunta di alcali determina un'altra caduta nella $[\text{H}\cdot]$, ma questa è presto frenata dalla precipitazione dell'idrossido di calcio. Queste ricerche vennero però compiute con una soluzione troppo concentrata di NaOH, sì da portare immediatamente il pH a valori che presentano un interesse molto indiretto, per gli scopi fisiologici, e senza analizzare la curva fra i valori di pH 8 e 10, che ci avrebbe interessato più da vicino.

Nessuno, d'altra parte, a quanto mi risulta, si è occupato del potere regolatore, il cui studio, specialmente comparativo, col potere analogo dei liquidi dell'organismo, mi pare particolarmente interessante. Ho perciò voluto esaminare, nella Sezione Marina di questo Laboratorio, le curve di titolazione dell'acqua di mare con soluzioni diluite di alcali e acidi forti.

METODO.

L'acqua di mare di cui mi sono servito, venne raccolta alla superficie al largo del golfo di Trieste il dì 8 del gennaio 1929, e le prove vennero eseguite dopo 3-4 giorni: nel frattempo l'acqua venne conservata in una bottiglia paraffinata, ermeticamente chiusa, in presenza di tracce di toluolo.

Di quest'acqua si misurò la densità e si dosarono i cloruri; da questi dati venne calcolato, con le formule di Knudsen⁽²⁾, che stabiliscono le relazioni tra densità, contenuto in cloro e salinità, il contenuto in sali. I caratteri di quest'acqua sono i seguenti:

(1) HAAS A. R., *The effect of the addition of alkali to sea water upon the hydrogenion concentration*. « Journ. of Biol. Chemistry », 26, p. 515, 1916.

(2) PICOTTI M., *Il regime fisico-chimico delle acque nello stretto di Messina*. « Atti del II Congr. Naz. Chimica pura ed appl. », Palermo, 1926.

Densità a 13°	1.0302
» » 0°	1.032
Cloro	22.1 ‰
» riferito in NaCl	36.4 ‰
Salinità	39.9 ‰

Le curve di titolazione vennero eseguite aggiungendo all'acqua di mare quantità note di sol. N/10 di NaOH e HCl ed il pH misurato col metodo degli indicatori col colorimetro Hellige.

Gli indicatori adoperati furono i seguenti:

Bleu di bromofenolo	per pH da	3.0 a	4.6
Rosso di metile	» » »	4.4 »	6
Rosso di bromocresolo	» » »	5.2 »	6.6
Metanitrofenolo	» » »	6.8 »	8.4
Fenoltaleina	» » »	8.6 »	10.2
Giallo alizarino R	» » »	10.4 »	12

I valori riportati nella tabella e nella curva sono corretti per l'errore dovuto ai sali, indicato dalle tabelle riportate su « *Tabulae biologicae* ».

Il potere regolatore definito da van Slyke⁽¹⁾ con la formula dB/dpH , ove con B si indica la quantità di grammi equivalenti di base o di acido aggiunti alla soluzione, è dato dalla quantità in gr. equivalenti di acido o di base che, aggiunti ad un litro di soluzione, determinano una variazione di 1 nel pH.

RISULTATI SPERIMENTALI.

L'acqua di mare ha inizialmente un potere molto piccolo di resistere allo spostamento della reazione, come si può vedere nella seguente tabella e dalla curva di titolazione della fig. 1: bastano infatti quantità piccolissime di acido o di alcali forti per determinare uno spostamento notevolissimo del pH. Questo fatto si verifica però soltanto nella parte acida e nella prima parte della zona alcalina; infatti, a partire da pH 10 circa a pH 11 si osserva che si possono aggiungere quantità relativamente molto elevate di NaOH senza che il pH subisca variazioni molto rilevanti; corrispondentemente aumenta in questa zona il valore dB/dpH , come si può vedere nel diagramma riportato in fig. 2. Occorre però notare che questo potere dell'acqua di mare di neutralizzare le basi forti senza un notevole

(1) VAN SLYKE D., *On the measurement of buffer values and on the relationship of the buffer value to the dissociation constant of the buffer and the concentration and reaction of the buffer solution.* « Journ. of Biol. Chemistry », 52, p. 525, 1922.

cambiamento del pH, non è un potere regolatore vero e proprio quale si intende quello dovuto alla liberazione di un acido debole dal suo sale con una base forte, per opera di un acido forte; ma è dovuto al fatto che, a mano a mano che si aggiunge la base forte, si ha formazione di un idrossido di magnesio che precipita.

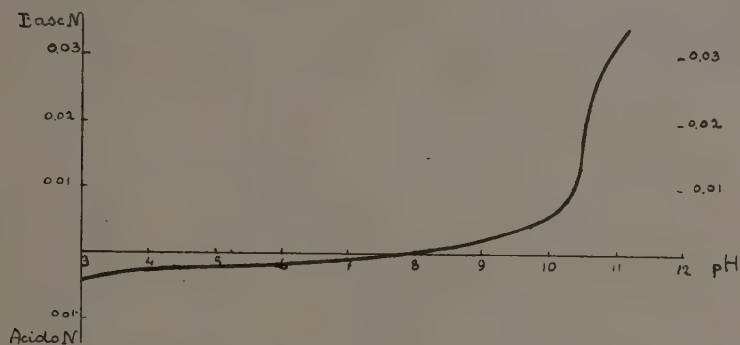


Fig. 1. — Curva di titolazione dell'acqua di mare.

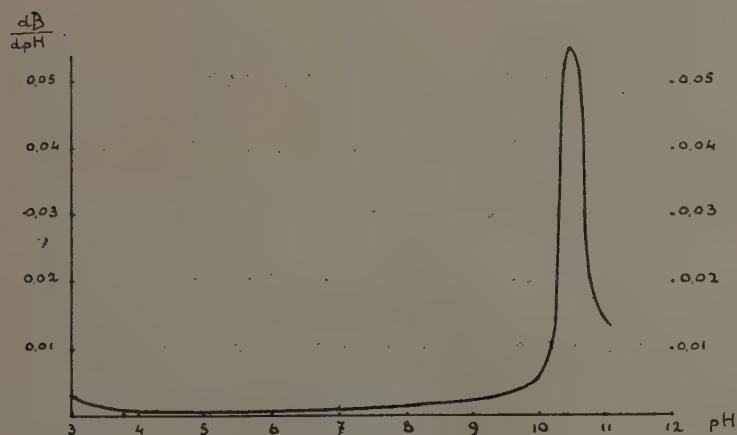


Fig. 2. — Potere regolatore della reazione dell'acqua di mare.

Nell'inizio dell'aggiunta di NaOH, si ha un certo spostamento della reazione, per modo che, portando la concentrazione dell'NaOH a un valore di N/200, il pH si sposta fino a circa 9.8; poi, per aggiunte di NaOH fino a N/30, lo spostamento non arriva che a un $\text{pH} = 11$. Il primo tratto della curva è probabilmente dovuto al fatto che una parte del $\text{Mg}(\text{OH})_2$, che si forma, rimane in soluzione. Per aggiunte ulteriori di NaOH, si ha

precipitato, e ciò corrisponde alla curva ascendente, finché tutto il magnesio sia fissato, dopo di che l'aggiunta ulteriore di NaOH sposta la reazione come se fosse fatto con una soluzione priva di magnesio.

Si verifica in questo caso un fenomeno analogo a quello che si verifica per il sangue e per le soluzioni di sali dell'acido carbonico, in genere per ciò che riguarda la resistenza allo spostamento della reazione da parte degli acidi, dove si osserva che, per aggiunta di acidi, non solo si ha la liberazione di un acido debolissimo, l'acido carbonico, ma questo si allontana anche subito dalla soluzione sotto forma di CO_2 .

TABELLA

Normalità di B	pH
0.0333	11.05
0.0311	10.95
0.0286	10.8
0.0259	10.7
0.0231	10.6
0.0200	10.5
0.0167	10.5
0.0131	10.5
0.0091	10.3
0.0048	9.8
0	7.8
— 0.0018	5.6
— 0.0033	3.35

Il potere regolatore dell'acqua di mare è molto basso relativamente a quello dei liquidi organici degli organismi superiori. Vediamo infatti che, per un pH corrispondente a 7.4, il potere non è che 0.0016, mentre il potere del siero di sangue è 0.0206, secondo van Slyke, cioè più che dieci volte maggiore. Sempre secondo van Slyke, la quota di potere regolatore dovuta al sistema acido carbonico-bicarbonati del siero di sangue, sarebbe di 0.0022, mentre il resto è dovuto alle proteine: vediamo quindi che il potere regolatore totale dell'acqua di mare, è ancora notevolmente inferiore a quello della quota dovuta ai bicarbonati nel sangue.

Fisiologia. — *Inanizione parziale di ratti albini con olio di oliva somministrato con o senza aggiunta di vitamine.* Nota di A. GALAMINI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Ricerche precedenti hanno mostrato che ratti albini, alimentati con dieta iperlipinica, aproteinica e acaroidrosica, con aggiunta di vitamine resistono all' inanizione parziale lungo tempo, 70-80 giorni, in rapporto con la temperatura ambiente, raggiungendo anche la perdita del 50-60 % del peso iniziale. Con le presenti ricerche si è voluto studiare sugli stessi animali l'effetto della inanizione parziale senza aggiungere vitamine, essendo noto che questi importanti fattori alimentari esercitano la loro complessa azione sul metabolismo di tutti e tre i gruppi principali di alimento e sul metabolismo minerale oltre che sul normale funzionamento dell'apparato digerente e sulla resistenza naturale degli animali alle infezioni. Agli animali in esperimento si somministrò a volontà olio di oliva mescolato con carta da filtro grattugiata nella proporzione di gr. 8:1. Le vitamine erano somministrate nel seguente modo: su 1 gr. di cavolo fresco si spalmavano gr. 0.2 di burro e si aggiungevano gr. 0.2 di lievito di birra, finemente triturato, gr. 0.2 della miscela salina di Osborne e 8 gocce di succo di limone. Ai ratti che non ingerivano vitamine si somministravano ogni giorno gr. 0.2 di ovoalbumina secca che, come il lievito di birra contiene tutti gli aminoacidi indispensabili per la vita e per l'accrescimento. L'olio di oliva, secondo le ricerche di Langstein e Edelstein e di Abderhalden contiene soltanto in piccola quantità la vitamina iposolubile. Ogni giorno si misurava il peso degli animali, del cibo ingerito, delle feci e la quantità di acqua ingerita e di urina. I risultati ottenuti furono i seguenti:

Ratto A 1, maschio. — Del peso iniziale di gr. 196, fu tenuto in esperimento dal 16 gennaio 1928 al 14 febbraio 1928. Prima di iniziare le ricerche fu alimentato per alcuni giorni in laboratorio con pane, verdura e formaggio, si mantenne sempre vispo e mangiò abbondantemente. Quando si iniziò l' inanizione parziale senza aggiunta di vitamine pesava gr. 189, in 27 giorni perse gradatamente di peso e poi morì, dopo essere diminuito del 30.6 %; ingerì in media cibo corrispondente a calorie 0.25, 0.30 per gr. di peso, e due cc. di acqua. Le feci oscillarono tra gr. 0.4 e 1.1. Le urine si ridussero ben presto a poche gocce e furono sempre acide senza presenza di albumina. All'autopsia il ratto mostrò bronco-polmonite a sinistra.

Ratto A 2, adulto maschio. — Fu tenuto in esperimento dal 20 febbraio 1928 al 10 marzo 1928. Alimentato per alcuni giorni con pane, verdura, formaggio, si mantenne in buone condizioni di salute. All'inizio della inanizione parziale con olio di olive senza vitamine pesava gr. 218. Dall'11° giorno di inanizione ingerì giornalmente oltre l'olio gr. 0.2 di albumina d'uovo secca. Ingerì cibo in media in quantità corrispondente a calorie 0.3 per gr. di peso e per giorno. Al quinto giorno di esperimento le feci divennero oleose. Esse variarono da gr. 0.5 a 1.4. Le urine acide e senza albumina si ridussero presto

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

a poche gocce. Il ratto diminuì gradatamente di peso e al 18° giorno dopo avere perduto il 29.3 % del peso iniziale morì. Al terzo giorno d'esperimento si notò notevole dispnea che perdurò per 4 giorni e ricomparve al 13° giorno e si mantenne fino alla morte. Alla autopsia si osservarono bronco-polmonite e otite media purulenta bilaterale.

Ratto A 3, femmina adulta. — Fu tenuta in esperimento per 43 giorni dal 13 marzo 1928 al 28 aprile 1928. Nei primi due giorni fu alimentata con pane e formaggio e verdura che mangiò abbondantemente mostrandosi sempre vivace. Il 6° giorno pesava gr. 156 e le si somministrò olio di oliva più carta da filtro e gr. 0.2 di ovalbumina secca. Dopo 41 giorni di esperimento l'animale morì avendo perduto il 48.7 % del peso iniziale. Il cibo fu ingerito in media in proporzione di 0.3 calorie per giorno e per grammo di peso. L'acqua fu ingerita in proporzione di 5 cc. per giorno. Le feci oscillarono fra gr. 0.4 e 1.3 e divennero oleose al 3° giorno di inanizione parziale. Le urine nei primi giorni si ridussero a poche gocce, furono sempre acide e prive di albumina. Il ratto fino al 30° giorno di esperimento si mantenne quieto, poi fino alla morte fu irrequietissimo. All'autopsia i polmoni erano normali; a destra si osservava otite media purulenta.

Ratto B 1, Femmina. — Fu tenuta in esperimento dal 16 gennaio 1928 al 14 febbraio 1928. Pesava inizialmente gr. 149. Per alcuni giorni fu alimentato con pane, verdura e formaggio e poi con olio di oliva più carta e vitamine. Queste erano somministrate a parte ed ingerite subito. L'animale diminuì progressivamente di peso e dopo 26 giorni, avendo perduto il 18.6 % del peso iniziale morì. Ingerì cibo in media pari a calorie 0.3 per gr. di peso e per giorno e in media cc. 5 di acqua. Le feci divennero oleose fin dal terzo giorno di esperimento e variarono da gr. 0.4 a gr. 1.25. Le urine nei primi cinque giorni furono di 1-2 cc. poi si ridussero a poche gocce. Nel giorno precedente la morte il ratto mostrò modifica dispnea. All'autopsia si osservò otite media purulenta e bronco-polmonite bilaterale.

Ratto B 2, maschio adulto. — Fu tenuto in esperimento 85 giorni dal 20 febbraio 1928 al 14 maggio 1928. All'inizio pesava gr. 187. Alimentato per due giorni con pane, formaggio e verdura si mostrò vivace e mantenne il peso. Al terzo giorno gli si somministrò olio con vitamine. Diminuì gradatamente di peso e dopo 83 giorni, dopo aver perduto il 55.6 % del peso iniziale morì. Nei primi 55 giorni ingerì cibo in proporzione di calorie 0.3 per gr. di peso e per giorno. Nei 28 giorni seguenti in proporzione di calorie 0.25. Le feci oleose variarono da gr. 0.2 a 1.4. Le urine furono sempre scarissime, acide, senza albumina. Il ratto si mantenne calmo per lungo tempo senza notevole perdita di pelo. Il 65° giorno fu irrequietissimo e perse molto pelo, poi dopo due giorni tornò calmo e vi rimase fino alla morte. All'autopsia si osservarono postuni di bronco-polmonite e otite media purulenta bilaterale.

Confrontando i risultati riuniti nella seguente tabella, dei ratti A 1, A 2 e B 1, i quali ebbero bronco-polmonite:

Giorno	Perdita di peso		
	A 1	A 2	B 1
8°	13.3 %	13.3 %	8.3 %
16°	20.6 %	22.4 %	9.6 %
18°	—	29.3 %	—
24°	30.1 %	—	17.2 %
26°	—	—	18.6 %
27°	36.6 %	—	—

si osserva che il ratto A 1, al quale non furono date le vitamine è vissuto quanto il ratto B 1, perdendo però il 30.6 % del proprio peso, mentre B 1, con vitamine aveva perduto soltanto il 18.6 %: il ratto A 2 visse solo 18 giorni mostrando una curva della perdita del peso simile al ratto A 1, cioè più rapida che B 1 e morì dopo aver perduto il 29.3 % del proprio peso. Esaminando infine i risultati dei ratti A 3 e B 2 i quali morirono senza infezione allo stadio acuto si nota, come risulta dalla seguente tabella comparativa:

Giorno	Perdita di peso	
	A 3	B 2
8°	11.5 %	11.3 %
16°	15.3 %	20 %
24°	26.2 %	25.9 %
32°	38 %	30.8 %
40°	48 %	35.1 %
48°	—	38.9 %
56°	—	44.3 %
64°	—	46.4 %
72°	—	49.7 %
80°	—	51.3 %
83°	—	55.6 %

che il ratto B 2 con vitamine ha potuto vivere un tempo doppio del ratto A 3 senza vitamine, raggiungendo una perdita di peso maggiore. La differenza è così forte che non può essere attribuita al fatto che B 2 all'inizio degli esperimenti pesava più di A 3. Fino al 24° giorno di inanizione parziale i due ratti mostravano un contegno simile. Dopo A 3 perse più rapidamente di peso e in breve tempo morì. La minore resistenza di questo ratto può pensarsi sia dipesa dalla deficienza delle vitamine, che può avere ostacolato l'assorbimento dell'alimento da parte dell'intestino o prodotto modificazioni del ricambio intermedio. Concludendo, sembra si possa affermare che l'aggiunta di vitamine ha agito aumentando la resistenza dei ratti alla inanizione parziale, consentendo loro di vivere più a lungo e di sopportare una maggiore perdita di peso.

Patologia. — *L'anaesotubercolina nella diagnosi della tubercolosi in patologia comparata* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. FINZI, presentata dal Corrisp. A. DIONISI.

Col nome di tubercoline si indicano delle sostanze derivate dal bacillo di Koch, alle volte improntate alle sue *esotossine*, alle volte alle sue *endotossine* ed alle volte, infine, improntate all'insieme dei principi solubili specifici o prodotti del suo ricambio (esotossine) e dei costituenti la sua compagine cellulare (endotossine).

Queste tubercoline, lungi dall'essere classificate secondo la loro natura e la loro composizione, lo sono generalmente in base al procedimento adottato per la loro preparazione. Esse, come è ben noto, hanno una caratteristica fondamentale, comune: quella cioè di essere dotate di speciali proprietà tossiche per i soggetti infettati di tubercolosi e di essere invece sprovviste di ogni azione nociva per gli organismi non tubercolotici.

È su questa nozione, che ha le sue basi nelle classiche esperienze di Koch, che è fondata l'applicazione diagnostica delle tubercoline sulla infezione tubercolare.

Il numero delle tubercoline preparate dai diversi sperimentatori, è oggi considerevole, e troppo lungo ed inutile sarebbe ripetere la tecnica di preparazione di tali sostanze, quasi tutte improntate alla scoperta di Koch ⁽³⁾, ed alle indicazioni di Behring e Maragliano.

Però, il nome di *tubercolina* è stato introdotto in medicina nel 1884 da Pohl-Pincus ⁽⁴⁾, per designare una sostanza, che egli pensava si potesse estrarre dai bacilli tubercolari e che supponeva capace di proprietà curative e preventive contro la tubercolosi. A tale proposito egli infatti scriveva:

«... Senza attendere la preparazione di una tubercolina *pura*, noi useremo gli estratti delle culture, oppure gli estratti della tubercolosi miliare. «Nell'insieme di queste diverse sostanze estratte ne deriva la tubercolina che, di fronte all'effetto cercato, ha un decisivo vantaggio su tutte le altre sostanze banali, tanto che la loro contemporanea introduzione di «venta inutile».

L'idea di Pohl-Pincus però, non solo non trovò sostenitori, ma lo stesso direttore della rivista «Deutsche Medizinische Wochenschrift», dove comparve il lavoro sopraindicato, fece seguire una nota nella quale si ricu-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Superiore di Medicina Veterinaria in Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1929.

(3) R. KOCH, «Berl. Klin. Woch.», 1890, 46. «Deutsche med. Woch.», 1891, 3, 43.

(4) POHL-PINCUS, «Deutsche med. Woch.», 1884.

savano tutti i concetti espressi da Pohl-Pincus e nella quale era esplicitamente detto:

«... Siamo sicuri perciò che l'A. si troverà senza dubbio su di una « strada del tutto errata, sulla quale fortunatamente nessuno lo seguirà ».

Le *vecchie tuberculine*, preparate nei diversi Istituti, ripetono, con varianti di limitato interesse, la *tuberculina primitiva* o *vecchia tuberculina* o *tuberculina bruta di Koch (AT)*, o la *tuberculina vecchia originale di Koch (TOA)* o la *TA tuberculina di Koch*. Le *nuove tuberculine*, invece, sono preparate con procedimenti tecnici intesi ad ottenere, accanto ai prodotti solubili del bacillo tubercolare, anche i componenti insolubili del bacillo stesso, quali: talune endotossine e taluni prodotti derivanti dall'intima costituzione del bacillo di Koch. Klimmer e Wolff-Eisner ⁽¹⁾ nel loro interessante capitolo « Diagnosi della tubercolosi mediante le tuberculine » e, più precisamente, nel sotto-capitolo « Preparazione delle tuberculine e preparati affini », e Calmette ⁽²⁾ nel capitolo V del suo classico trattato, informa dettagliatamente sulle diverse tuberculine, che d'altronde vediamo citate in diversi lavori speciali, che inutile sarebbe elencare.

Per la diagnosi della tubercolosi bovina s'impiega, generalmente, la *tuberculina bruta*, preparata secondo le indicazioni di E. Roux ⁽³⁾, dell'Istituto Pasteur di Parigi.

Dei matracci a fondo piano, a collo relativamente largo, con orlo svasato o rinforzato e contenenti del brodo peptonato glicerinato, fino al punto di più ampia circonferenza del matraccio, una volta seminati con piccole porzioni di veli ottenuti da culture di tubercolosi, vengono portati al termostato, alla temperatura di 37°-38°. Dopo 6-8 settimane, quando la cultura è bene sviluppata, viene sterilizzata all'autoclave, alla temperatura di 105°-110° per 5 minuti, indi viene lasciata raffreddare ed abbandonata poi per parecchi giorni alla temperatura di laboratorio. Dopo tale periodo, tutto il contenuto del matraccio è raccolto in un largo recipiente, dove viene concentrato per evaporazione a bagnomaria o nel vuoto solforico, fino ad un decimo del suo volume primitivo, indi viene versato su di un filtro di carta. Si ottiene così un liquido sciropposo, limpido di un colore bruno, di odore speciale, pressochè identico a quello delle colture del bacillo di Koch, e viene conservato in fiale chiuse, al riparo della luce ed in ambiente fresco.

Ne consegue che — nozione importante per quanto verremo più appresso esponendo — un litro di brodo finisce per produrre 100 c. c. di

(1) M. KLIMMER e A. WOLFF-EISNER, « Handbuch der Serumtherapie und Serumdiagnostik in der Veterinär-Medizin », Lipsia, 1911, Tip. Werner Kluikhardt.

(2) A. CALMETTE, « L'infection bacillaire et la tuberculose chez l'homme et chez les animaux », 3^a edizione, Masson, Parigi.

(3) A. VALLÉE e L. PANISSET, « Les tuberculoses animales », Octave e Gaston Doin, Parigi, 1920.

tubercolina bruta, nei quali sono contenuti 50 c. c. di glicerina, in quanto il brodo impiegato per la coltura del bacillo di Koch, è glicerinato al 5 %, ed in quanto la quantità di glicerina evaporata, come quella assorbita dai bacilli, è nulla.

Questa tubercolina bruta, che per uso veterinario a scopo diagnostico è usata pura o diluita ad un decimo in acqua fenicata al 5 ‰, è, come tutte le tubercoline in genere, un prodotto contenente sia i veleni protoplasmatici endobacillari (endotossine), sia i veleni solubili eliminati dai bacilli nel brodo di coltura (esotossine).

Ma, informati dai risultati di esperienze nostre e di altri, che i residui dei bacilli tubercolari trattenuti sul filtro, dopo i diversi processi di macerazione sono di ben poco meno tossici e meno attivi degli stessi bacilli semplicemente uccisi col calore, abbiamo avuto ragione di pensare e supporre come il grado di tossicità di una tubercolina debba essere principalmente legata all'attività delle esotossine del bacillo di Koch ottenuto in coltura.

E ancora istruiti dal fatto che si sono sperimentate, nella terapia specifica della tubercolosi umana, tubercoline discretamente attive, concentrando il brodo di coltura privato dei corpi microbici; e che a Bucarest e a Lovanio (tubercolina Denys), nella terapia della tubercolosi umana, si impiegano tubercoline quasi esclusivamente improntate al brodo di coltura, epurato dai corpi microbici per lunga sedimentazione, o per filtrazione attraverso candele filtranti (che, come è noto, trattengono generalmente quantità non trascurabili di principi attivi), ci siamo chiesti se la esotubercolina poteva essere impiegata a scopo diagnostico in medicina veterinaria, *senza sottoporre il prodotto stesso né a concentrazione, né a filtrazione.*

Si sarebbe anzitutto dovuto determinare sperimentalmente, secondo il procedimento classico, l'attività dell'esotubercolina su una cavia di 350-400 grammi, infettata di tubercolosi da 3-4 settimane.

Ma essendo a conoscenza come non pochi studiosi rifuggano da tale metodo, alle volte infido, preferendo attenersi alle valutazioni fatte dai medici, direttamente su soggetti tubercolotici, o dai veterinari, su bovini tubercolotici, senz'altro abbiamo deciso di sperimentare l'attività e la capacità diagnostica dell'esotubercolina direttamente su bovini sani e tubercolotici.

Per quanto taluni sperimentatori, per la diagnosi della tubercolosi nei bovini, raccomandino soltanto tubercoline ottenute da bacilli bovini (Kanda, O. Bang, Welling) o tubercoline polivalenti ottenute da bacilli di origine bovina, suina e umana (Malm), pure altri autorevoli ricercatori raccomandano tubercoline indifferentemente ottenute da bacilli umani o bovini (Vallée e Panisset, Calmette, Hutyra e Marek, Römer, Weber, Dieterlen).

D'accordo con questi ultimi e conformemente alle affermazioni di Koch e Behring, secondo le quali sui soggetti tubercolotici la tubercolina si comporta in modo pressochè identico, qualunque sia il tipo tubercolare dal quale proviene, in quanto dalle tubercoline di diversa origine si è isolato

un principio tossico costante, abbiamo iniziate le nostre indagini con una esotubercolina proveniente da un bacillo tubercolare di origine umana, in considerazione anche del limitato potere patogeno dei bacilli della tubercolosi umana per i bovini.

Però noi non potevamo accingerci all'esperimento della esotubercolina senza inattivare ed uccidere i germi che, per quanto in limitato numero, dovevano comunque essere in sospensione nel brodo di coltura.

Convinti, specie dopo gli studi del Petraghani⁽¹⁾, che i vari metodi impiegati (calore e sostanze chimiche di diversa natura) fossero tutti più o meno atti ad agire, non soltanto sul protoplasma batterico, ma benanco sulle esotossine, pensammo di ricorrere alla formalina, che in soluzione all'1 % uccide il bacillo di Koch in un'ora e che all'uno per diecimila uccide lo stesso germe in 24 ore, e che, come dimostrò Ramon⁽²⁾, è una sostanza anatossigena, capace di agire lentamente sulle tossine, attenuando considerevolmente la loro azione, senza però togliere alle medesime il loro potere antigene, anzi conservando e stabilizzando le loro qualità specifiche.

Preparazione dell'anaesotubercolina. — Da culture di bacilli tubercolari tipo umano, coltivate in brodo glicerinato al 5 %, in matracci di grandezza media, normale, lasciate per circa 20 settimane in un termostato ben regolato a 38°-38°5, raccogliamo, con apposita pipetta e a lenta aspirazione, il brodo di coltura (in diversi Istituti si preparano le tubercoline, da culture di 15-20-25 settimane, in quanto a cultura più ricca ed abbondante corrisponde generalmente una maggiore quantità di tossina). Il brodo così aspirato (portando l'estremità della pipetta attraverso lo spesso velo formatosi in fondo al matraccio) è perfettamente limpido, quasi sempre senza minima traccia di velo, il quale resta nel matraccio perfettamente intatto. Il brodo di coltura, che ha il noto caratteristico odore, viene semplicemente filtrato su carta, indi trattato con formalina nelle proporzioni del cinque per mille.

L'esotossina che noi allora chiamiamo *anaesotubercolina* (A. E. T.) potrà essere impiegata 24 ore dopo.

Ricerche sperimentali sull'azione dell'anaesotubercolina sui bovini tubercolotici. — Su vacche tubercolotiche di razza svizzera, di differente età, grvide e non, messe nelle migliori condizioni per effettuare la prova del caso, si inietta, per via sottocutanea, l'A. E. T. seguendo tutte le norme ben note per la prova classica sottocutanea. Le prove vengono eseguite con le dosi seguenti: 0,5 c. c. — 1 c. c. — 2 c. c. — 3 c. c. — 4 c. c. — 5 c. c. Ci siamo fermati alla dose di 5 c. c. prima di tutto perchè le reazioni assurgevano ad una imponentza, ad una evidenza e ad una intensità, oseremmo dire, quasi preoccupanti, secondariamente perchè la dose massima

(1) G. PETRAGNANI, « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese », fasc. 6, 1927.

(2) G. RAMON, « C. R. Académie des Sciences », 10 dicembre 1923. p. 1338.

di 5 c. c. corrisponderebbe ai 0,50 c. c. di tubercolina bruta concentrata a un decimo.

Gli sbalzi della temperatura osservati nelle 32-40 ore seguenti l'iniezione con l'A. E. T., furono in tutti i soggetti veramente imponenti, provocando essi, con le medie della temperatura prima della prova, delle differenze più che dimostrative. Con dosi di 0,5 c. c. di A. E. T. si sono ottenute differenze di 1,7°-1,9° fra il massimo di reazione termica raggiunto ed il grado di temperatura media registrato precedentemente alla inoculazione; con dosi di 1 c. c., differenze di 2,3°; con dosi di 2 c. c., differenze di 1.6°-2.6°; con dosi di 3 c. c., differenze di 1.6°-2.3°; con dosi di 4 c. c., differenze di 2.2°; con dosi di 5 c. c., differenze di 1.6°-2.9°-3.5°. Le reazioni termiche si iniziano, in taluni casi, già dopo la 2^a-10^a ora, per raggiungere il fastigio dalla 12^a-18^a ora. Qualche volta, nella fase di defervescenza, si nota un nuovo fastigio sempre molto significativo, ma sempre meno imponente del primo. La reazione organica è in tutti i soggetti, trattati con qualsiasi dose, molto evidente, e in talune vacche, specie in quelle iniettate con 5 c. c. di A. E. T., la produzione lattea nelle 24-36 ore dopo l'iniezione, diminuisce di un decimo, un quinto, un terzo, un quarto, persino della metà.

In corrispondenza del punto di iniezione non si sono mai osservate reazioni locali degne di particolare rilievo.

Ricerche sperimentali sull'azione, dell'anaesotubercolina su bovini sani. - A bovini sani di razza svizzera e di diversa età, messi nelle migliori condizioni per una rigorosa prova di controllo, si inietta, come nel caso precedente, l'A. E. T. per via sottocutanea. Le iniezioni vengono eseguite con le seguenti dosi: 1 c. c. = 4 c. c. = 5 c. c. = 10 c. c. = 15 c. c. Nessuno dei soggetti trattati ha menomamente reagito: negativissima la reazione termica, come pure la reazione generale.

« *Abitudine* » o « *adattamento* » alla anaesotubercolina. - È ormai a tutti ben noto che cosa si deve intendere per *abitudine* o *adattamento* alla tubercolina.

Nocard e Roux, Vallée, Malm, Lignières e Mettaru, Reeser, Stubbe e Mullie, Zabala e Finzi⁽¹⁾ hanno ampiamente riferito sull'argomento.

Bovini tubercolotici iniettati con 5 c. c. di A. E. T. reiniettati, dopo 12 giorni, con la stessa tubercolina, ma a dosi inferiori (0,5 c. c. = 1 c. c. = 3 c. c.), quantunque capaci di provocare, in soggetti tubercolotici, non precedentemente provati, reazioni ad evidenza massima, non reagiscono affatto e si dimostrano - diciamo così - immunizzati anche se nel primo intervento hanno dato reazioni ad intensità notevole, estrema, come noi, nella ormai nostra lunga pratica, mai abbiamo ottenuto con la tubercolina bruta con-

(1) G. FINZI, « La diagnosi della tubercolosi nei nostri animali domestici. - Studio sperimentale e critico », Parma, 1911, Tip. Orsatti.

centrata. (Osserviamo che le prove di controllo furono eseguite con tuberculina bruta concentrata, dell'Istituto Sieroterapico Milanese e con tuberculina bruta di recentissima preparazione dell'Istituto Pasteur di Parigi gentilmente messa a nostra disposizione dal sig. dott. Tendron).

Invece se a distanza di 12 giorni da una prova sottocutanea eseguita con tuberculina bruta, noi iniettiamo, sempre per via sottocutanea, 0,5 c. c. = 1 c. c. = 3 c. c. di A. E. T., otteniamo reazioni termiche e generali con sbalzi di temperatura che oscillano da 2.1° a 2.5°, aventi inizio generalmente dopo la 2^a - 6^a ora dall'iniezione.

Con ragione quindi Nocard e Roux avevano pensato di poter rendere nullo il fenomeno di *abitudine* alla tuberculina, impiegando — certo a dose non inferiore alla prima dose impiegata — una tuberculina di speciale attività.

Se a bovini tubercolotici provati con 5 c. c. di A. E. T., a distanza di 12 giorni iniettiamo, per via sottocutanea, 1 c. c. di tuberculina bruta, la reazione che ne consegue, (avendo naturalmente cura di prendere la temperatura di due in due ore dalla prova fatta) resta totalmente negativa.

Infine, se a bovini tubercolotici, iniettati con 0,5 c. c. = 1 c. c. = 2 c. c. = 3 c. c. di A. E. T., dopo 12 giorni si iniettano o la stessa dose o dose doppia (mai però superiore ai 5 c. c.) di A. E. T., noi otteniamo reazioni termiche e generali altrettanto imponenti, altrettanto evidenti come se si agisse di primo intervento. (La temperatura si innalza generalmente dopo la 2^a - 8^a ora).

Controllo con semplice brodo glicerinato formolato. — A dei bovini sani e a dei bovini tubercolotici iniettammo, sempre per via sottocutanea, 5 = 10 c. c. di brodo glicerinato sterile formolato al cinque per mille e all'uno per cento.

Solo qualcuno dei bovini iniettati con 10 c. c. di brodo glicerinato sterile all'1 % presentò lieve tumefazione edematosa in corrispondenza del punto di iniezione, che scomparve però nelle 24 ore. In nessuno si notò la più lieve reazione termica e generale.

Oftalmo-reazione e prova sottocutanea con anaesotuberculina nei bovini tubercolotici. — L'A. E. T. come la tuberculina bruta, può essere utilizzata per l'oftalmo reazione. L'instillazione di qualche goccia nel sacco oculo-congiuntivale, qualunque sia il grado di ipersensibilità del soggetto tubercolotico, provoca fenomeni locali infiammatori, caratteristici, molto manifesti. Riteniamo che l'oftalmo reazione possa, attraverso l'A. E. T., acquistare, in medicina veterinaria, un maggior valore diagnostico. L'aumentata sensibilità della mucosa oculo-congiuntivale di un bovino tubercolotico, provato alla oftalmoreazione con tuberculina bruta concentrata, si traduce con una seconda reazione oftalmica, molto più intensa della prima, se a distanza di 15 giorni i bovini vengono iniettati per via sottocutanea con A. E. T.

L'oftalmo reazione « seconda », « in serie », « in due tempi », così come la indicò Vallée con la tuberculina bruta, può naturalmente essere effettuata

anche con l'A. E. T. I risultati che si ottengono sono nettamente dimostrativi.

Intradermo reazione con anaesotubercolina. — L'A. E. T., iniettata nello spessore della plica caudale alla dose di $\frac{1}{4}$ di c. c., provoca manifestazioni reattive locali tanto intense, tanto durature, da rendere nulli quei casi di difficile interpretazione — davvero tanto frequenti — dovuti alle volte alla rapida scomparsa della tumefazione locale e alle volte alla limitata evidenza delle manifestazioni reattive locali. La reazione si va esprimendo lentamente, e gradatamente aumentando fino alla 36^a e 48^a ora. La plica caudale calda, dolente, con una tumefazione rossastra e grossa come un uovo di pollo, ritorna gradatamente al normale in circa 60 ore.

In taluni soggetti, oltre i fenomeni locali, si notano reazioni termiche e generali. (A questo proposito osserviamo incidentalmente come dosi di 0.1 c. c. di A. E. T., iniettate per via sottocutanea, possano provocare in taluni soggetti tubercolotici sbalzi termici 1° 8.

L'intradermoreazione alla dose da noi usata (0.25 c. c.) può essere ripetuta diverse volte e con successo sullo stesso soggetto, a condizione che prima (30-35 giorni) non sia stato iniettato con A. E. T. per via sottocutanea. In questo caso l'intradermoreazione è molto evidente solo dalla 2^a alla 18^a ora, per scomparire verso la 26^a ora. Se subito dopo si ripete la prova sull'altra plica caudale la reazione non si manifesta.

CONCLUSIONI

1. L'anaesotubercolina, da noi preparata, può sostituire la tubercolina bruta nella diagnosi sperimentale della tubercolosi bovina.

2. L'anaesotubercolina ha sulla tubercolina bruta notevoli vantaggi:

a) è di preparazione molto più semplice e molto più pratica;

b) traduce in modo molto più evidente lo stato di ipersensibilità dell'organismo tubercolotico di fronte ai principi tossici del bacillo di Koch;

c) in dosi proporzionatamente dieci volte più piccole della dose comunemente impiegata di tubercolina bruta, dà reazioni termiche più pronte e molto più intense accompagnate da reazioni organiche generali più imponenti, per quanto molto meno intensi sembrano i fenomeni a carico del focolaio tubercolare;

d) la gravità dell'infezione tubercolare ed il grado di sensibilità individuale, sembrano intervenire in modo del tutto trascurabile nel provocare reazioni più o meno evidenti, giacchè sempre, a differenza di quanto si osserva con la tubercolina bruta, abbiamo rilevato reazioni intensissime. (Non abbiamo però sperimentato su bovini tubercolotici in stato di evidente cachessia ed in animali colpiti da tifo-bacillosi);

e) negli animali non tubercolotici non si ottengono reazioni di sorta, neppure se sottoposti ad iniezioni di anaesotubercolina a dosi elevate;

f) meglio della tubercolina bruta si presta a sventare uno stato di « abitudine » o di « adattamento » provocato da precedenti iniezioni di tubercolina;

g) in ogni caso, su animali non febbricitanti, informa con sicurezza sulla esistenza o meno di infezione tubercolare assurgendo ogni reazione positiva o negativa a significato diagnostico di valore assoluto (dose 2.5 c. c. di A. E. T.);

h) provoca su terreno tubercolare reazioni congiuntivali molto manifeste, molto intense e persistenti specie nell'oftalmoreazione in due tempi, riducendo così notevolmente la percentuale degli insuccessi per tale metodo diagnostico;

i) sempre nei bovini tubercolotici è capace di provocare « reazioni di rivivescenza » molto più evidenti della tubercolina bruta;

l) per via intradermica alla dose di 0.25 c. c. provoca reazioni locali notevolissime, quasi sempre accompagnate da reazioni termiche pure molto significative.

3. L'anaesotubercolina, a differenza della tubercolina bruta, non può essere paragonata e considerata alla stregua di una aggressina, ma bensì ad una vera e propria bacteriotossina, ad una tossina vera, ad una tossina solubile.

4. L'anaesotubercolina è unicamente improntata ai prodotti di ricambio del bacillo di Koch, i quali come dimostreremo più avanti, sono dotati di spiccate proprietà antigene e conferiscono alla reazione alla tubercolina una più spiccata specificità.

5. I risultati ottenuti con l'impiego della anaesotubercolina ci riconfermano nel concetto che il miglior modo di determinare l'attività delle tubercoline per uso veterinario si è quello di ricorrere direttamente a prove su bovini tubercolotici e sani.

6. Non ci fu ancora acconsentito, per motivi estranei alla nostra volontà, di stabilire dopo quanto tempo dalla avvenuta penetrazione dei bacilli nell'organismo e dalla avvenuta infezione tubercolare si possa esprimere l'azione rivelatrice dell'anaesotubercolina. Certo però, noi pensiamo, molto presto. Abbiamo ancora ragione di ritenere come la nuova tubercolina possa dare nella diagnosi della tubercolosi canina, dove la tubercolina bruta provoca troppo spesso reazioni di ben delicata interpretazione, risultati di più facile e sicura valutazione.

7. L'anaesotubercolina, ottenuta da bacilli di origine umana, è perfettamente indicata nella diagnosi della tubercolosi bovina.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

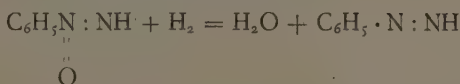
MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1929 (Anno VII).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Chimica. — *Sopra la riduzione dei diazoidrati normali* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ del Socio A. ANGELI e di Z. JOLLES.

In una precedente comunicazione ⁽³⁾ venne posto in rilievo che la trasformazione dei diazoidrati normali nei corrispondenti idrocarburi, operata dai riducenti deboli, si può intendere bene ammettendo che in una prima fase, in seguito ad eliminazione dell'atomo di ossigeno, si formi il termine intermedio molto instabile, la fenildiimide:



il quale successivamente si scinderebbe in azoto e nell'idrocarburo:



Allo scopo di portare una conferma sperimentale a tale supposizione, ci siamo giovati di un artificio che uno di noi ha già usato con successo nel caso della fenilazocarbonammide di O. Widman ⁽⁴⁾ e della benzolsolfon-

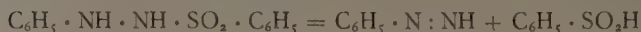
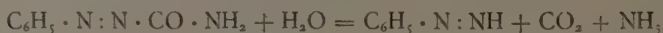
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1929.

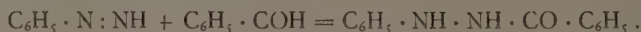
(3) « Berl. Berichte », 59, 1926, 1400.

(4) ANGELI, « Rend. Lincei », 26, 1917, 1° sem., 95.

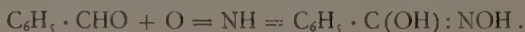
fenilidrazina di E. Fischer⁽¹⁾. Anche queste sostanze infatti, in mezzo alcalino, si decompongono in modo analogo⁽²⁾:



ed è stato possibile fissare il termine intermedio, la finildiimide, operando in presenza di aldeide benzoica, con la quale si somma nettamente per dare la benzoilfenilidrazina simmetrica⁽³⁾:



Si tratta insomma di una reazione analoga a quella che ha permesso di fissare il nitrossile, con formazione dell'acido idrossammico:



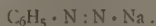
A tale scopo una soluzione di cloruro di fenildiazonio, ben raffreddata e resa alcalina, venne trattata con una soluzione di stannito sodico, preparato secondo Gattermann-Wieland⁽⁴⁾, cui in precedenza si era aggiunta benzaldeide ed alcool in modo di avere un liquido limpido. Si nota sviluppo gassoso e si mantiene freddo per qualche tempo, dopo di che si estrae con etere. Distillato l'etere si svapora l'alcool a bagnomaria. Rimane indietro un olio bruno che non tarda a rapprendersi in una massa semi solida che viene lavata prima con etere di petrolio e finalmente con poco etere. Si ottiene così un prodotto quasi incolore che ricristallizzato da alcool diluito fonde a 168° ed è identico con la benzoilfenilidrazina di E. Fischer.

0.0401 sostanza: 4.7 ccm. N (24° e 756 mm.) ; $\text{C}_{13}\text{H}_{12}\text{O N}_2$.

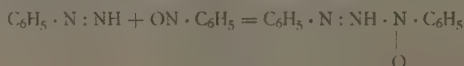
Calcolato N = 13.21 — Trovato N = 13.4.

(1) ANGELI, *ibid.*, 18, 1909, 1° sem., 322.

(2) Riscaldando la fenilazocarbonammide di Widman con sodiammide abbiamo ottenuto un prodotto che per azione dell'acqua si decompone con sviluppo di azoto. Ulteriori esperienze ci permetteranno di stabilire se si tratta di un sale della finildiimide:

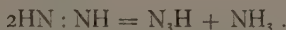
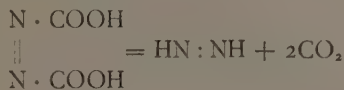


(3) Senza dubbio alla finildiimide è dovuta anche la formazione dei diazoossiammidocomposti, da nitrosobenzolo e fenilidrazina, scoperta da Bamberger, e la reazione è perfettamente analoga a quella dell'aldeide e finildiimide:

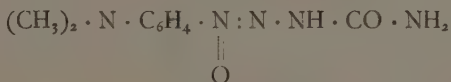


(4) « Die Praxis », Berlino, 1927, p. 259.

Ammettendo la formazione di tali composti intermedi non saturi, si possono spiegare bene anche altre reazioni. Come uno di noi ha trovato⁽¹⁾ trattando con acido solforico diluito il sale di potassio dell'acido azodicarbonico di Thiele, si forma acido azotidrico ed ammoniac:

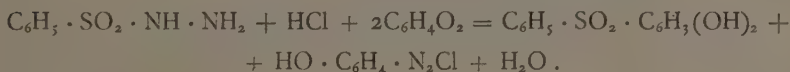


Anche la formazione del prodotto⁽²⁾:



da nitrosodimetilanilina e semicarbazide, risulta chiara ammettendo che in una prima fase si formi il termine: $\text{NH}_2 \cdot \text{CO} \cdot \text{N} = \text{NH}$, il quale al pari del nitrossile, si somma alla nitrosodimetilanilina ancora presente, come avviene nel caso del nitrosobenzolo.

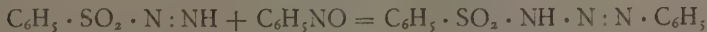
Inoltre Borsche e Frank⁽³⁾ hanno trovato che per azione della benzolsolfonidrazina sopra i chinoni si formano i sali di diazonio:



In questo caso, a nostro modo di vedere, la formazione del sale di diazonio è dovuta alla seguente reazione:



Infatti abbiamo potuto constatare che sale di diazonio si forma pure quando ad una soluzione di chinone acidificata con acido cloridrico si aggiunge sale di potassio dell'acido azodicarbonico. Inoltre da nitrosobenzolo e dibenzolsolfonidrazina è stato ottenuto il prodotto⁽⁴⁾:



O

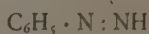
(1) ANGELI, « Rend. Lincei », 19, 1919, 2° sem., 94.

(2) O. FISCHER, « Journ. pr. Chem. », [2], 95, 1917, 266.

(3) « Liebigs Annalen », 450, 1926, 76.

(4) ANGELI, « Rend. Lincei », 24, 1915, 1° sem., 1093.

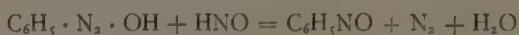
Faremo in fine osservare che l'aver potuto stabilire che il diazoidrato normale, per azione dei riducenti, si trasforma nel termine: $C_6H_5 \cdot N : NH$ rende molto probabile che in esso l'atomo di ossigeno sia contenuto sotto forma di ossido:



O

e non di ossidrilico, come già uno di noi ha posto in rilievo.

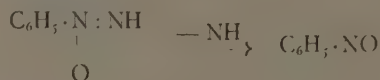
Tenendo poi conto dell'interessante reazione scoperta da Bigiavi, in seguito alla quale il diazoidrato normale, per azione del nitrossile, si scinde nettamente in nitrosobenzolo in azoto⁽¹⁾.



si vede subito come sia possibile sottrarre all'idrato normale tanto l'atomo di ossigeno:



quanto il residuo immidico:



Questi fatti, stabiliti dall'esperienza, portano una notevole conferma alla forma del diazoidrato normale da noi propugnata, mentre invece riesce pressochè impossibile intenderli per mezzo degli schemi che da altri vennero proposti.

(1) Cfr.: ANGELI, «Rend. Lincei», 24, 1915, 1° sem., 1093.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sur les congruences W à focales réglées.*
Nota⁽¹⁾ di D. TH. EGOROFF, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Les congruences W, dont les deux nappes de la surface focale sont des surfaces réglées, ont été considérées par différents géomètres (L. Bianchi, C. Segre, M. M. Picone et Tortorici). Mes recherches personnelles sur les congruences formées par les génératrices rectilignes d'une famille de quadriques (Voir: « *Récueil Mathématique de Moscou* », t. XXXI et un Mémoire à paraître dans le même « *Récueil* ») m'ont conduit à une définition analytique nouvelle et bien simple des congruences à focales réglées, que je vais exposer ici succinctement.

Dans tout ce qui suit je vais désigner par $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ les coordonnées pluckeriennes de la droite, la relation quadratique bien connue entre ces coordonnées étant

$$(1) \quad p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0.$$

En convenant de réduire modulo 6 les indices des coordonnées, c'est à dire en posant

$$(2) \quad p_7 = p_1, \quad p_8 = p_2, \quad p_9 = p_3, \quad p_{10} = p_4, \quad p_{11} = p_5, \quad p_{12} = p_6,$$

la relation entre les coordonnées (p_i) et (q_i) des deux droites qui se coupent s'écrit

$$(3) \quad \sum_{i=1}^6 p_i q_{i+3} = 0.$$

Pour simplifier les notations je supprimerai partout les limites ($i = 1, i = 6$) de la sommation. La relation (1) s'écrit avec ces conventions:

$$(1') \quad \sum p_i p_{i+3} = 0.$$

La congruence W à focales réglées la plus générale est représentée par trois relations

$$(4) \quad \sum V_i p_i = 0, \quad \sum V'_i p_i = 0, \quad \sum V''_i p_i = 0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1929.

les V_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) étant six fonctions arbitraires d'un paramètre variable v ; en éliminant v des équations (4) on parvient aux deux équations en p_i de la congruence en question.

Pour faire voir que les relations (4) fournissent en effet la solution du problème en question, il suffit de montrer que toutes les droites (p_i) de la congruence sont tangentes à deux surfaces réglées. En désignant par q_i les coordonnées de la génératrice d'une telle surface (q_i étant des fonctions du paramètre v), cela revient à démontrer les deux relations

$$(5) \quad \sum q_i p_{i+3} = 0 \quad , \quad \sum q'_i p_{i+3} = 0.$$

Or posons

$$(6) \quad q_i = \lambda V_{i+3} + \mu V'_{i+3} \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

et par conséquent

$$q'_i = \lambda' V_{i+3} + (\lambda + \mu') V'_{i+3} + \mu V''_{i+3}.$$

Les deux relations (5) sont satisfaites en vertu de (4), et la relation (1') pour les coordonnées q_i nous donne l'équation

$$\lambda^2 \sum V_i V_{i+3} + \lambda \mu \sum (V_i V'_{i+3} + V'_{i+3}) + \mu^2 \sum V'_i V'_{i+3} = 0,$$

de laquelle on tire deux valeurs du rapport $\lambda : \mu$; en les substituant dans les formules (6) on obtient les deux nappes focales de la congruence.

Pour faire voir que la solution du problème, que nous avons donnée, est la plus générale, observons qu'il suffit, comme il est bien connu, de considérer le cas des congruences W pour lesquelles les génératrices rectilignes se correspondent sur les deux nappes focales. Le faisceau des plans tangents à une surface réglée aux points d'une génératrice rectiligne étant homographique aux points de contact, il est clair que les rayons de la congruence passant par les points d'une génératrice rectiligne d'une nappe focale engendrent une quadrique, et par conséquent les congruences W en question appartiennent à la classe des congruences formées par les génératrices rectilignes d'une famille de quadriques. Une telle congruence est définie par les relations

$$(7) \quad \sum A_i p_i = 0 \quad , \quad \sum B_i p_i = 0 \quad , \quad \sum C_i p_i = 0,$$

A_i, B_i, C_i étant des fonctions d'un paramètre variable v . Pour une valeur donnée de v les équations (7) définissent une quadrique. La surface focale de la congruence n'est autre chose que l'enveloppe de la famille des quadriques. L'intersection des deux quadriques infiniment voisines de la famille est en général une courbe gauche du 4^e ordre. Pour que la congruence définie par les équations (7) soit une congruence de la classe considérée, il faut et il suffit que la courbe du 4^e ordre mentionnée se réduise à un

quadrilatère gauche formé par deux paires de génératrices rectilignes des deux systèmes de la quadrique correspondante. Donc les trois équations (7) et les équations correspondant à la valeur de v infiniment voisine, ou, ce qui revient au même, les trois équations

$$(8) \quad \sum A'_i p_i = 0 \quad , \quad \sum B'_i p_i = 0 \quad , \quad \sum C'_i p_i = 0$$

doivent se réduire à quatre équations indépendantes qui définissent deux droites — les deux génératrices appartenant à la congruence. Soit, par exemple,

$$(9) \quad \begin{cases} \sum B'_i p_i = \alpha \sum A_i p_i + \beta \sum B_i p_i + \gamma \sum C_i p_i + \rho \sum A'_i p_i \\ \sum C'_i p_i = \delta \sum A_i p_i + \varepsilon \sum B_i p_i + \zeta \sum C_i p_i + \sigma \sum A'_i p_i, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \rho, \sigma$ étant des fonctions de v . Or, en partant des relations (9), il est aisé de former trois combinaisons linéaires des équations (7) qui sont de la forme (4). À cet effet introduisons neuf fonctions de v $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \lambda_3, \mu_3, \nu_3$ et posons

$$(10) \quad \lambda_2 \sum A_i p_i + \mu_2 \sum B_i p_i + \nu_2 \sum C_i p_i = \frac{d}{dv} (\lambda_1 \sum A_i p_i + \mu_1 \sum B_i p_i + \nu_1 \sum C_i p_i) = \\ = \lambda'_1 \sum A'_i p_i + \mu'_1 \sum B'_i p_i + \nu'_1 \sum C'_i p_i + \lambda'_1 \sum A_i p_i + \mu'_1 \sum B_i p_i + \nu'_1 \sum C_i p_i,$$

$$(11) \quad \lambda_3 \sum A_i p_i + \mu_3 \sum B_i p_i + \nu_3 \sum C_i p_i = \frac{d}{dv} (\lambda_2 \sum A_i p_i + \mu_2 \sum B_i p_i + \nu_2 \sum C_i p_i) = \\ = \lambda_2 \sum A'_i p_i + \mu_2 \sum B'_i p_i + \nu_2 \sum C'_i p_i + \lambda'_2 \sum A_i p_i + \mu'_2 \sum B_i p_i + \nu'_2 \sum C_i p_i.$$

En substituant les valeurs de $\sum B'_i p_i$ et $\sum C'_i p_i$ tirées des relations (9) et en identifiant les coefficients des quatre sommes $\sum A_i p_i, \sum B_i p_i, \sum C_i p_i, \sum A'_i p_i$, nous parviendrons à huit équations définissant les neuf fonctions λ_1, \dots, ν_3 , et la démonstration est achevée.

Les considérations précédentes font voir que chaque congruence W de la classe en question est accompagnée d'une autre congruence de la même classe. Les deux congruences sont formées par les deux systèmes de génératrices rectilignes des quadriques que nous avons considérées dans notre démonstration. Les focales des deux congruences sont engendrées par l'une ou l'autre paire des côtés opposés du quadrilatère gauche ci-dessus mentionné.

Pour conclure, je vais indiquer la solution bien simple du problème : « construire la congruence de la classe considérée en partant d'une nappe focale donnée ».

Soient q_i (six fonctions de v) les coordonnées de la génératrice rectiligne de la surface réglée donnée. Le problème revient à la détermination des fonctions V_i telles que les deux équations

$$\sum q_i p_i = 0 \quad , \quad \sum q'_i p_i = 0.$$

soient des conséquences des trois équations (4). Je n'exposerai pas ici les calculs bien simples qui conduisent au résultat suivant :

1° On peut poser $V_i = q_i$. Cette solution évidente conduit à une congruence spéciale aux deux nappes focales confondues.

2° On peut poser

$$V_i = \int \omega q_i dv,$$

ω étant une fonction arbitraire de v ; c'est la solution générale du problème.

Matematica. — *Sur la méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre avec une seule fonction inconnue et deux variables indépendantes.* Nota⁽¹⁾ di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. La méthode de Darboux pour l'intégration de l'équation

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

exposée par M. Forsyth⁽²⁾, est la suivante.

L'adjonction à l'équation (1) de l'équation

$$(2) \quad \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const.}$$

donne les conditions de compatibilité du système de deux équations (1), (2), sous forme d'égalité à zero des deux déterminants :

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{dF}{dy} & 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1929.

(2) A. R. FORSYTH, *Theory of differ. equations*, vol. VI, Cambridge, 1906. pp. 314-317.

de la matrice

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & 0 \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & 0 \\ \frac{dF}{dy} & 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

La deuxième équation (3) peut être écrite de la manière suivante:

$$(5) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0,$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial s} \lambda + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

En supposant, que

$$(7) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0;$$

nous avons de (5) l'une ou l'autre de deux équations. Associons par ex. la première à la première équation (3). Comme

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial s} = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial F}{\partial r},$$

la première équation (3) s'écrit:

$$(8) \quad \left(\frac{d\Phi}{dx} + \lambda_2 \frac{d\Phi}{dy} \right) \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dF}{dx} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dF}{dy} = 0,$$

par ce que

$$(9) \quad D\left(\frac{F, \Phi}{r, s}\right) = 0;$$

$D\left(\frac{F, \Phi}{r, s}\right)$ "must not vanish, because, taken in conjunction with

$$(10) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial t} - \lambda \frac{\partial F}{\partial s} + \lambda^2 \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

its vanishing would imply that F and $\Phi^{(1)}$ are not functionally independent of one another, qu'à functions of r, s, t ".

(1) Les notations sont les miennes; dans le cours de M. Forsyth figurent f, V, θ au lieu de F, Φ, λ .

Alors nous avons deux systèmes d'équations linéaires pour la détermination de la fonction Φ :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i \frac{d\Phi}{dy} - \frac{\frac{dF}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial F} - \lambda_i \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial F}}{\frac{\partial F}{\partial r}} = 0 \\ \lambda_j^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \lambda_j \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \end{array} \right. \quad (i, j = 1, 2)$$

Pourvu qu'un tel système soit compatible, si nous en trouverons deux intégrales particulières $\Phi_1 = C_1, \Phi_2 = C_2$, compatibles entre eux et avec l'équation (1), on pourra tirer de ces équations r, s, t . Alors le problème d'intégration se réduit aux quadratures :

$$\begin{aligned} dp &= r dx + s dy & ; & & dq = s dx + t dy \\ d\chi &= p dx + q dy. \end{aligned}$$

II. Pour la compatibilité des équations (1), (2) il est nécessaire, que tous les déterminants du 4^{ème} ordre de la matrice (4) soient nuls. Pour cela il suffit, que tous les déterminants d'ordre 4, que nous obtiendrons en adjoignant au déterminant Δ du troisième ordre, différent de zero, une des lignes et une des colonnes restantes de la matrice mentionnée⁽¹⁾, soient nuls.

Supprimons dans la matrice (4) la 2^{ème} ligne et la 1^{ère} et la 5^{ème} colonnes. Nous avons le déterminant Δ_{13}^2 , ce qui conduit aux limitations du § précédent :

$$(12) \quad 1) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0 \quad ; \quad 2) \quad D\left(\frac{F, \Phi}{r, s}\right) \neq 0,$$

c'est-à-dire, l'équation proposée (1) doit contenir la dérivée r , et la fonction cherchée Φ ne doit pas dépendre de la fonction donnée F par rapport aux dérivées r et s .

Quand les inégalités (12) sont vérifiées, les conditions de compatibilité des équations (1), (2) se représentent sous forme de deux équations (3), qui déterminent la fonction inconnue Φ . En posant

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} \end{array} \right| = (rs) \quad ; \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{array} \right| = [xr] ; \dots$$

où

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \chi} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s ; \dots \quad \frac{d\Phi}{dy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} s + \frac{\partial \Phi}{\partial q} t,$$

(1) H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. I, Braunschweig, 1899. SS. 103-104.

nous pouvons écrire le système (3) de la manière suivante:

$$(13) \quad (rs)(st) + (rt)(tr) = 0 \quad ; \quad [yr](rt) + [ys](sr) + (rs)[rx] = 0,$$

ou

$$\frac{(rt)}{(rs)} = \frac{(ts)}{(tr)} = \frac{[rx] + [ys]}{[ry]} = \lambda;$$

c'est-à-dire

$$(14) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \frac{d\Phi}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{d\Phi}{dy} - \left(\frac{dF}{dx} - \lambda \frac{dF}{dy} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$$

$$(15) \quad \dots \dots \dots - \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \left(\lambda \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$(16) \quad \left(\lambda \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial t} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

A cause de la 1^{ère} condition (12), les coefficients des dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ dans les équations (15), (16) seront proportionels, la fonction λ étant déterminée par l'équation quadratique

$$(17) \quad \frac{\partial F}{\partial r} \lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial s} \lambda + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Alors, d'après (12), nous parviendrons à la détermination de la fonction Φ , comme l'intégrale particulière d'un des deux systèmes des deux équations linéaires, que nous obtiendrons du système (14)-(16):

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{d\Phi}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda_i \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{d\Phi}{dy} - \left(\frac{dF}{dx} - \lambda_i \frac{dF}{dy} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \\ \dots \dots \dots - \lambda_i \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \left(\lambda_i \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial s} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad (i = 1, 2)$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation (17).

Le système (18) remplace le système de Forsyth (11). Les intégrales particulières $\Phi_1 = C_1$; $\Phi_2 = C_2$ peuvent être cherchées ou toutes les deux d'un des systèmes (18), ou toutes les deux d'un autre système (18), ou, enfin, l'une — du premier et l'autre — du second système (18).

III. Les formules (13)-(18) sont vraies dès qu'une certaine *combinaison* (12) des *inégalités* à satisfaire par la fonction donnée F et la fonction cherchée Φ , se trouve remplie. C'est le déterminant Δ_{15}^r de la matrix (4) qui ne doit pas s'annuler; ce déterminant est un des 40 déterminants

$$\Delta_{pq}^r \quad (r = 1, \dots, 4; \quad p, q = 1, \dots, 5; \quad p \neq q).$$

Le système (18), qui remplace le système de Forsyth (11), est valable aussi pour la racine $\lambda = 0$ ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$), tandis que le système (11) lié à l'équation (8), pour $\lambda_1 = 0$ disparaît. Le système (11) exige $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$, tandis que pour le système (18) cette limitation n'est pas nécessaire. On ne peut pas dire, que quand $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$, le système (11) n'a pas de sens; en même temps, pour $\Delta_{15}^1 \neq 0$, le système (18) conserve son sens et s'applique aussi pour les inégalités, analogues aux (12):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \neq 0 \quad ; \quad D\left(\frac{F, \Phi}{r, s}\right) \neq 0;$$

soit que $\frac{\partial F}{\partial r} \neq 0$ ou bien $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$. Quand $D\left(\frac{F, \Phi}{r, s}\right) = 0$, le système de Forsyth (10) sera incompatible; le système (11) tombe en défaut, mais les fonctions F et Φ ne sont pas nécessairement fonctionnellement dépendantes comme fonctions des trois arguments r, s, t ; les fonctions F et Φ seront dépendantes relativement aux variables r et s seulement. Nous montrerons, que dans ces conditions le système (18) s'applique également.

La combinaison (17) est une des 10 combinaisons possibles, que nous pouvons obtenir à partir d'une quelconque de 40 inégalité $\Delta_{pq}^i \neq 0$, en représentant par λ deux de 5 rapports de la forme

$$(19) \quad \frac{(rt)}{(rs)} = \frac{[rx] + [sy]}{[ry]} = \frac{[yt]}{[rx]} = \frac{[tx]}{[ty] + [sx]} = \frac{(ts)}{(tr)}.$$

Ces rapports nous les obtiendrons, en égalant à zéro les déterminants distincts, du 4^{ème} ordre, de la matrice (4)⁽¹⁾.

Il est aisé de voir, que pour chacune des 10 combinaisons, la fonction λ se détermine par la même équation quadratique (17) et que chacune des 10 combinaisons, déterminées par deux des rapports (19), conduit à un système de deux équations linéaires du 1^{er} ordre, équivalents au système (18):

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{d\Phi}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{d\Phi}{dy} + \left(\lambda \frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= 0 \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right.$$

(1) M. KOURENSKY, *Sur l'intégration des équations diff. aux dérivées partielles avec plusieurs variables dépendantes*, « Mémoires de la Cl. Phys.-Math. », Académie des Sc. de l'Ukraine, t. V, livr. 3, 1927, p. 87.

Toutes les 10 combinaisons des deux équations linéaires, équivalents au système (20), d'après la condition (17), se réduisent à la forme que voici: il faut prendre une quelconque des trois équations:

$$(21) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial r} \frac{d\Phi}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{d\Phi}{dy} + \left(\lambda \frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 * \\ & \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{d\Phi}{dy} - \lambda \frac{dF}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial r} * - \frac{dF}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \\ & \left(\lambda \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial t} \right) \frac{d\Phi}{dx} + \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \frac{d\Phi}{dy} * - \lambda \frac{dF}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \left(\frac{dF}{dx} - \lambda \frac{dF}{dy} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right.$$

et une quelconque des deux équations suivantes:

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \\ & \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \lambda \frac{\partial F}{\partial s} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

IV. Les limitations, découlantes des conditions $\Delta'_{pq} \neq 0$, sont essentielles pour la méthode d'intégration de Darboux, par ce qu'on peut appliquer la méthode exposée seulement dans le cas qu'une au moins des combinaisons d'inégalités, qui sont liées avec l'une de 40 limitations $\Delta'_{pq} \neq 0$, est vérifiée. Les limitations $\Delta'_{pq} \neq 0$ montrent, quelle forme des intégrales particulières $\Phi = \text{const.}$ du système auxiliaire des deux équations (20), ou — une des équations (21) et l'autre des équations (22), il faut prendre, pour que la méthode de Darboux soit applicable et pour que l'intégrale particulière $\Phi = \text{const.}$ soit compatible avec l'équation $F = 0$.

Les 20 combinaisons des inégalités, sous l'une desquelles est applicable la méthode de Darboux à notre système de deux équations linéaires du 1^{er} ordre, sont données par le tableau suivant:

$$\begin{aligned} 1. \Delta'_{12}, & \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \neq 0 \\ 2. \Delta'_{13}, & \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial s} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \neq 0 \\ 3. \Delta'_{23}, & \frac{d\Phi}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \neq 0 \\ 4. \Delta'_{25}, & \frac{d\Phi}{dx} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial s} \right] \neq 0 \\ 5. \Delta'_{21}, & \frac{d\Phi}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial s} \right] \neq 0 \\ 6. \Delta'_{35}, & \frac{d\Phi}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial s} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left[\frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial r} \right] \neq 0 \end{aligned}$$

7. $\Delta_{23}^2, \frac{d\Phi}{dy} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial s} \right] = 0$
8. $\Delta_{45}^1, \frac{d\Phi}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left[\frac{dF}{dx} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial s} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left[\frac{dF}{dy} \frac{\partial F}{\partial r} \right] = 0$
9. $\Delta_{15}^2, \frac{\partial F}{\partial r} = 0 ; D \left(\frac{F, \Phi}{r, s} \right) = 0$ 10. $\Delta_{13}^2, \frac{\partial F}{\partial r} = 0 ; D \left(\frac{F, \Phi}{s, t} \right) = 0$
11. $\Delta_{21}^2, \frac{\partial F}{\partial r} = 0 ; D \left(\frac{F, \Phi}{r, t} \right) = 0$ 12. $\Delta_{12}^1, \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; D \left(\frac{F, \Phi}{s, t} \right) = 0$
13. $\Delta_{13}^1, \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; D \left(\frac{F, \Phi}{r, t} \right) = 0$ 14. $\Delta_{14}^1, \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; D \left(\frac{F, \Phi}{r, s} \right) = 0$
15. $\Delta_{15}^2, \frac{\partial F}{\partial r} = 0 ; D \left[\frac{F, \Phi}{y, r} \right] = 0$ 16. $\Delta_{35}^2, \frac{\partial F}{\partial r} = 0 ; D \left[\frac{F, \Phi}{y, s} \right] = 0$
17. $\Delta_{14}^2, \frac{\partial F}{\partial r} = 0 ; D \left[\frac{F, \Phi}{y, t} \right] = 0$ 18. $\Delta_{34}^1, \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; D \left[\frac{F, \Phi}{x, r} \right] = 0$
19. $\Delta_{21}^1, \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; D \left[\frac{F, \Phi}{x, s} \right] = 0$ 20. $\Delta_{23}^1, \frac{\partial F}{\partial t} = 0 ; D \left[\frac{F, \Phi}{x, t} \right] = 0$

Les 20 autres combinaisons s'obtiennent des combinaisons précédentes par le changement de F ed Φ et inversement.

Teoria dei numeri. — *Sopra la Teoria degli ideali di un corpo algebrico finito.* Nota III di A. M. BEDARIDA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Questo mio scritto è il seguito delle Note I e II, pubblicate precedentemente, con lo stesso titolo, in questi « Rendiconti ».

In tali Note si è segnalato un metodo che conduce a scoprire nuove proprietà relative agli ideali di un corpo algebrico $K(\theta)$. Comè si è veduto, per tale metodo, ad ogni funzione aritmetica del corpo razionale, viene a corrispondere un gruppo di proprietà per gli ideali di $K(\theta)$. Nei due lavori precedenti si è esaminato il caso che la funzione aritmetica sia la $\varphi(n)$ di Eulero.

Ora, qui, si considererà quello della funzione aritmetica $f(n)$ che offre il numero dei divisori razionali di un intero razionale n . Se n , decomposto nei suoi fattori primi, razionali, diversi, p_1, p_2, \dots, p_s , è:

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s},$$

(1) Nella seduta del 16 giugno 1929.

ove r_1, r_2, \dots, r_s sono interi razionali convenienti, sarà ⁽¹⁾:

$$f(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_s + 1).$$

Sorgeranno altre proprietà per gli ideali ed, in special modo, ancora altre proprietà degli ideali primari assoluti di Bianchi ⁽²⁾.

2. Conserveremo in questa Nota ed in quelle che seguiranno le notazioni usate nelle precedenti.

Se A è un ideale del corpo algebrico $K(\theta)$, sia decomposto in ideali primi. Indicando con $F(A)$ la funzione aritmetica che offre il numero degli ideali divisori dell'ideale A , analogamente al caso del corpo razionale $K(1)$, sarà, riferendoci alla (1) della Nota I:

$$(1) \quad F(A) = (r_{11} + 1)(r_{12} + 1) \dots (r_{1s_1} + 1) \dots (r_{b1} + 1)(r_{b2} + 1) \dots (r_{bs_b} + 1);$$

e il numero dei divisori razionali della norma NA , sarà dato, riferendoci alla (2) della stessa Nota, dà:

$$(2) \quad f(NA) = (r_{11}f_{11} + r_{12}f_{12} + \dots + r_{1s_1}f_{1s_1} + 1)(r_{21}f_{21} + r_{22}f_{22} + \dots + r_{2s_2}f_{2s_2} + 1) \dots (r_{b1}f_{b1} + r_{b2}f_{b2} + \dots + r_{bs_b}f_{bs_b} + 1).$$

Dalla (1) e (2) risulta che per un ideale A possono presentarsi i tre casi: $F(A) \geq f(NA)$. E ciò dipende dalle singole potenze degli ideali primi diversi che entrano in A , dal loro grado e dal fatto che i loro numeri primi coordinati siano distinti, oppure no, tra di loro.

Sono notevoli i due casi speciali: se $s_i = 1, f_{ji} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, b, j = 1, 2, \dots, s$): allora dalla (1) e (2) risulta: $F(A) = f(NA)$; se uno almeno dei numeri s_i è > 1 e tutti i gradi $f_{uv} = 1$, sarà: $F(A) > f(NA)$. Si hanno cioè i risultati:

1) Se un ideale A si compone di ideali primi tutti di primo grado ed i diversi sono a numeri primi coordinati tutti distinti, il numero degli ideali divisori dell'ideale A uguaglia il numero dei divisori razionali della sua norma.

2) Se un ideale A si compone di ideali primi tutti di primo grado, ma i diversi sono a numeri primi coordinati non tutti distinti, il numero degli ideali divisori dell'ideale A supera il numero dei divisori razionali della sua norma.

3. Nel confronto, per un ideale A , tra i due valori $F(A)$ ed $f(NA)$ si tenga presente che ad un ideale B divisore di A , corrisponde un intero razionale, la norma di B , divisore di NA ; ma inversamente, non avviene, in generale, che per un divisore razionale di NA esista un ideale, la cui norma sia tale divisore, e che sia un ideale divisore dell'ideale A . Inoltre

(1) Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND, *Lezioni sulla Teoria dei numeri* (traduzione italiana di A. FAIFORER) p. 15.

(2) Cfr. le mie Note precedenti.

può avvenire che, per un divisore razionale di NA esistano più ideali (in numero finito) avente per norma un tale divisore e divisori di A .

Questi fatti sono noti dalla teoria generale degli ideali di un corpo algebrico $K(\theta)$.

Seguirà che, se avviene che il numero degli ideali divisori di un ideale è uguale al numero dei divisori razionali della sua norma, non conduce affatto ad asserire che tra gli ideali divisori di un tale ideale ed i divisori razionali della sua norma, esista una *corrispondenza biunivoca*, nel senso che ad ogni ideale divisore dell'ideale corrisponda un divisore razionale della sua norma e ad ogni divisore razionale di questa corrisponda uno ed uno solo ideale, divisore dell'ideale, la cui norma sia il divisore razionale considerato.

Vedremo tra poco una classe speciale di ideali per cui questa circostanza avviene; e, precisamente per gli ideali primari assoluti.

4. Intanto, se A è un ideale primario assoluto, per quanto si è stabilito al n. 5 della Nota II e per il risultato 1) del n. 2 della presente, si può dire:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, per ogni ideale primario assoluto, il numero degli ideali suoi divisori uguaglia il numero dei divisori razionali della sua norma.

Il Bianchi ha dimostrato⁽¹⁾ che ad ogni decomposizione in fattori razionali della norma di un ideale primario assoluto, corrisponde una decomposizione di questo ideale in ideali, tutti primari assoluti, le cui norme sono rispettivamente i singoli fattori considerati della norma. Si potrà quindi dire che, preso un qualunque divisore razionale della norma di un ideale primario assoluto, corrisponde almeno un ideale (della stessa specie) divisore dell'ideale considerato, la cui norma è tal divisore razionale. Perciò, tenendo presente il teorema ora stabilito, risulta che:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, gli ideali divisori di un ideale primario assoluto, corrispondono biunivocamente ai divisori razionali della sua norma.

E questo teorema permette di dare al risultato del Bianchi più sopra ricordato, una forma più completa, e cioè:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, un ideale primario assoluto, corrispondente ad una decomposizione in fattori razionali della sua norma, si decompone in un modo, ed in un modo solo, in ideali primari assoluti, le cui norme siano rispettivamente, tali fattori razionali.

(1) Cfr. BIANCHI, *Sugli ideali primari assoluti in un corpo algebrico*, « Journal de Mathématiques », 1922, fasc. I.

Geometria differenziale. — *Sul problema di Bianchi riguardante le famiglie di Lamé.* Nota ⁽¹⁾ di B. COLOMBO, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

§ 1. — Il prof. Fubini ⁽²⁾, esaminando l'opera scientifica del Bianchi, è stato indotto a segnalare due problemi, che ha proposto di chiamare appunto *problemi di Bianchi*. Quello che qui si considera riguarda le famiglie di Lamé e si enuncia nel modo seguente: « *Trovare tutte le equazioni a derivate parziali del secondo ordine*

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad (3),$$

tali che, mediante superficie integrali $z = z(x, y)$, sia costruibile una famiglia di Lamé, per la quale si possa scegliere ad arbitrio almeno una superficie iniziale, naturalmente tra le superficie integrali». Il prof. Fubini ha poi dimostrato che il problema stesso equivale a quest'altro: « *Trovare tutte le equazioni (1), tali che, per ogni loro integrale $z = z(x, y)$, l'equazione*

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial z} N + \frac{\partial F}{\partial p} N_x + \frac{\partial F}{\partial q} N_y + \frac{\partial F}{\partial r} N_{xx} + \frac{\partial F}{\partial s} N_{xy} + \frac{\partial F}{\partial t} N_{yy} = 0,$$

ove è posto

$$(3) \quad N = n \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

sia compatibile coll'equazione di Cayley

$$(4) \quad \begin{vmatrix} n_{xx} & n_{xy} & n_{yy} \\ 1 + p^2 & pq & 1 + q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0.$$

Lo studio completo del problema di Bianchi, al quale si debbono soluzioni particolari in molti casi ⁽⁴⁾, presenta delle notevoli difficoltà, anche se lo si affronta nella forma analitica indicata dal prof. Fubini, che lo riduce già alla sua più semplice espressione. Invero, per discutere la compatibilità in $n(x, y)$ delle due equazioni a derivate parziali del secondo or-

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1929.

(2) G. FUBINI, *Luigi Bianchi e la sua opera scientifica*. « Annali di Mat. », serie IV, tomo VI (1928-29), p. 45. Cfr. particolarmente la p. 79.

(3) Come di solito, con p, q si indicano le derivate prime di $z(x, y)$, con r, s, t le derivate seconde, e poi con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le derivate terze.

(4) Cfr. in proposito la Memoria citata del prof. FUBINI.

dine (2) e (4), occorre formare varie *condizioni di integrabilità*, in relazione col numero di costanti arbitrarie da cui si vuole dipenda l'integrale comune; esse contengono evidentemente derivate della F rispetto alle x, y, z, p, q, r, s, t e derivate della z rispetto alle x, y , e vanno interpretate nel senso di essere delle identità in x, y , qualunque sia l'integrale z della (1), ossia di essere delle identità in x, y, z e derivate della z , vincolate solo a verificare l'equazione incognita (1) e le sue conseguenze differenziali. Ed è appunto da tali condizioni di integrabilità che dovrebbe ricavarsi, od almeno caratterizzarsi, il simbolo funzionale F , che è l'incognita del problema.

In questa Nota incomincio col fare una trattazione sistematica del caso notevole in cui l'integrale comune delle equazioni (2) e (4) dipende da *un'infinità di costanti arbitrarie*, sicchè le traiettorie ortogonali della famiglia di Lamé possiedono la massima arbitrarietà possibile. Faccio vedere che i casi segnalati dal Bianchi sono ben lungi dal fornire la soluzione completa del problema, mettendo in evidenza nuove classi di soluzioni, molto estese dipendentemente dal grado di arbitrarietà che ancora conserva il simbolo funzionale F ; infine mostro come sia possibile ottenerne altre ancora ⁽¹⁾.

§ 2. — Per semplicità si ponga

$$(5) \quad \psi = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$(6) \quad \lambda = pqt - (1 + q^2)s, \quad \mu = (1 + q^2)r - (1 + p^2)t, \quad \nu = (1 + p^2)s - pqr,$$

$$(7) \quad \eta = rt - s^2 = \psi^4 K \quad (K \text{ curvatura totale}),$$

$$(8) \quad \theta = (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = -\psi^3 H \quad (H \text{ curvatura media}).$$

Con queste notazioni, l'equazione dei raggi principali di curvatura R_1, R_2 , sempre per la superficie $z = z(x, y)$, è

$$(9) \quad \eta R^2 + \psi \theta R + \psi^4 = 0,$$

e l'equazione differenziale delle linee di curvatura è

$$(10) \quad \lambda dy^2 - \mu dx dy + \nu dx^2 = 0,$$

sicchè i mutui rapporti delle λ, μ, ν determinano le linee di curvatura e viceversa.

(1) In generale, operando una trasformazione del *gruppo conforme* dello spazio, ogni soluzione del problema di Bianchi fornisce una nuova soluzione del problema stesso. In proposito ho potuto dimostrare che, escluso il caso banale $F = \mu^2 - 4\nu\lambda$ (colle notazioni del § 2) che, per la (12), conduce alle sfere od a particolari sviluppabili, non esiste un simbolo funzionale F determinato, soluzione del problema, il quale possa esprimersi mediante i soli *invarianti conformi* (cfr. due Memorie del prof. FUBINI nei « Rend. Circolo Mat. di Palermo », 1916 e 1928).

Dalle (6) si traggono le

$$(11) \quad (1 + p^2)\lambda + pq\mu + (1 + q^2)\nu = 0, \quad r\lambda + s\mu + t\nu = 0;$$

in particolare la prima permette di ricavare una qualunque delle λ, μ, ν in funzione soltanto delle altre due e delle p, q e inoltre permette di ricavare uno qualunque dei loro mutui rapporti in funzione soltanto di uno qualunque dei rimanenti e delle p, q . Le quantità $\lambda, \mu, \nu, \psi, \eta, \theta$ sono legate dalla

$$(12) \quad \mu^2 - 4\nu\lambda = \theta^2 - 4\psi^2\eta = \psi^6 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2,$$

formata coi discriminanti delle equazioni (9) e (10) di secondo grado rispettivamente in R ed in $\frac{dy}{dx}$; essa si stabilisce direttamente eseguendo i calcoli e si giustifica geometricamente per il significato delle (9) e (10). Infine si ottiene subito la formula

$$(13) \quad \lambda \frac{\partial}{\partial t} (\mu^2 - 4\nu\lambda) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial s} (\mu^2 - 4\nu\lambda) + \nu \frac{\partial}{\partial r} (\mu^2 - 4\nu\lambda) = 0,$$

che, colle precedenti, si applica nelle dimostrazioni di alcune proprietà soltanto enunciate nei paragrafi successivi.

Le equazioni (2) e (4) sono espresse l'una con N e l'altra con n , legate dalla (3); naturalmente conviene esprimerle o entrambe con N o entrambe con n . Scegliendo la n , la (2) si muta nella

$$(I) \quad An + Bn_x + Cn_y + \psi \frac{\partial F}{\partial r} n_{xx} + \psi \frac{\partial F}{\partial s} n_{xy} + \psi \frac{\partial F}{\partial t} n_{yy} = 0,$$

essendosi posto

$$(14) \quad A = \frac{\partial F}{\partial \chi} \psi + \frac{\partial F}{\partial p} \psi_x + \frac{\partial F}{\partial q} \psi_y + \frac{\partial F}{\partial r} \psi_{xx} + \frac{\partial F}{\partial s} \psi_{xy} + \frac{\partial F}{\partial t} \psi_{yy},$$

$$(15) \quad B = \frac{\partial F}{\partial p} \psi + 2 \frac{\partial F}{\partial r} \psi_x + \frac{\partial F}{\partial s} \psi_y, \quad C = \frac{\partial F}{\partial q} \psi + \frac{\partial F}{\partial s} \psi_x + 2 \frac{\partial F}{\partial t} \psi_y;$$

la (4), ricordando le (6), può scriversi più semplicemente nella forma

$$(II) \quad \lambda n_{xx} + \mu n_{xy} + \nu n_{yy} = 0.$$

Nelle (I) e (II) i coefficienti dell'incognita n e delle sue derivate sono funzioni di $x, y, \chi, p, q, r, s, t$ e il coefficiente A di n nella (I) è anche funzione delle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le quali, per le considerazioni fatte al § 1, complicherebbero la discussione della compatibilità delle due equazioni (I) e (II);

però, tenendo conto della $F = 0$ e perciò anche di $\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = 0^{(1)}$, si trova che A può anche scriversi nella forma più conveniente

$$(14') \quad A = \frac{1}{\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} - p \frac{\partial F}{\partial x} - q \frac{\partial F}{\partial y} \right] + \frac{1}{\psi^3} \left[(r^2 + s^2 + (ps - qr)^2) \frac{\partial F}{\partial r} + \right. \\ \left. + (s(r + t) + (ps - qr)(pt - qs)) \frac{\partial F}{\partial s} + (t^2 + s^2 + (pt - qs)^2) \frac{\partial F}{\partial t} \right],$$

la quale contiene soltanto più le $x, y, \alpha, p, q, r, s, t$ (e non le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

§ 3. — Imponiamo alle (I) e (II) di costituire un sistema in involuzione. La prima condizione è

$$(16) \quad \left(\mu \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial s} \right) \left(\nu \frac{\partial F}{\partial s} - \mu \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \left(\nu \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2,$$

la quale, non contenendo la u e sue derivate, appare come un'equazione a derivate parziali del primo ordine e di secondo grado nella funzione F . Essa esprime notoriamente che le due equazioni di secondo grado in m

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} m^2 - \frac{\partial F}{\partial s} m + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \\ \lambda m^2 - \mu m + \nu = 0 \end{cases}$$

hanno in comune una radice; perciò la (16) deve equivalere complessivamente alle due equazioni che si ottengono sostituendo nella prima delle (17) le due radici

$$(18) \quad m = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\nu\lambda}}{2\lambda} = \frac{2\nu}{\mu \mp \sqrt{\mu^2 - 4\nu\lambda}} \quad (2)$$

della seconda, ossia alle due equazioni

$$(19) \quad \nu (\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\nu\lambda}) \frac{\partial F}{\partial r} - 2\lambda \nu \frac{\partial F}{\partial s} + \lambda (\mu \mp \sqrt{\mu^2 - 4\nu\lambda}) \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Di queste, con calcoli un po' laboriosi ed utilizzando opportunamente alcune relazioni del § 2, si riescono a trovare gli integrali generali, che sono

$$(20) \quad F = \Phi \left(x, y, \alpha, p, q, \frac{\lambda}{\nu}, -\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\psi^2\eta} \right),$$

(1) Al solito $\frac{d}{dx}$ indica la derivazione rispetto alla x che compare in modo esplicito ed anche in α, p, q, r, s, t ; analogamente per $\frac{d}{dy}$.

(2) Naturalmente, quando compaiono i due segni, si devono considerare insieme o sempre quelli superiori o sempre quelli inferiori.

φ essendo simbolo di funzione arbitraria; perciò le (20) stesse costituiscono complessivamente l'integrale generale della (16).

Siccome però, come si è osservato al § 1, basta soddisfare la (16) in conseguenza alla $F = 0$ (anzichè identicamente), risulta dalle (11) che le (20) possono generalizzarsi nelle

$$(20') \quad F = \Phi(x, y, z, p, q, \lambda, \mu, \nu, -\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\psi^2\eta}),$$

Φ essendo ancora simbolo di funzione arbitraria, però omogenea (di grado qualunque) in λ, μ, ν . Ricordando poi le (9) e (10), si conclude:

I simboli funzionali F dati dalle (20') verificano, nel modo più generale, la prima condizione perchè (I) e (II) costituiscano un sistema di involuzione; le equazioni $F = 0$ impongono allora una relazione funzionale tra il punto generico della superficie integrale, il piano tangente, la retta tangente ad una linea di curvatura ed un raggio principale di curvatura.

Soddisfatta così la (16), si devono poi distinguere due casi:

a) Se è $\nu \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$, da cui segue pure $\mu \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial s} \neq 0$, $\nu \frac{\partial F}{\partial s} - \mu \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$, la seconda condizione perchè (I) e (II) costituiscano un sistema in involuzione è

$$(21) \quad \left[\frac{d}{dy} \frac{\nu}{D} + m \frac{d}{dx} \frac{\lambda}{D} + (C - mB) \frac{\lambda \nu}{D^2} \right] \left[A n + B n_x + C n_y \right] + \\ + \frac{\nu}{D} \left[\frac{dA}{dy} n + \frac{dB}{dy} n_x + \left(A + \frac{dC}{dy} \right) n_y \right] + m \frac{\lambda}{D} \left[\frac{dA}{dx} n + \left(A + \frac{dB}{dx} \right) n_x + \frac{dC}{dx} n_y \right] + \\ + \frac{1}{m} \left[(C - mB) \frac{\lambda m^2 - \nu}{D} + m \frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dx} \right] n_{xy} = 0,$$

essendosi posto per semplicità

$$(22) \quad D = \psi \left(\nu \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial t} \right).$$

Nella (21) al simbolo F , che per le (14'), (15) e (22) compare nelle A, B, C, D , s'intendono sostituite le sue espressioni (20'), mentre m è data dalle (18) e riesce in questo caso diversa da zero.

Siccome poi la (21) deve essere un'identità, si scinde nelle quattro condizioni che si ottengono annullando in essa i coefficienti di n, n_x, n_y, n_{xy} .

b) Se è

$$\nu \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \text{ segue pure } \mu \frac{\partial F}{\partial r} - \lambda \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \nu \frac{\partial F}{\partial s} - \mu \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

sicchè risulta

$$(23) \quad \frac{\partial F}{\partial r} : \frac{\partial F}{\partial s} : \frac{\partial F}{\partial t} = \lambda : \mu : \nu;$$

queste si soddisfano, particolarizzando le (20) e (20'), con

$$(24) \quad F = \varphi \left(x, y, \lambda, p, q, \frac{\lambda}{v} \right)$$

e rispettivamente, quando si tenga conto di $F = 0$, con

$$(24') \quad F = \Phi(x, y, \lambda, p, q, \lambda, \mu, v)^{(1)}.$$

In questo caso la (I) e la (II) ammettono come conseguenza l'equazione del primo ordine

$$(III) \quad An + Bn_x + Cn_y = 0.$$

Allora affinché n dipenda, come vogliamo, da infinite costanti arbitrarie, occorre che la (III) sia un *integrale intermediario* della (II); le relative condizioni, sempre coi valori (18) per la m , sono

$$(25) \quad \begin{cases} C - mB = 0 \\ v \left[\frac{dA}{dy} n + \frac{dB}{dy} n_x + \left(A + \frac{dC}{dy} \right) n_y \right] + m\lambda \left[\frac{dA}{dx} n + \left(A + \frac{dB}{dx} \right) n_x + \frac{dC}{dx} n_y \right] = 0, \end{cases}$$

la seconda delle quali, dovendosi soddisfare in conseguenza alla (III) stessa, si scinde a sua volta in due condizioni indipendenti da n e dalle sue derivate; in esse s'intende naturalmente che ad F in A, B, C si sostituiscano le (24').

Infine si riesce a provare che le ulteriori condizioni imposte alla F , dopo avere soddisfatta la prima condizione per l'involuzione, possono effettivamente soddisfarsi con particolari espressioni (20')⁽²⁾.

§ 4. — Sempre allo scopo di trovare nuove soluzioni del problema di Bianchi e prescindendo ora dalle infinite costanti arbitrarie, riesce notevole il caso in cui le (I) e (II) coesistono per $n = \text{cost.}$, sicchè ogni superficie della famiglia di Lamé risulta *parallela* a quella infinitamente vicina. La relativa condizione analitica consiste nell'annullare l'espressione (14') di A , ed appare perciò come un'equazione a derivate parziali per F ; di questa si riesce a calcolare l'integrale

$$(26) \quad F = \varphi \left(p, q, \frac{\lambda}{v}, \chi \right),$$

essendosi posto

$$(27) \quad \chi = \frac{\lambda + v}{\eta},$$

(1) φ e Φ conservano sempre il significato loro attribuito precedentemente.

(2) È degna di nota, a questo proposito, la $F = \lambda$, ossia la soluzione $\lambda = 0$, la quale esprime che un sistema di linee di curvatura della superficie è costituito dalle linee $x = \text{cost.}$; analogamente per $F = v$.

e, quando si tenga conto di $F = 0$, l'integrale

$$(26') \quad F = \Phi(p, q, \lambda, \mu, \nu, \chi)^{(1)}.$$

Dunque: Si può costruire una famiglia di Lamé con superficie parallele integrali della (I), F essendo dato dalla (26'). La $F = 0$ pone una relazione funzionale tra il punto generico della superficie, il piano tangente, le linee di curvatura e la curvatura totale.

L'interesse della (26') proviene dal fatto che la (24') rientra in essa, quando si supponga Φ non funzione esplicitamente delle x, y, z (come avviene in quasi tutti i casi del Bianchi); di modo che, con questa limitazione, i simboli funzionali F trovati nel caso b) del § 3 conducono tutti a soluzioni del problema di Bianchi.

Il procedimento seguito dianzi per scoprire nuove soluzioni del problema può applicarsi più generalmente partendo dal ben noto integrale della (II)

$$(28) \quad n = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z + c_5 (x^2 + y^2 + z^2) \quad (c_i \text{ cost. arb.}),$$

ossia da un integrale della (II) che sia una funzione conosciuta delle x, y, z , ed imponendo poi ad esso di soddisfare la (I); si ottiene così un'equazione a derivate parziali per F .

Calcolo delle probabilità. — *Sulle funzioni a incremento aleatorio.* Nota ⁽²⁾ di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Sia X una grandezza variabile in funzione di un parametro λ , che potrà essere il tempo, come nel seguito intenderemo per fissare le idee.

Supponiamo che X sia soggetta nel tempo a variazioni accidentali, che, in altre parole, la legge secondo cui varia non sia una legge rigorosamente esatta, di modo che essa, noto il valore di X nell'istante iniziale $\lambda = 0$, non permetta di determinare il valore di X in un generico istante λ successivo ($\lambda > 0$), ma soltanto la probabilità che esso cada fra certi determinati limiti.

Diremo allora che X è una funzione di λ a incremento aleatorio.

Se si ha un orologio *esatto*, che nell'istante $\lambda = 0$ segna il tempo $t = 0$, nell'istante generico λ segnerà il tempo $t(\lambda) = \lambda$; in pratica però

(1) Più generalmente φ e Φ nelle (26) e (26') possono essere funzioni in modo esplicito anche delle x, y, z , nelle combinazioni $x + p\lambda, y + q\lambda$.

(2) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1929.

l'esattezza ha sempre un senso alquanto approssimativo, e l'errore $X(\lambda) = t(\lambda) - \lambda$ sarà una funzione in generale non nulla di λ . Se ogni giorno l'orologio avanzasse (o ritardasse) di una stessa frazione ε , sarebbe naturalmente $X = \varepsilon\lambda$, ma non è questo il caso che ci può interessare, perchè non vi sarebbe nulla di aleatorio. Tenendo conto però che nessun orologio potrà marciare con ritmo perfettamente costante, tanto da eliminare ogni possibilità di scarti accidentali comunque piccoli, una simile relazione lineare non potrà rigorosamente sussistere: la conclusione che fin d'ora si presenta come presumibile è che l'errore $X(\lambda)$ sarà la somma di un termine lineare $\varepsilon\lambda$ (valore probabile) e di uno scarto accidentale, il cui ordine di grandezza crescerà al crescere di λ . È questo un esempio, l'esempio più elementare possibile, come vedremo, di problema del tipo generale che abbiamo considerato.

Possiamo distinguere infatti tre casi fondamentalmente diversi di leggi di probabilità per le funzioni a incremento aleatorio; la distinzione è altrettanto essenziale e profonda dal punto di vista filosofico e concettuale che dal punto di vista matematico e algoritmico. Supponiamo di conoscere i valori effettivamente assunti dalla variabile $X(\lambda)$ fino a un certo istante λ_0 (e cioè per $\lambda \leq \lambda_0$); detto allora λ un istante successivo ($\lambda > \lambda_0$), la differenza $X(\lambda) - X(\lambda_0)$ rappresenta l'incremento Δ che la X dovrà subire nell'intervallo di tempo da λ_0 a λ , incremento che è incognito, ma del quale ammettiamo di sapere con quale probabilità possa cadere fra certi determinati limiti, ossia, più brevemente, del quale ammettiamo di conoscere la legge di probabilità $\Phi(\xi)^{(1)}$. Diremo allora che la $X(\lambda)$ è una funzione di λ con

- 1) incremento aleatorio a legge nota,
- 2) incremento aleatorio a legge differenziale,
- 3) incremento aleatorio a legge integrale,

a seconda che la legge di probabilità dell'incremento Δ che essa subirà da λ_0 a λ

- 1) è indipendente dal comportamento (noto o supposto noto) di X nell'intervallo precedente λ_0 ,

- 2) ne dipende solo in quanto dipende dal valore di $X(\lambda_0)$,
- 3) dipende non solo dal valore di X nell'istante λ_0 , ma anche dal comportamento precedente.

Nell'esempio già accennato, la probabilità di un certo scarto accidentale sarà a ritenersi indipendente dagli scarti accidentali eventualmente osservati in precedenza, e si ha quindi una funzione con *incremento aleatorio a legge nota*. Anzi, per di più, a legge *fissa* (o *costante*), in quanto la pro-

(1) $\Phi(\xi)$ rappresenta la probabilità che sia $\Delta < \xi$ (più metà della probabilità che sia esattamente $\Delta = \xi$, nel caso che tale probabilità sia finita). $\Phi(\xi)$ è funzione reale non decrescente, tende a 0 e 1 rispettivamente per $\xi \rightarrow +\infty$ e $\xi \rightarrow -\infty$, è discontinua nei punti cui si riferisce la precedente osservazione, e che costituiscono, al più, un aggregato numerabile. Per la Φ , detta anche *funzione di ripartizione*, e per la *funzione caratteristica*, di cui pure faremo uso, si vedano i Trattati del CASTELNUOVO e del LÉVY.

babilità di un medesimo scarto accidentale sarà a ritenersi uguale in intervalli di tempo uguali (la legge di probabilità dell'incremento Δ fra λ_0 e λ non solo dipende unicamente da λ_0 e λ , ma dipende soltanto dalla differenza $\lambda - \lambda_0$). Consideriamo invece un sistema materiale a un sol grado di libertà, che, avuto un certo impulso iniziale, persegue nel moto per forza d'inerzia dissipando ed esaurendo gradualmente la forza viva per gli attriti. Se con $X(\lambda)$ denotiamo la forza viva all'istante λ , è naturale che, quando si tenga conto delle variazioni accidentali, la X si dovrà considerare soggetta a *incremento aleatorio a legge differenziale*, perchè la legge probabile di decrescenza di X da un certo istante λ_0 in poi dipende ovviamente e soltanto dal valore $X(\lambda_0)$ della forza viva nell'istante λ_0 ⁽¹⁾.

Se poi si tratta di dissipazione d'energia elastica, dovendosi tener conto anche dei fenomeni ereditari, la $X(\lambda)$ ha *incremento aleatorio a legge integrale*, perchè il modo di esaurirsi di X dopo l'istante λ_0 avrà un comportamento probabile dipendente non solo dall'energia $X(\lambda_0)$ nell'istante λ_0 , ma da tutto il comportamento di X precedentemente all'istante λ_0 .

Per chiarire ancora il significato dei tre diversi casi, osserviamo che - a prescindere dalla parte aleatoria della variazione, oppure considerando, in luogo delle variazioni aleatorie, delle variazioni necessarie - essi si riducono, oppure sono analoghi, al caso di una variabile ordinaria X la cui derivata X' dipenda rispettivamente

- 1) soltanto dall'istante λ : $X' = f(\lambda)$,
- 2) soltanto dall'istante λ e dalla stessa X : $X' = f(\lambda, X)$,
- 3) dal comportamento della X fino all'istante λ .

La classificazione è quindi analoga a quella data da VOLTERRA (*Fonctions de lignes*) per le leggi fisiche ordinarie.

2. Vediamo ora di dare al problema un'impostazione matematica.

Per riuscire a tale scopo, dovremo anzitutto trovare il modo di caratterizzare l'azione istantanea dei fattori aleatori: introdurre cioè un'operazione analoga a quella ordinaria di derivazione, che permette appunto di esprimere il comportamento istantaneo di una variabile sotto l'azione di cause che producono effetti rigorosamente determinabili. È questo anzi l'unico punto concettualmente nuovo da affrontare, e quindi il più interessante.

Potrebbe a prima vista sembrare che l'azione istantanea dei fattori aleatori che hanno influenza sull'incremento di X , potessero essere individuati assegnando la legge di probabilità della derivata di X , ma gli incrementi aleatori non tendono, in generale, a crescere linearmente intorno a un dato istante, tanto che una variabile X soggetta a variazioni acciden-

(1) Poichè X tende a zero per $\lambda \rightarrow \infty$, $X(\lambda) - X(\lambda_0)$ tende a $-X(\lambda_0)$ per $\lambda \rightarrow \infty$, ed è quindi assurdo matematicamente, oltre che fisicamente, supporre X funzione aleatoria a legge nota.

tali, non può avere in generale le derivate superiore e inferiore comprese fra limiti assegnati, comunque larghi. Dovremo battere quindi una via totalmente diversa, meglio aderente al significato concettuale della questione.

Non si perde nulla in generalità se, evitando inutili complicazioni di scrittura, ci si propone di studiare il comportamento di una funzione a incremento aleatorio $X(\lambda)$ per valori piccoli di λ , e sotto l'ipotesi che il valore iniziale sia nullo: $X(\lambda) = 0$ per $\lambda = 0$. Basta infatti eseguire un cambiamento nell'origine dei tempi e tener conto di tutti i fatti noti da cui la legge delle variazioni accidentali dipende, perchè la funzione a incremento aleatorio $X(\lambda) - X(\lambda_0)$ dal caso più generale si riduca al caso considerato.

Indichiamo con $\Phi_\lambda(\xi)$ e $\psi_\lambda(t) = \int e^{i t \xi} d\Phi_\lambda(\xi)$ ⁽¹⁾ rispettivamente la funzione di ripartizione e la funzione caratteristica della variabile casuale $X(\lambda)$, e cerchiamo di caratterizzare il loro comportamento asintotico per $\lambda \rightarrow 0$. Cercheremo a tal uopo precisamente di individuare, ove esista, una legge fissa di variazioni accidentali, che, per λ sufficientemente piccolo, differisca quanto poco si vuole dalla legge relativa alla X .

Consideriamo la legge di probabilità la cui funzione caratteristica è $[\psi_\lambda(t)]^n$, ove $\lambda = \frac{1}{n}$: essa è generata sommando n incrementi indipendenti soggetti alla stessa legge di probabilità dell'incremento all'istante $\lambda = \frac{1}{n}$. Se, facendo tendere n all'infinito, avremo una legge limite, ben a ragione la potremo dire *legge derivata* della legge relativa a $X(\lambda)$, per $\lambda = 0$. Analogamente infatti si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right) = f'(0)$ per una funzione ordinaria tale che $f(0) = 0$, ossia, la somma di n incrementi uguali a quello subito da f fino all'istante $\frac{1}{n}$, è, al limite, la derivata di f .

Possiamo scrivere

$$\psi'_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\psi_{\frac{1}{n}}(t) \right]^n = \left[e^{\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \psi_\lambda(t)} \right]_{\lambda=0};$$

se X è funzione a incremento aleatorio a legge nota, porremo poi, e sarà evidente il significato sia del simbolo che del concetto:

$$\psi'_0(t) = e^{\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \psi_\lambda(t)}, \quad \Phi'_\lambda(\xi) - \Phi'_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i \xi t}}{it} \psi'_\lambda(t) dt,$$

e avremo

$$\log \psi_\lambda(t) = \int_0^\lambda \log \psi'_\lambda(t) d\lambda.$$

(1) Integrale di STIELTJES.

In particolare per una legge fissa ($\psi'_\lambda(t)$ indipendente da λ):

$$\log \psi_\lambda(t) = \lambda \log \psi'(t).$$

Il problema più generale che abbiamo considerato nell'introduzione consiste allora nell'integrare la legge di probabilità $\Phi_\lambda(\xi)$, nota $\Phi'_\lambda(\xi)$ in funzione del comportamento di X precedente a λ . Nel caso di un incremento aleatorio a legge nota, il problema è senz'altro risolto dalle formole precedenti.

Rimarrebbe a esaminare se, ed eventualmente sotto quali ipotesi, la legge derivata *esiste*; del problema mi occuperò in una Nota successiva, ma ritengo di poter affermare fin d'ora che la legge derivata *esiste sempre*, se, come abbiamo supposto, $\log \psi_\lambda(t)$ è derivabile rispetto a λ .

3. Per chiarire il concetto della legge derivata sarà utile approfondire alquanto lo studio delle funzioni aleatorie a legge fissa, su cui la definizione essenzialmente si basa. In tal caso, abbiamo visto, è

$$\log \psi_\lambda(t) = \lambda \log \psi'(t).$$

Una conseguenza facilissima e interessante è la seguente: *se la legge di probabilità $\Phi_\lambda(\xi)$ ha valor medio e valore quadratico medio finiti (almeno per uno, e quindi per tutti, i valori di λ), il valor medio di $X(\lambda)$ cresce proporzionalmente a λ e lo scarto quadratico medio dalla media proporzionalmente a $\sqrt{\lambda}$.*

Detti infatti m e σ il valor medio e lo scostamento quadratico medio dalla media, è

$$\log \psi(t) = imt - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \text{termini d'ordine superiore},$$

da cui, indicando $m_\lambda, \sigma_\lambda$, il valor medio e lo scostamento quadratico medio dalla media di $X(\lambda)$, si ha tosto

$$\lambda \left(im_1 t - \frac{\sigma_1^2}{2} t^2 \right) = im_\lambda t - \frac{\sigma_\lambda^2}{2} t^2, \quad m_\lambda = \lambda m_1, \quad \sigma_\lambda = \sqrt{\lambda} \sigma_1.$$

Più in generale: *uno qualunque dei semi-invarianti di THIELE⁽¹⁾, (se è finito per almeno uno, e quindi per tutti, i valori di λ), cresce proporzionalmente a λ .*

Un esempio particolarmente interessante si ha ponendo

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= imt - \frac{\sigma^2}{2} t^2 \\ \text{che dà} \\ \psi_\lambda(t) &= i\lambda m t - \frac{\lambda \sigma^2}{2} t^2 : \end{aligned}$$

(1) Cioè i coefficienti dello sviluppo di $\log \psi$ in serie di TAYLOR.

dopo un tempo λ , X segue la legge normale con valor medio λm e scostamento quadratico medio dalla media $\sqrt{\lambda} \sigma$.

Dimostriamo che una variabile X soggetta nel tempo a scarti accidentali dipendenti dall'azione di fattori che determinano una legge normale fissa, non può in generale avere finite in nessun punto le ordinarie derivate superiore e inferiore ⁽¹⁾. Supponiamo infatti che per $\lambda < \varepsilon$ si abbia

$$|X(\lambda) - m\lambda| < M\lambda:$$

tale ipotesi ha sempre probabilità nulla, comunque grande si fissi il numero M .

Infatti il valor medio di $\{X(\lambda) - m\lambda\}^2$ è $\sigma_\lambda^2 = \lambda\sigma^2$; la probabilità che sia

$$|X(\lambda) - m\lambda| < M\lambda = \frac{M\sigma_\lambda}{\sigma} \sqrt{\lambda}$$

è

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{M}{\sigma}\sqrt{\lambda}}^{\frac{M}{\sigma}\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx < \frac{2M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{\lambda}$$

e tende a zero con λ , qualunque sia M . La probabilità che la relazione sussista per ogni $\lambda < \varepsilon$ è minore di $\frac{2M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{\lambda}$, qualunque sia λ , e quindi è nulla.

4. Benchè questi cenni siano di proposito estremamente sommari, spero possano dare un'idea abbastanza chiara della teoria delle funzioni a incremento aleatorio che su tali basi si potrebbe fondare e sviluppare ampiamente. E non sfuggirà l'interesse pratico di un tale ordine d'idee, ora che nelle leggi fisiche si tende sempre più a vedere soltanto l'espressione di una regolarità statistica.

(1) L'enunciato non è rigorosamente corretto; riprenderò questo punto in una Nota in preparazione.

Aerodinamica. — *Un nuovo fenomeno di aerodinamica.* Nota ⁽¹⁾ di E. RAIMONDI, presentata dal Corrisp. A. CROCCO.

Scopo di questa comunicazione è quello di segnalare, dal lato qualitativo, un nuovo fenomeno di aerodinamica, che ho potuto comprovare con numerose esperienze.

1. Consideriamo una lastra rigida di forma rettangolare $ABCD$ (fig. 1), avente una delle dimensioni (la lunghezza) notevolmente maggiore (per

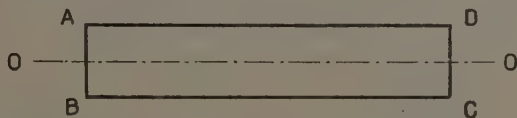


Fig. 1.

esempio quintupla) dall'altra (la larghezza); in maniera cioè da comportarsi nelle esperienze che descriverò, sensibilmente, come se essa fosse infinitamente lunga; e sia OO' la congiungente i punti medi dei lati minori.

Supponiamo che detta lastra sia disposta nelle vicinanze di un piano α , in modo che la OO' sia ad esso parallela. Il piano α sia materializzato mediante una seconda lastra rigida, avente però una superficie molto maggiore della prima; in maniera cioè da comportarsi, nelle esperienze di cui trattasi, come se avesse una superficie infinitamente estesa.

Facendo una sezione con un piano normale alla OO' , si ha la disposizione della fig. 2. Il segmento AB rappresenta la lastra, O è la traccia

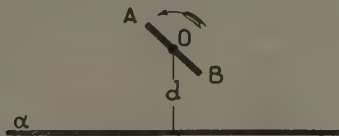


Fig. 2.

di OO' e d è la distanza di O dal piano α (che si suppone maggiore della metà di AB).

Supponiamo, infine, che questo sistema lastra-piano sia immerso in una massa fluida in quiete infinitamente estesa, per esempio nell'aria.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1929.

Ciò posto, l'esperienza dimostra che se facciamo rotare la lastra AB (fig. 2) intorno all'asse O, si produce un'attrazione F tra la lastra ed il piano; e, per conseguenza, se supponiamo l'asse O fisso ed il piano mobile, questo si sposta verso di quello, a meno che non si equilibri la forza F con un'altra forza. Se invece fosse mobile l'asse O e fisso il piano α , la lastra AB si sposterebbe verso di esso.

La forza F è funzione della velocità di rotazione della lastra e della distanza d. L'esperienza mostra, infatti, che essa cresce colla velocità, e che vi è un valore di d per il quale è massima. Coll'aumentare di d essa diminuisce e finisce coll'annullarsi.

La F, per un dato fluido, dipende pure dalla natura della superficie del piano: è maggiore quando essa è levigata.

2. Un fenomeno analogo si rileva se alla lastra AB della fig. 2 si sostituisce un cilindro rigido C, come è rappresentato dalla fig. 3 (sistema cilindro-

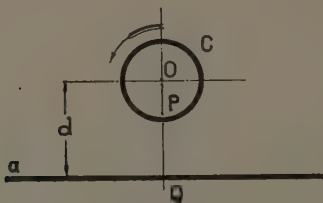


Fig. 3.

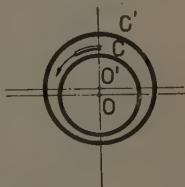


Fig. 4.

piano). Se si fa ruotare il cilindro (il cui asse si suppone fisso) esso attira il piano (che si suppone mobile). Vi è un valore di d per il quale F è massima.

Il fenomeno si rileva ancora se al piano α , della fig. 3, si sostituisce un cilindro cavo rigido C', come è rappresentato dalla fig. 4 (sistema dei due cilindri). Se si fa ruotare uno dei due cilindri, per esempio C (il cui asse si suppone fisso), esso attira il cilindro cavo C' (che si suppone mobile). Se i due cilindri sono coassiali, per ragioni di simmetria la F è nulla. Vi è un valore della distanza OO' (eccentricità) per il quale F è massima.

Il caso del sistema cilindro-piano (fig. 3) rientra in quello dei due cilindri (fig. 4) supponendo che il piano α si ottenga dal cilindro C', quando una generatrice va all'infinito.

3. Ecco i dati di alcune esperienze da me eseguite nell'aria.

a) Sistema lastra-piano (fig. 2). — Lastra di legno dello spessore crescente da cm. 0.8 (ai bordi) a cm. 1.8 (verso l'asse) della lunghezza di cm. 100 e della larghezza di cm. 22.5. Piano costituito da un'assicella di forma rettangolare avente un lato (disposto parallelamente all'asse di rotazione) di cm. 110 e l'altro di cm. 60.

Colla velocità di 1900 giri al minuto primo, per $d = \text{cm. } 15$, la F raggiunse il valore (massimo) di circa Kg. 0.5.

b) Sistema cilindro-piano (fig. 3). — Cilindro C in legno del diametro di cm. 28 e della lunghezza di cm. 100. Piano: quello adottato nel sistema *a*).

Colla velocità di 2500 giri al minuto primo, per $d = \text{cm. } 15$, la F raggiunse il valore (massimo) di circa Kg. 0.4.

c) Sistema dei due cilindri (fig. 4). — Cilindro C : quello del caso *b*). Cilindro cavo C' : pure in legno dei diametri di cm. 30 e 34.

Colla velocità di 1300 giri e con l'eccentricità di cm. 0.5 la F raggiunse un valore (massimo) di poco superiore ad un chilogrammo.

4. Il fenomeno rilevato manifestamente è dovuto all'azione dinamica della circolazione (vortice) generata nella massa fluida dall'elemento che ruota (*rotore*), in virtù dell'aderenza e della viscosità del fluido stesso. È perciò che la F è maggiore quando la superficie del rotore è scabra e quella dell'altro elemento del sistema (piano nel caso delle figg. 2 e 3, e cilindro nel caso della fig. 4) è levigata.

Si intuisce che agli stessi risultati si debba giungere adattando per rotore un cilindro a sezione qualunque.

Una giustificazione qualitativa del fenomeno si può dare applicando la formola di Bernoulli. Mi riferisco al sistema cilindro-piano (fig. 3), ma quanto dirò si può estendere agli altri due sistemi.

Nella regione PQ (dove la velocità della massa fluida è maggiore) la pressione è minore che nella regione del cilindro diametralmente opposta. La risultante quindi delle pressioni della massa fluida sul cilindro è diretta verso il piano; ed il cilindro, se il suo asse è fisso, attirerà il piano.

5. Conviene mettere in relazione il fenomeno rilevato sperimentalmente con alcuni risultati teorici.

Nel caso di un fluido perfetto ed incompressibile e del moto permanente ed irrotazionale, come dimostrarai con cinque Note pubblicate in questi « Rendiconti » ⁽¹⁾ la risultante delle azioni dinamiche di una circolazione tra una lastra ed una parete piana indefinita è una forza che tende a fare avvicinare la lastra al piano.

(1) E. RAIMONDI, *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. II, serie 6^a, 2° sem., fasc. 7°-8°, ottobre 1925; Id., *Trasformazione conforme che serve per lo studio di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. III, serie 6^a, 1° sem., fasc. 1°, gennaio 1926; Id., *Formole generali per il calcolo dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. IV, serie 6^a, 2° sem., fasc. 7°-8°, ottobre 1926; Id., *Calcolo approssimativo dell'effetto dinamico di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. IV, serie 6^a, 2° sem., fasc. 9, novembre 1926; Id., *Complementi relativi al calcolo dell'azione dinamica di una corrente che fluisce tra una lastra ed una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. VII, serie 6^a, 1° sem., fasc. 2°, gennaio 1928.

Colle stesse ipotesi, un'azione analoga produce una circolazione tra un cilindro ed un piano indefinito, o tra due cilindri paralleli disposti l'uno dentro l'altro; come dimostrò prima il mio illustre Maestro prof. U. Cisotti, con due Note pure pubblicate in questi « Rendiconti » ⁽¹⁾, e successivamente, seguendo una via diversa, la dott.^{ssa} Luisa Pelosi, con una Nota presentata alla Reale Accademia delle Scienze di Torino ⁽²⁾.

Però, i risultati teorici ora ricordati e le esperienze eseguite sono di natura essenzialmente diversa. Ed in effetti, nel sistema lastra-piano, per esempio, mentre nello studio ricordato la lastra si suppone ferma, nelle esperienze descritte la lastra ruota; e ciò, a parte il fatto che la viscosità, che è causa del fenomeno sperimentale, manca, per ipotesi, nelle ricerche teoriche.

6. Il fenomeno di cui trattasi, d'altra parte, ha qualche analogia con quello di Magnus (che si può mettere in relazione col teorema di Kutta-Joukowski); per quanto i campi del moto siano di natura diversa: semplicemente connesso nel caso del fenomeno di Magnus, doppiamente connesso in quello attuale. Tuttavia, confrontando i due fenomeni, si può osservare che in quello di Magnus la deviazione è prodotta dall'effetto combinato di una traslazione e di una circolazione, mentre, nel caso nostro, la deviazione è prodotta da una circolazione alla presenza di un piano (nei casi delle figg. 2 e 3). Si può quindi concludere che la presenza di una parete piana indefinita *equivale* (per così dire) ad una traslazione.

Non è improbabile che il fenomeno da me segnalato possa avere qualche applicazione nella tecnica, e particolarmente nell'aeronautica.

(1) U. CISOTTI, *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra un cilindro ed una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. I, serie 6^a, 1° sem., fasc. 9°, maggio 1925; ID., *Effetto dinamico di una corrente che circola attorno ad un cilindro in un tunnel*. Questi « Rendiconti », vol. I, serie 6^a, 1° sem., fasc. 10°, maggio 1925.

(2) L. PELOSI, *Un'applicazione idrodinamica della funzione di Green*. « Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino », vol. LXI, 1926, adunanza del 9 maggio 1926.

Ottica astronomica. — *L'ipotesi balistica e la verifica della legge delle aree nelle orbite delle « doppie » telescopiche.* Nota I ⁽¹⁾ di C. CANNATA, presentata dal Corrisp. M. LA ROSA.

In occasione del Congresso Internazionale di Fisica a Como, il professore H. Lorentz ⁽²⁾, che così vivo interesse mostrò di aver preso alla polemica sulla velocità della luce ed ai lavori che a questa importante questione sono stati dedicati ⁽³⁾, ebbe a segnalare insistentemente la necessità di una prova più netta e più precisa, basata cioè sopra calcoli numerici completi, dell'impossibilità di scoprire con le osservazioni astronomiche sul moto delle « doppie telescopiche » l'eventuale influenza del moto della sorgente, sulla velocità di propagazione della luce.

Dubitava egli che una tale influenza, se veramente esistente, avrebbe dovuto modificare il moto apparente di queste stelle in misura rivelabile per mezzo delle osservazioni ed in particolare rivelare deviazioni rispetto alla legge delle aree, in modo che l'assenza di ogni deviazione da questa legge potesse bastare a far rigettare quella ipotesi.

E poichè lo stesso dubbio è stato in altri lavori ed opere largamente riprodotto ⁽⁴⁾, anzi quasi tramutato in certezza, ci siamo qui assunto il compito di sviluppare, con tutta l'ampiezza desiderabile, il calcolo delle perturbazioni prevedibili in base alla teoria balistica per le doppie telescopiche, e di confrontare l'ordine di grandezza di tali perturbazioni con gli errori inerenti a questo genere di osservazioni.

Com'è noto la 2^a legge di Keplero è tradotta analiticamente da una equazione della forma :

$$(1) \quad \int_0^v r^2 dv = mt + C$$

in cui r denota il raggio vettore, v l'anomalia vera, m il rapporto tra 2π e il periodo τ del moto orbitale, t l'istante in cui l'astro occupa la posizione (r, v) e C una costante d'integrazione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1929.

(2) *Atti del Congresso Internazionale di Como*, vol. II, p. 281. Zanichelli, 1928.

(3) Per la bibliografia sull'argomento si può consultare la Memoria della signorina A. CABRAS, Lincei, 1929.

(4) Citiamo tra i tanti: WIEN-HARMS, *Handbuch der Physik*, vol. XVIII, pp. 41 e sgg. (art. di Laue), v. anche LUDENDORFF, *Handbuch der Astrophysik*, vol. VI, parte II, p. 228 (Julius Spinger, 1928).

Nell'ipotesi della costanza della velocità della luce e prescindendo dal moto proprio, il tempo di propagazione dall'astro all'osservatore risulta costante e però l'equazione (1) continuerà ad esprimere la 2^a legge di Keplero anche interpretando la t come tempo di arrivo (o di osservazione) della luce partita dalla posizione (r, v) dell'astro.

Eseguito l'integrazione indicata nel 1° membro della (1), mediante l'introduzione dell'anomalia eccentrica E , si ottiene la relazione:

$$(2) \quad E - e \sin E = mt + C$$

in cui e denota l'eccentricità dell'orbita.

Questa equazione non può più valere rigorosamente nell'ipotesi balistica, perchè secondo questa l'intervallo di tempo che decorre tra la partenza e l'arrivo di un dato fascio di luce dipende dal valore istantaneo della velocità radiale. La legge di dipendenza tra il tempo di osservazione T e l'istante di partenza t della luce è qui data, al solito, da una relazione della forma:

$$(3) \quad T = t + \frac{d}{c^2} v_r + C$$

in cui d denota la distanza dell'astro dall'osservatore, c la velocità normale della luce (cioè il valore che ha questa velocità quando la sorgente è in quiete rispetto all'osservatore), v_r la velocità radiale e C una costante. Poichè nel nostro esame importa solo considerare i termini dipendenti dal tempo si può porre per v_r la parte variabile

$$(4) \quad \frac{ma \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} \cos(v + \omega)$$

della velocità radiale orbitale⁽¹⁾, e scrivere senz'altro:

$$(5) \quad mT = mt + h \cos(v + \omega)$$

avendo posto

$$(6) \quad \frac{dm^2 a \sin i}{c^2 \sqrt{1 - e^2}} = h.$$

La propagazione balistica introduce dunque nella (3) il termine di correzione $h \cos(v + \omega)$ variabile in un intervallo di ampiezza $2h$ e che si sovrappone al termine solito $mt = E - e \sin E$ che varia nell'intervallo $(0, 2\pi)$. Le correzioni introdotte dall'ipotesi balistica dipendono dunque

(1) I significati delle lettere che figurano nella formula (4) sono i soliti e cioè:

a = semiasse dell'orbita;

i = inclinazione dell'orbita;

ω = angolo tra il punto nodale ed il periastro, nel piano dell'orbita.

dal rapporto $b/2\pi$ e siccome questo rapporto ha, per le doppie telescopiche, valori assai piccoli le perturbazioni che ne risultano sono generalmente insensibili. Basterà, per convincersene, dare uno sguardo alla tavola seguente in cui sono riportati i valori di b calcolati per alcune doppie telescopiche scelte tra le più note

Stella	b	Stella	b
η Cassiopejae	2, 8.10 ⁻⁶	δ Comae Berenidis . . .	4, 6.10 ⁻⁴
δ Cygni	2, 7.10 ⁻⁵	α Centauri	2,99.10 ⁻⁴
Sirio	3, 8.10 ⁻⁵	γ Andromadae	9, 1.10 ⁻³
Procyon	4,45.10 ⁻⁵	Capella	1,57.10 ⁻¹
γ Virginis	4, 7.10 ⁻⁵		

L'entità dei valori di b è, per le prime otto stelle, così piccola che ci dispenserebbe da ogni ulteriore considerazione. Il caso però di Capella, caso veramente eccezionale, perchè essa è l'unica ⁽¹⁾ tra le telescopiche a possedere un periodo che si conta in giorni ⁽²⁾, ci spinge a fare un esame più particolareggiato della questione.

Occorre perciò premettere — come del resto è a tutti noto — che nelle osservazioni astronomiche ciò che può direttamente constatarsi è solo la proiezione dell'orbita su un piano normale alla visuale. In questo piano la posizione relativa della componente primaria e del compagno, che costituiscono la nostra doppia, viene definita mediante un sistema di coordinate polari ρ, ϑ avente l'origine nella primaria. Basterà dunque mostrare che la valutazione di ognuna di queste grandezze fatta nell'ipotesi di una costante velocità della luce e la valutazione fatta nell'ipotesi balistica, portano a risultati che differiscono per quantità di ordine di grandezza non superiore a quello degli errori di osservazione.

Sia infatti:

$$(7) \quad \vartheta = f(M)$$

la relazione che lega l'angolo di posizione all'anomalia media $M = mt$. Nell'ipotesi della velocità costante si ha:

$$(8) \quad \vartheta = f(m(T - \delta)) = f(mT) + C$$

(1) Per lo meno tra le doppie elencate da HENROTEAU in *Handbuch der Astrophysik*, J. Springer, 1928 (vol. VI, parte II, p. 353).

(2) Per questa anomalità la si include talvolta tra le spettroscopiche.

essendo δ , C quantità costanti; mentre nell'ipotesi balistica allo stesso istante T di osservazione corrisponde l'angolo

$$(9) \quad \vartheta' = f(m(T - \delta) - h \cos(v + \omega)) = f(mT - h \cos(v + \omega)) + C.$$

L'errore di valutazione commessa nell'angolo di posizione è dunque:

$$(10) \quad \vartheta' - \vartheta = f(mT - h \cos(v + \omega)) - f(mT)$$

e si può porre approssimativamente, dato che c'interessa solo l'ordine di grandezza di questo errore,

$$(11) \quad \vartheta' - \vartheta \simeq -h \cos(v + \omega) \frac{d\vartheta}{dM} = -\frac{h}{m} \cos(v + \omega) \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Intanto

$$(12) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Il 1° fattore si calcola differenziando la relazione che lega v e ϑ :

$$(13) \quad \operatorname{tg}(\vartheta - \Omega) = \pm \cos i \operatorname{tg}(v + \omega).$$

Si trova facilmente:

$$(14) \quad \frac{d\vartheta}{dv} = \pm \frac{\cos i}{\sin^2 i \cos^2(v + \omega) + \cos^2 i}.$$

Calcolando il 2° fattore si ottiene:

$$(15) \quad \frac{dv}{dt} = m(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + e \cos v)^2$$

cosicchè

$$(16) \quad \vartheta' - \vartheta \simeq \mp h \cos(v + \omega) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + e \cos v)^2 \frac{\cos i}{\sin^2 i \cos^2(v + \omega) + \cos^2 i}.$$

Nel caso, il più sfavorevole, di Capella si ha:

$$h = 0,157 \quad , \quad e = 0,0086 \quad , \quad i = 41^\circ 08'$$

e quindi, approssimativamente:

$$(17) \quad \vartheta' - \vartheta \simeq \mp \frac{h}{\cos i} \frac{\cos(v + \omega)}{1 + \cos^2(v + \omega) \operatorname{tg}^2 i},$$

che in valore assoluto non raggiunge la quantità

$$(18) \quad \frac{0,157}{2 \cdot 0,656} \simeq 0,12 \text{ (radianti)}^{(1)};$$

(1) Il massimo dell'espressione (18) si ha infatti per $\cos(v + \omega) = \cot i$ e quindi
 al massimo $\vartheta' - \vartheta = \frac{h}{2 \sin i} = \frac{0,157}{2 \cdot 0,656}.$

cosicchè gli scarti estremi che risulterebbero sui valori dell'angolo di posizione ϑ , per effetto della propagazione balistica, raggiungono appena qualche decimo di radiante.

Poichè l'ordine di grandezza degli errori di osservazione non è certo più piccolo il nostro assunto resta, per ciò che riguarda l'angolo ϑ , pienamente dimostrato.

Analoghi risultati si ottengono per le distanze ρ . Ripetendo le considerazioni fatte per le ϑ , si ha similmente:

$$(19) \quad \rho' - \rho = -\frac{h}{m} \cos(v + \omega) \frac{d\rho}{dt}.$$

Per calcolarci $\frac{d\rho}{dt}$ deriviamo logicamente, rispetto a t , la relazione

$$\rho = r \cos(v + \omega) \cdot \sec(\vartheta - \Omega)$$

che com'è noto lega le quantità r, v alle ρ, ϑ . Si ottiene evidentemente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} - \operatorname{tg}(v + \omega) \cdot \frac{dv}{dt} + \operatorname{tg}(\vartheta - \Omega) \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Tenendo presenti la (13) e la (12), si ha:

$$(20) \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{r} \frac{dr}{dt} - \rho \operatorname{tg}(v + \omega) \cdot \frac{dv}{dt} \left[1 \mp \cos i \frac{d\vartheta}{dv} \right].$$

Intanto

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{a(1 - e^2)e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \cdot \frac{dv}{dt}$$

cosicchè, sostituendo nella (19), si trova:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{\rho}{r} \cdot \frac{a(1 - e^2)e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} - \rho \operatorname{tg}(v + \omega) \cdot \left(1 \mp \cos i \frac{d\vartheta}{dv} \right) \right] \frac{dv}{dt}.$$

La (19) può allora scriversi:

$$\rho' - \rho = -\rho \frac{h}{m} \left[\frac{a(1 - e^2)e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} - \sin(v + \omega) \cdot \left(1 \mp \cos i \frac{d\vartheta}{dv} \right) \right] \frac{dv}{dt}.$$

Ponendo al posto di $\frac{d\vartheta}{dv}, \frac{dv}{dt}$ le loro espressioni, date rispettivamente

dalla (14) e dalla (15), si ottiene infine:

$$(21) \quad \rho' - \rho = -h\rho \left[\frac{a(1 - e^2)e \sin v \cdot \cos(v + \omega)}{r} - \sin(v + \omega) \cdot (1 + e \cos v)^2 \left(1 - \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i \cdot \cos^2(v + \omega) + \cos^2 i} \right) \right] (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Nel caso di Capella si può porre $e = 0$ e quindi:

$$(22) \quad \rho' - \rho = b\rho \sin(v + \omega) \cdot \left(1 - \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i \cdot \cos^2(v + \omega) + \cos^2 i} \right).$$

Il valore assoluto di questa espressione diventa massimo per

$$\sin(v + \omega) \simeq 0,87, \quad \cos(v + \omega) \simeq 0,5.$$

In corrispondenza, la (22) dà

$$\rho' - \rho \simeq \frac{1,57 \cdot 10^{-1} \cdot 0,87}{6,28} \rho \simeq 2 \cdot 10^{-2} \rho.$$

Questo scarto massimo prevedibile in base all'ipotesi balistica, risulta notevolmente inferiore agli errori che si commettono nelle osservazioni, anche quando esse vengano fatte con i moderni metodi interferometrici⁽¹⁾.

La superiore discussione mette fuori questione ogni possibilità di verifica del principio balistico in base alle osservazioni sulle doppie telescopiche. Ad ogni modo faremo vedere in una prossima Nota che, quand'anche gli scarti sopra previsti si supponessero osservabili, l'applicabilità della seconda legge di Keplero al moto delle doppie telescopiche non potrebbe ancora costituire argomento solido per negare la validità del principio balistico.

Oceanografia. — *Considerazioni teorico-sperimentali sul regime delle maree del mare Adriatico*⁽²⁾. Nota II di M. TENANI, presentata⁽³⁾ dal Socio L. PALAZZO.

1. — La stazione di Durazzo, di cui abbiamo esposto le costanti armoniche di marea, è situata sull'estremo orientale della Sezione 36.2 considerata dallo Sterneck nella Nota citata, a una distanza di 82 km. dalla linea da lui tracciata come mediana del mare. Chiamando, in conformità con lo Sterneck, η_i le amplitudini teoriche delle oscillazioni longitudinali e $\bar{\eta}_i$ le amplitudini teoriche delle oscillazioni trasversali sull'estremo orientale della sezione suddetta, dalle tabelle dello Sterneck si hanno i seguenti valori⁽⁴⁾:

(1) Cfr. MERRILL, « *Astrophys. Journ.* », 56, 1922, p. 42. A titolo di esempio notiamo che in quattro osservazioni del 14 gennaio 1921 eseguite alle ore 7 36', 8 31', 9 08', 10 25'; si sono trovati per ρ i valori $461 \cdot 10^{-4}$, $467 \cdot 10^{-4}$, $461 \cdot 10^{-4}$, $452 \cdot 10^{-4}$, rispettivamente.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Idrografico della R. Marina, in Genova.

(3) Nella seduta del 1º giugno 1929.

(4) Il segno delle $\bar{\eta}_i$ indica che, per tali oscillazioni trasversali, la bassa marea avviene un quarto del periodo dopo l'alta marea delle longitudinali.

	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1
$\eta_i = \text{cm.}$	8.94	5.48	1.60	1.67	3.80	1.46	1.20
$\bar{\eta}_i = \text{»}$	-0.65	-0.55	-0.10	-0.17	-1.49	-0.43	-0.46

Secondo tali elementi la oscillazione risultante dell'oscillazione longitudinale e trasversale deve presentare, rispetto alle oscillazioni longitudinali uno sfasamento che, come è facile calcolare, risulta per le varie onde rispettivamente di

$$-3^\circ.3 \quad -5^\circ.4 \quad -2^\circ.9 \quad -4^\circ.7 \quad -17^\circ.4 \quad -13^\circ.3 \quad -17^\circ.1$$

Applicando tali sfasamenti con segno contrario alle situazioni g osservate a Durazzo (che trovasi a sole 4 sezioni dal canale di Otranto), le situazioni g delle onde longitudinali che ne risultano sono le seguenti:

per	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1
	105°	109°	126°	109°	66°	40°	65°

Se confrontiamo tali valori con quelli dedotti dallo Sterneck, come è stato detto sopra, dalle osservazioni di Pola, e che sono rispettivamente i seguenti:

$$106^\circ \quad 114^\circ \quad 113^\circ \quad 112^\circ \quad 76^\circ \quad 77^\circ \quad 70^\circ$$

si vede chiaramente che la concordanza è ottima, anzi diremo perfetta, se si riflette al modo col quale lo Sterneck fu costretto a scegliere le costanti d'integrazione delle ricordate equazioni differenziali, specie per le onde diurne.

Ammesso così come sufficientemente provata per due vie diverse l'esattezza delle situazioni delle onde longitudinali, si può passare a decomporre a porre a nostra volta le ampiezze osservate a Durazzo per le varie componenti armoniche in modo da calcolare le ampiezze, che diremo *osservate*, delle componenti longitudinali e trasversali.

Indicando con η_0 e $\bar{\eta}_0$ la ora dette ampiezze osservate, il calcolo dà per Durazzo:

per	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1
$\eta_0 = \text{cm.}$	9.25	5.43	0.62	1.47	4.40	1.00	1.44
$\bar{\eta}_0 = \text{»}$	-0.65	-0.94	+0.12	-0.21	-2.34	-0.92	-0.80

Il confronto di queste η_0 e $\bar{\eta}_0$ con le η_i e $\bar{\eta}_i$ sopra indicate, calcolate sempre per Durazzo, ci permette di osservare che, a meno di qualche millimetro (astruendo dalla componente N_2 che, ricavata da appena 29 giorni di osservazione, ha un peso molto minore), la concordanza è molto soddisfacente. Considerazioni identiche risultano evidentemente dalle costanti di S. Giovanni di Medua, come è facile verificare.

2. - Approfitando del fatto che le equazioni differenziali che conducono al calcolo di η e quelle che conducono al calcolo $\bar{\eta}$, per la loro omogeneità, sono soddisfatte non solo dai valori di η e $\bar{\eta}$ calcolati dallo Sterneck per le varie sezioni, ma da un sistema di valori ad esse proporzionali, possiamo, senza dover rifare tutti i laboriosi calcoli dello Sterneck, cercare quali sono le ampiezze che si sarebbero dedotte per la sezione 40 e cioè per il canale di Otranto se, invece di partire dalle costanti di Pola, come ha fatto lo Sterneck, si fosse partiti dalle attuali costanti di Durazzo.

Lo Sterneck aveva trovato come amplitudine e situazione delle onde longitudinali nel canale di Otranto (sez. 40 da lui considerata, vedi figura nella memoria citata in principio; η in cm., g in gradi):

dalle costanti di Pola :

M_2		S_2		N_2		K_2		K_1		O_1		P_1	
η	g	η	g	η	g	η	g	η	g	η	g	η	g
7.57	, 106°	4.36	, 114°	1.39	, 113°	1.32	, 112°	2.44	, 76°	1.10	, 77°	0.79	, 70°

Usando ora le η_0 osservate a Durazzo, sopra ottenute, e correggendo tutte le η calcolate dallo Sterneck in ragione del corrispondente rapporto η_0/η_i relativo a Durazzo, si arriva ai seguenti valori pel canale di Otranto:

dalle costanti di Durazzo :

7.83 , 105° ; 4.32 , 109° ; 0.54 , 126° ; 1.16 , 109° ; 2.82 , 66° ; 0.75 , 65° ; 0.95 , 40°

che sono molto prossimi a quelli sopra indicati (astrazione fatta per N_2 per le ragioni stesse sopra dette).

3. - Posteriormente alla memoria dello Sterneck vennero calcolate in Adriatico le costanti armoniche di due punti molto interessanti della sponda *occidentale* molto prossimi alla linea nodale delle onde semidiurne e quindi particolarmente importanti per ciò che riguarda le onde diurne che vedemmo calcolate su basi così provvisorie dallo Sterneck; le analoghe costanti sulla sponda *orientale* sono meno adatte allo scopo per i molti canali ed isole che vi rendono i fenomeni più complicati. Voglio alludere alle costanti di Ancona dedotte da 6 mesi di osservazione nel gennaio-giugno 1918 che deduco dai « Verbalì della Commissione Mareografica Italiana » ⁽¹⁾ e quelle di Pesaro da me recentemente calcolate, col metodo di Doodson, da 15 giorni di registrazione (10-24 giugno 1927).

(1) « Verbalì della Commissione Mareografica Italiana », 1925.

Le costanti sono le seguenti:

	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1	M_4	MS_4
Ancona H = cm.	6.7	3.6	1.5	1.5	12.9	4.2	1.5	—	—
g =	329°	354°	333°	335°	85°	68°	72°	—	—
Pesaro H = cm.	12.8	6.8	3.2	[1.8]	15.4	4.2	[5.1]	0.3	0.3
g =	311°	313°	279°	[313°]	84°	56°	[84°]	120°	232°

Analogamente a quanto abbiamo fatto sopra partendo dalle costanti di Durazzo, è facile ricavare per queste due stazioni i valori delle ampiezze longitudinali η_0 e trasversali $\bar{\eta}_0$; e da tali valori osservati risalire, col metodo sopra indicato, ai valori di η alla 40^a sezione (Canale di Otranto); nonchè dedurne, nello stesso modo esposto sopra per Durazzo, le situazioni g delle varie onde longitudinali nel Canale di Otranto. Senza dilungarmi ulteriormente sui calcoli, che è facile verificare, ho ottenuto:

dalle costanti di Ancona, per:

M_2		S_2		N_2		K_2		K_1		O_1		P_1	
η	g	η	g	η	g	η	g	η	g	η	g	η	g
10.56	106°	5.10	103°	2.12	104°	3.16	93°	2.65	65°	1.32	47°	1.10	6°

dalle costanti di Pesaro:

10.42, 99°; 5.96, 98°; 2.73, 68°; 1.57, 98°; 2.84, 74°; 1.08, 45°; 0.96, 75°

Come si può vedere i vari valori di η e di g pel Canale di Otranto dedotti da Pola (Sterneck) a quelli qui dedotti da Durazzo, Ancona e Pesaro concordano con grande esattezza. Ho voluto, ad esempio, assicurarmene calcolando il valor medio di η e di g per M_2 , deducendone poi l'errore medio assegnando ai vari valori un peso proporzionale alla durata delle osservazioni. Nell'eseguire tale media occorre tener conto che ⁽¹⁾ η e g rappresentano il modulo e la situazione di un vettore e quindi in ogni caso occorre fare la decomposizione di tale vettore secondo due assi normali e operare sulle componenti per poi ottenere, colle medie di queste componenti, il valor medio del modulo e la situazione media del vettore medio che ne risulta.

Ho ottenuto così per M_2 nel Canale di Otranto:

$$\eta_{\text{medio}} = \text{cm. } 8.57 \pm 0.21 \quad g_{\text{medio}} = 105^\circ.7 \pm 0^\circ.58$$

(1) Cfr. H. RAUSCHELBACH, « Annalen der Hydr., ecc. », 1925, p. 86.

mentre operando nello stesso modo sugli stessi dati, considerati come di ugual peso, ho ottenuto:

$$\eta_{medio} = \text{cm. } 9.08 \pm 0.80$$

$$g_{medio} = 103^{\circ}.7 \pm 2^{\circ}.06$$

risultati come si vede affetti da errori medi molto piccoli.

Analogamente per le altre onde il medesimo procedimento mi ha dato le seguenti medie pesate:

per S_2	$\eta_m = 4.59 \pm 0.46$	$g_m = 109^{\circ}.4 \pm 0^{\circ}.93$
« N_2	$\eta = 1.59 \pm 0.11$	$g = 108^{\circ}.3 \pm 1^{\circ}.39$
« K_2	$\eta = 1.85 \pm 0.15$	$g = 100^{\circ}.3 \pm 1^{\circ}.6$
« K_1	$\eta = 2.53 \pm 0.01$	$g = 71^{\circ}.7 \pm 0^{\circ}.89$
« O_1	$\eta = 1.18 \pm 0.04$	$g = 65^{\circ}.0 \pm 4^{\circ}.00$
« P_1	$\eta = 0.90 \pm 0.02$	$g = 67^{\circ}.7 \pm 1^{\circ}.26$

4. — Queste verifiche sperimentali, mentre confermano in particolare per l'Adriatico le deduzioni già tratte dalle sopra citate considerazioni teoriche ed il calcolo, praticamente molto importante, degli spostamenti longitudinali dell'acqua durante il giorno attraverso il Canale di Otranto, confermano la possibilità di estendere analoghe considerazioni e analoghi calcoli ad altri mari; in particolare, a basare sugli analoghi calcoli effettuati dallo Sterneck per il bacino Artico, considerazioni fondate sul confronto coi risultati mareografici ottenuti in quel bacino durante la compagna 1928 della R. N. *Città di Milano*. Ciò verrà esposto in altra prossima occasione.

Fisica. — *Sull'azione fotografica degli elettroni lenti.* Nota ⁽¹⁾ di B. ROSSI e G. BERNARDINI, presentata dal Socio A. GAR-BASSO.

1. L'uso della fotografia nello studio degli elettroni lenti è limitato dalla circostanza che la sensibilità delle lastre per gli elettroni diminuisce al diminuire della velocità di questi e si annulla quando essa scende al di sotto di un certo limite.

Questo limite è diverso per le diverse qualità di lastre e può essere notevolmente abbassato ungendo leggermente la gelatina sensibile con olio minerale o con vaselina.

L'azione sensibilizzante di queste sostanze dipende assai probabilmente dall'attitudine che esse hanno, a divenire fluorescenti sotto il bombarda-

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1929.

mento degli elettroni. Sembra infatti accertato che l'azione fotografica degli elettroni sia indiretta; gli elettroni cioè non provocherebbero, col loro urto, la decomposizione del bromuro d'argento; ma, colpendo la gelatina o lo straterello d'olio, che la ricopre, darebbero origine ad una radiazione, la quale, alla sua volta, impressionerebbe il bromuro d'argento.

Sulle lastre commerciali, non oliate, ogni azione degli elettroni cessa attorno alla velocità di 40 volta⁽¹⁾.

Con lastre Eastman oliate *Kenneth Cole* riuscì a fotografare elettroni di 25 volta⁽²⁾. In seguito anche altri sperimentatori⁽³⁾ hanno usato lastre sensibilizzate con olio o vaselina per fotografare gli elettroni; ma, per quanto ci consta, nessuno è sceso al di sotto del limite raggiunto da Cole.

D'altra parte, l'indirizzo preso recentemente dalla fisica teorica ha richiamato sempre più l'attenzione sul comportamento degli elettroni lenti. Poichè infatti, secondo la relazione di *de Broglie*:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

la lunghezza d'onda delle « onde elettroniche » (o, in generale, delle « onde materiali ») varia in ragione inversa della velocità, le differenze fra il comportamento previsto dalla meccanica classica e quello previsto dalla meccanica ondulatoria sono più marcate negli elettroni lenti che negli elettroni rapidi.

Inoltre, poichè nella riflessione⁽⁴⁾ sulle superficie metalliche gli elettroni lenti entrano in reazione soltanto coi primissimi strati atomici, si può sperare di ottenere, da uno studio accurato della distribuzione in velocità e in direzione degli elettroni riflessi, qualche indicazione sulla struttura superficiale dei metalli stessi.

Ci sembra perciò non privo di interesse comunicare i primi risultati di alcune nostre esperienze, le quali provano come il limite di 25 volta, trovato da Cole, e da altri sperimentatori, dipenda soltanto dalle particolari condizioni dell'esperienza (essenzialmente, riteniamo, dalla qualità dell'olio adoperato per ungere le lastre); e come non sia affatto impossibile, variando tali condizioni, fotografare elettroni di velocità notevolmente inferiore.

(1) Qui, come in seguito, misuriamo la velocità degli elettroni mediante la differenza di potenziale, sotto la quale vengono accelerati.

(2) *The blackening of photographic emulsions by low speed electrons.* (« *Phys. Rev.* », 1926, vol. 28, p. 781).

(3) Cfr., p. e., BROWN e WHIDDINGTON (« *Science Abstr.* », 1927, n. 2120); JONES e WHIDDINGTON (« *Phil. Mag.* », 1928, vol. 6, p. 889); RUPP (« *Ann. d. Phys.* », 1928, vol. 85, p. 981).

(4) Comprendiamo sotto questa denominazione, per quanto impropriamente, anche la diffrazione sui reticoli cristallini e l'emissione secondaria.

2. Il dispositivo da noi adottato è analogo a quello descritto da Cole ⁽¹⁾.

Gli elettroni, emessi da un filamento di tungsteno toriato (gentilmente fornitoci dalla ditta Zenith di Monza) attraversano successivamente due fenditure: la prima larga circa 2 mm., la seconda pochi decimi di millimetro. Deflessi da un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla direzione del loro movimento, cadono, dopo aver percorso mezza circonferenza a partire dalla seconda fenditura sulla lastra fotografica, sulla quale danno una immagine a fuoco della fenditura stessa ⁽²⁾.

Allo scopo di evitare la formazione, in prossimità del filamento, di una notevole carica spaziale, gli elettroni, tra il filamento e la prima fenditura, vengono accelerati a circa 100 volta; poi, tra la prima e la seconda fenditura, ritardati da un campo antagonista fino alla velocità desiderata.

Le diverse parti sono racchiuse in una cassetta di bronzo a pareti assai spesse, nella quale il vuoto è mantenuto mediante una pompa a diffusione Leybold a tre stadi. L'assenza di qualsiasi velatura sulle lastre prova che il numero degli urti fra gli elettroni e le molecole del gas residuo è trascurabile. E poichè, d'altra parte, la sezione efficace delle molecole per l'urto degli elettroni aumenta rapidamente al diminuire della velocità di questi ⁽³⁾, siamo condotti a ritenere che la pressione nell'interno della cassetta sia estremamente piccola (dell'ordine di 10^{-6} cm.).

Abbiamo potuto ottenere un vuoto così spinto in un recipiente interamente metallico rendendo la canalizzazione quanto più corta e quanto più larga possibile, in modo da ridurre del minimo la velocità della pompa. Per la eliminazione dei vapori di mercurio si è dimostrata sufficiente una refrigerazione ad anidride carbonica solida e acetone.

L'azione perturbatrice della corrente di riscaldamento, sia per quel che riguarda la caduta di potenziale lungo il filamento, sia per quel che riguarda il campo magnetico da essa prodotto, è stata eliminata mediante un commutatore elettromagnetico, che interrompe periodicamente il circuito di accensione e stabilisce il potenziale acceleratore solo quando attraverso il filamento non passa la corrente.

Si è anche provveduto a compensare opportunamente il campo magnetico terrestre.

Nelle nostre esperienze abbiamo usato sempre lastre Cappelli ultrasensibili. Per la sensibilizzazione abbiamo adoperato un olio minerale assai denso, che presenta, alla luce ordinaria, un'intensa fluorescenza verde.

Nella tavola sono riprodotte alcune delle fotografie ottenute con elettroni di velocità inferiore a 25 volta. I dati ad esse relativi sono riuniti nella seguente tabella:

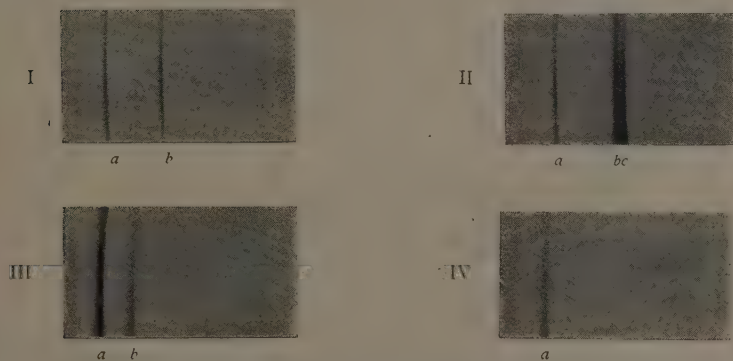
(1) Loc. cit.

(2) Cfr. COLE, loc. cit.

(3) Almeno per quei gas, nei quali non si manifesta l'effetto Ramsauer.

		V volta	i 10^{-6} amp.	t secondi
I	a	25	3	30
	b	23,5	3	35
II	a	23,5	3	30
	b	20	3	40
	c	19	3	60
III	a	19	2,5	20
	b	17,5	3	30
IV	a	17,5	4	75

V: velocità degli elettroni (in volta);
i: corrente totale di emissione del filamento;
t: tempo di posa.

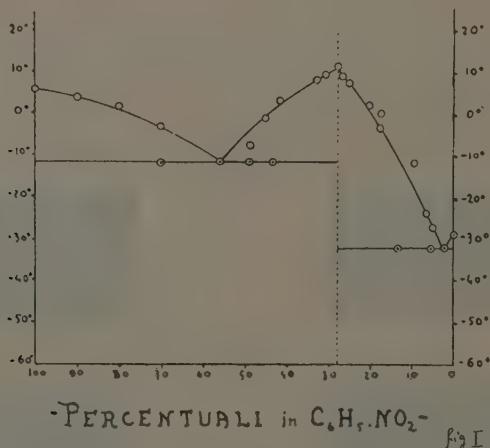


Si vede chiaramente come la sensibilità delle lastre sia ancora notevole per gli elettroni di 17,5 volta. Essa però cade bruscamente al di sotto di questo potenziale perchè già con elettroni di 16 volta non abbiamo potuto ottenere, anche prolungando il tempo di posa, che un'impressione appena percettibile.

Non riteniamo tuttavia improbabile che il limite presentemente raggiunto possa essere ancora abbassato, modificando opportunamente il processo di sensibilizzazione; perchè l'energia posseduta da un elettrone di 16 volta supera di molto quella necessaria per impressionare un granulo di bromuro d'argento. All'esame di questa possibilità sono appunto dedicate ulteriori ricerche, ora in corso.

Chimica. — *Isoterme di viscosità di miscele binarie.* - III. Sistema nitrobenzolo — cloruro stannico⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Da una miscela equimolecolare di nitrobenzolo e cloruro stannico cristallizza un composto di formula $C_6H_5NO_2 \cdot SnCl_4$ ⁽³⁾. Questo prodotto è interessante perchè rappresenta una delle ormai numerose conferme sperimentali all'idea che il legame tra le molecole nei complessi formati da



alcuni derivati organici con sostanze inorganiche si stabilisca attraverso il gruppo sostituyente. È noto infatti che il benzolo non si addiziona al cloruro stannico, ed in genere, a tutta una serie di sostanze che invece formano con i suoi derivati composti di addizione ben definiti.

Ho eseguito l'analisi termica del sistema $SnCl_4 - C_6H_5NO_2$ ed il diagramma qui sotto riportato mostra la formazione del solo composto sopra ricordato con punto di fusione a -11° ca.

Ho voluto verificare, anche in questo caso, in che rapporto si trovi la viscosità delle miscele con i risultati dell'analisi termica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1929.

(3) REIHLEN e HAKE, « Ann. », 452, 47, 1927.

Per il metodo sperimentale rimando alla descrizione riportata in una Nota precedente (1).

Tanto il nitrobenzolo come il cloruro stannico vennero preparati in laboratorio ed accuratamente purificati.

Nella tabella e nel diagramma riporto i risultati delle esperienze a 15° e a 25° C.

$C_6H_5NO_2$ %	d 15°	25°		15°	
		trovato	calcolato	trovato	calcolato
—	2.2398	0.01101	—	0.01193	—
5	2.1548	0.01146	0.01161	0.01285	0.01273
15	2.0129	0.01332	0.01269	0.01597	0.01419
30	1.8146	0.01687	0.01405	0.02065	0.01605
40	1.6979	0.01827	0.01482	0.02283	0.01712
50	1.5946	0.01948	0.01550	0.02427	0.01807
70	1.4142	0.01986	0.01665	0.02432	0.01869
90	1.2685	0.01933	0.01759	0.02342	0.02102
100	1.2046	0.01799	—	0.02159	—

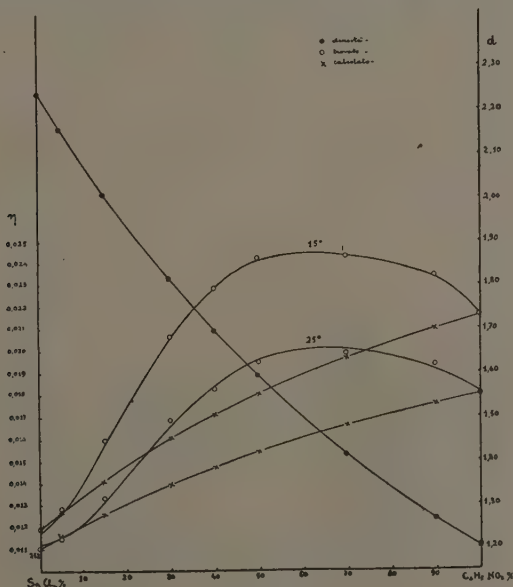


Fig. 2.

(1) « Gazz. Chim. It. », 59, (1929).

L'isoterma di densità a 15° rivela un sensibile aumento di volume che denota una azione dissociante, da attribuirsi con ogni probabilità al nitrobenzolo.

Le due isoterme di viscosità presentano un massimo molto netto e questo fatto conferma qualitativamente il fenomeno osservato con l'analisi termica. E cioè: nelle soluzioni di nitrobenzolo in cloruro di stagno si forma un composto di addizione il quale possiede una viscosità superiore a quella dei due componenti puri.

Dal punto di vista quantitativo invece la cosa cambia aspetto. Nella tabella e nel diagramma seguenti sono riportati gli scarti percentuali tra i valori sperimentali e quelli calcolati, e dall'esame di essi si rileva che lo scarto maggiore si verifica nelle soluzioni che contengono circa 50 % di nitrobenzolo. Il composto in questione ne contiene invece 31.18 %.

$C_6H_5NO_2$ %	Differenza %	
	25°	15°
15	5.00	12.54
30	20.00	28.97
40	23.28	33.35
50	25.70	34.17
70	19.30	23.54
90	9.90	11.55

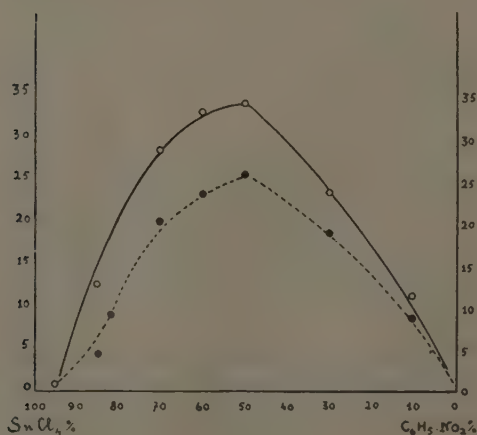


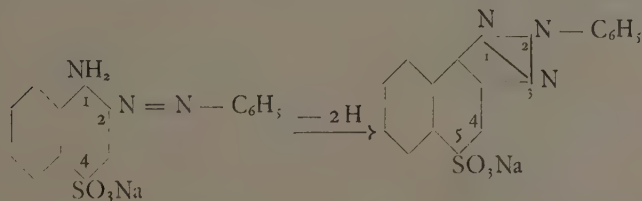
Fig. 3.

Anomalie di questo genere sono abbastanza comuni, e anche Tammann le ricorda in un suo recente lavoro ⁽¹⁾.

L'esperienza ha mostrato che in questi casi il massimo di viscosità si sposta verso il componente più viscoso, e che tale fenomeno si manifesta in liquidi nei quali il complesso formatosi è molto dissociato. Tuttociò si ricollega a quanto è stato osservato nelle soluzioni di nitrobenzolo in cloruro di stagno; c'è solo da rilevare una particolarità, e cioè che la massima divergenza tra il teorico ed il trovato si manifesta in soluzioni la cui composizione è molto vicina a $2\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2 \cdot \text{SnCl}_4$ (48.58 % di nitrobenzolo). Questo lascerebbe pensare alla possibilità che nelle soluzioni prevalgono effettivamente molecole di tale composizione: esse però dovrebbero essere stabili solo allo stato liquido, giacchè nel solidificare si decomporrebbero in nitrobenzolo e nel composto $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2 \cdot \text{SnCl}_4$ stabile allo stato solido.

Chimica. — *Condensazione dell'acido 1-amino-2-fenilazo-4-naftalinsolfonico* ⁽²⁾. Nota ⁽³⁾ di G. CHARRIER, presentata dal Corrisp. G. ERRERA.

Deidrogenando in soluzione nitrobenzolica il sale sodico dell'acido 1-amino-2-fenilazo-4-naftalinsolfonico (fenilazoderivato del naftionato sodico) con soluzione di bicromato sodico in acido acetico glaciale, si ottiene il sale sodico dell'acido 2-N-fenil-1, 2-nafto-1, 2, 3-triazol-5-solfonico ⁽⁴⁾ secondo lo schema



Se invece del sale sodico si sottopone a deidrogenazione l'acido libero 1-amino-2-fenilazo-4-naftalinsolfonico, avendo l'avvertenza di impiegare come ossidante l'anidride cromica in luogo del bicromato sodico (escludendo cioè dal miscuglio della reazione i sodioni), avviene condensazione tra due molecole del derivato naftalinico e invece del fenilnaftotriazol-solfonato so-

(1) « Zeitschr. Anorg. Chem. », 172, 243, 1928.

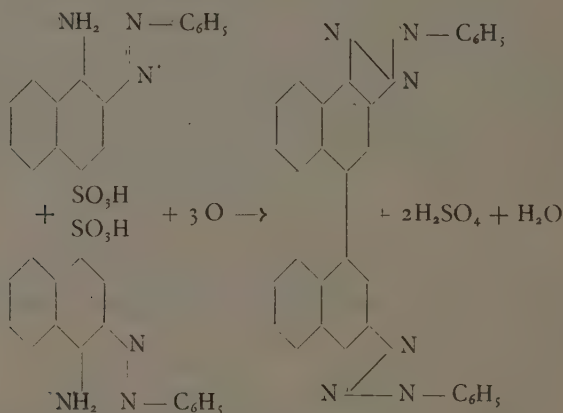
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università di Siena.

(3) Pervenuta all'accademia il 21 giugno 1929.

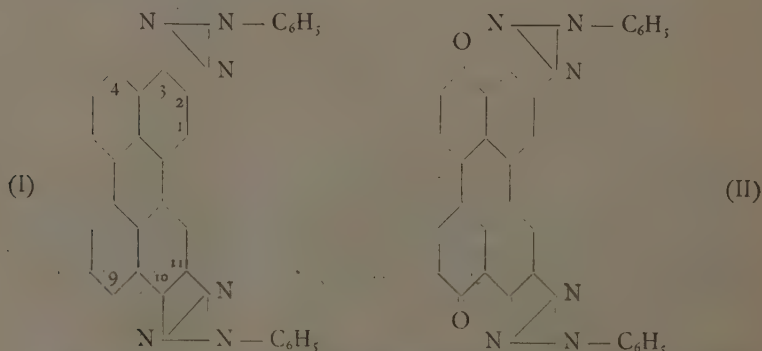
(4) NERI A., « Gazz. Chim. Ital. », 59, 1929.

dico facilmente solubile in acqua, si ottiene un composto insolubile in acqua e negli alcali acquosi e nella maggior parte dei solventi organici, tranne in quelli ad elevato punto di ebollizione come l'anilina, il nitrobenzolo e la chinolina.

Ad un primo esame della reazione si era creduto che questa potesse avvenire secondo gli schemi

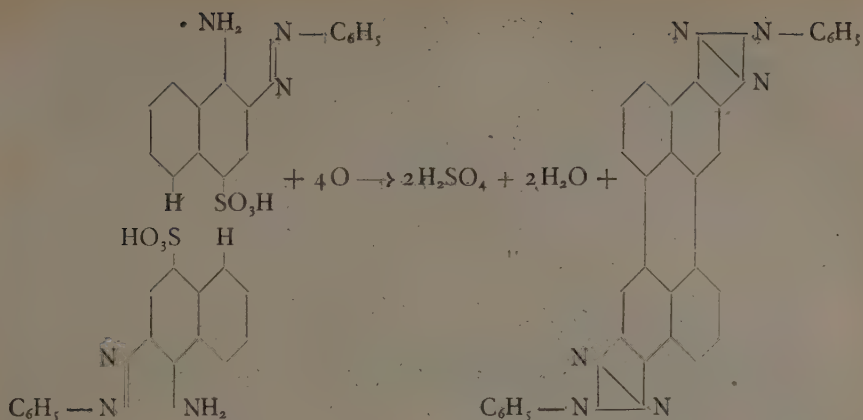


con formazione di un derivato di-2-N-feniltriazo-1, 1'-dinàftilico, il quale trovandosi in mezzo ossidante energico avrebbe potuto a sua volta trasformarsi in derivato di-2-N-feniltriazo-perilenico (I) e forse anche in parte nel corrispondente chinone (II)



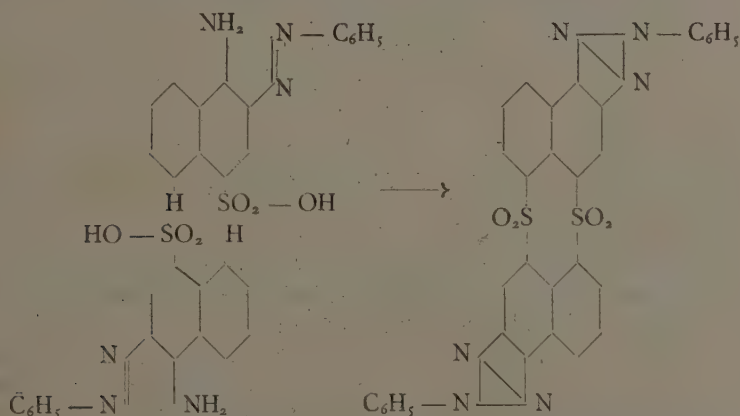
Di-2N-feniltriazo-2,3,10,11-perilene Di-2N-feniltriazo-2,3,10,11-perilen-4,9-chinone

La condensazione avrebbe anche potuto effettuarsi secondo lo schema seguente portando ad un derivato di-2-N-feniltriazo-perilenico asimmetrico



Tali interpretazioni dovettero venire però subito abbandonate, poichè l'analisi elementare della sostanza dimostrò che questa conteneva zolfo.

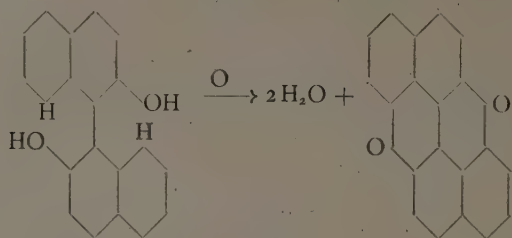
Dato l'elevato punto di fusione della sostanza e la sua insolubilità negli alcali acquosi e tenendo conto della sua percentuale in zolfo ed azoto si pensò ad un disolfone che poteva essersi prodotto secondo l'equazione



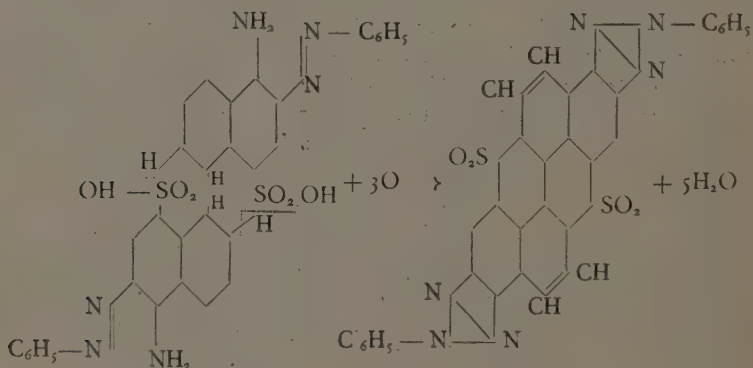
Questa formola corrisponde all'analisi elementare del composto, ma non spiega alcune sue proprietà e precipuamente quella di reagire in sospensione nell'acido acetico glaciale e anidride acetica con soluzione acetica di anidride cromica per formare un dichinone (come in modo affatto preliminare pare si sia accertato), perchè questo disolfone ciclico non contiene ponti etilenici del tipo del ponte fenantrenico che, come ho dimostrato⁽¹⁾, sono indispensabili per dare con facilità ortoquinoni in questa ossidazione.

(1) CHARRIER G. e MOGGI A., « Gazz. Chim. Ital. », 57, 736, 1927.

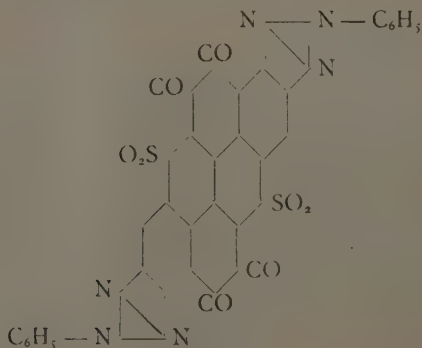
Perciò, basandomi anche sulla condensazione del 1,1'-dinaftolo in diossido di naftilene



ho considerato che la condensazione dell'acido 1-amino-2-fenilazo-4-naftalinsolfonico potesse avvenire nel modo seguente



Questo composto per la presenza di due ponti etilenici potrebbe fornire un dichinone. Se con tutta probabilità dal prodotto di condensazione si riuscirà a caratterizzare il dichinone corrispondente



la formola del nuovo composto, analoga a quella del diossido di naftilene, sarà indubbiamente la più verosimile.

Il prodotto di condensazione dell'acido 1-amino-2-fenilazo-4-naftalin-solfonico, ricristallizzato ripetutamente dalla chinolina e poi dal nitrobenzolo, è una bellissima sostanza di color giallo chiaro, costituita da grandi cristalli prismatici, che si fondono sopra 300°.

La parte sperimentale verrà pubblicata nella « Gazzetta Chimica Italiana ».

Riassunto. — Deidrogenando l'acido 1-amino-2-fenilazo-4-naftalin-solfonico sospeso in nitrobenzolo con soluzione acetica di anidride cromica, si ha un prodotto di condensazione contenente zolfo, che presenta i caratteri di un derivato ditriazolico policondensato, al quale in via affatto preliminare si attribuisce una costituzione analoga a quella del diossido di naftilene, dal quale può venire teoricamente derivato sostituendo in questo composto i due atomi di ossigeno con due gruppi SO_2 e attaccando i due nuclei triazolici 2-N-fenilati in posizione 1 e 3 del nucleo triazolico, rispettivamente 1 e 2 dei due naftili.

Chimica. — *Derivati organo-aromatici del boro* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾
di E. PACE, presentata dal Socio R. NASINI.

La conoscenza dei composti organici del Boro risalgono al 1862 quando Frankland ⁽³⁾ poté ottenere il boro metile ed il boro etile. In tempi recenti lo studio dei boro alchili fu ripreso per opera specialmente del Krause ⁽⁴⁾ e dei suoi allievi e portò alla conoscenza del boro tripropile norm., triisobutile e triisoamile con i derivati acidi corrispondenti.

Michaelis ⁽⁵⁾ ed i suoi collaboratori (1880-1894) riuscirono ad ottenere diversi acidi arilborici con i corrispondenti derivati alogenici, così pure l'ossido di boro fenile; infruttuosi invece rimasero i tentativi per preparare il boro trifenile ⁽⁶⁾ e fu solo in tempi a noi recenti che il Krause ⁽⁷⁾ riprese lo studio riuscì ad ottenere questo composto.

Il boro quindi non solo può legarsi con aggruppamenti della serie grassa, ma può entrare in combinazione anche con radicali della serie aromatica.

(1) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1929.

(3) « Ann. », 124, 129 (1862) — « Jahresber. » (1876), 469.

(4) « Ber. », 54, 2784 (1921). 55, 1261 (1922).

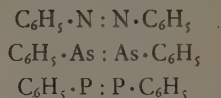
(5) « Ber. », 13, 59 (1880). 15, 180 (1882). 27, 245 (1894).

(6) « Ber. », 22, 241 (1889). 27, 245 (1894).

(7) Loc. cit.

Questi composti organo-aromatici del boro hanno una stretta analogia di struttura con i corrispondenti composti dell'azoto, dell'arsenico e del fosforo.

L'azoto, l'arsenico ed il fosforo danno infatti, come è noto, combinazioni del tipo:



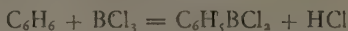
È possibile quindi che il boro, che si comporta in combinazione organica come l'azoto, l'arsenico ed il fosforo possa dare il composto $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{B} : \text{B} \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. Così mi è sembrata possibile la preparazione del Boro-Benzolo, composto fino ad oggi rimasto sconosciuto, e nella presente Nota descrivo il metodo di preparazione.

PARTE SPERIMENTALE.

Cloruro di Boro-Fenile: $\text{C}_6\text{H}_5\text{BCl}_2$.

Si mescolano in un pallone della capacità di circa mezzo litro gr. 40 di benzolo perfettamente anidro con gr. 50 di tricloruro di boro e si riscalda il pallone in bagno d'aria, facendo passare i vapori che si svolgono in un tubo di vetro lungo circa un metro contenente dell'amianto platinato o meglio del nero di palladio e tenuto ad una temperatura da 500° a 600° . I vapori vengono poi fatti condensare in un luogo refrigerante, continuamente raffreddato con circolazione rapida d'acqua, adattato con chiusura a smeriglio al tubo da combustione.

Si condensano in tal modo due liquidi di diverso peso specifico; il più pesante costituito dal prodotto della reazione, mentre il più leggero non è altro che benzolo inalterato:



Separato dal benzolo e distillato a pressione ridotta può essere ottenuto allo stato di purezza. Rendimento 70 %.

Liquido incolore fumante all'aria; si colora di giallo intenso alla luce, bolle a pressione ordinaria a 178° alterandosi parzialmente, fonde a $+7^\circ$.

È facilmente solubile in cloroformio, solfuro di carbonio ed in benzolo bollente.

Questo composto è identico a quello ottenuto da Michaelis⁽¹⁾ per azione del cloruro di boro sul mercurio di fenile a 180° in tubo chiuso.

(1) « Ber. », 13, 58 (1880).

La determinazione del peso molecolare per ebullioscopia (solvente cloroformio) e le determinazioni del boro e del cloro hanno dato rispettivamente:

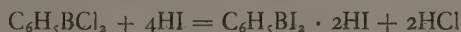
peso molecolare trovato = 157.8

	Trovato	%	B 6.58	Cl 44.5
per $C_6H_5BCl_2 = 159$	Calcolato	%	B 6.9	Cl 44.6

Le determinazioni del Boro sono state eseguite trasformando il composto in esame in borato di metile, questo in borato di calcio, ed infine pesando l'anidride borica.

Fenil-Borina o Boroamilina: $C_6H_5BH_2$.

Trattando gr. 15 di cloruro di boro fenile con acido iodidrico gassoso e secco in presenza di gr. 1.5 di iodio metallico si ha forte sviluppo di acido cloridrico, mentre il liquido si riscalda inbrunendo, lasciando separare una sostanza cristallina. Continuando l'azione della corrente di acido iodidrico tutto il liquido si rapprende in una massa scura che non assorbe più acido iodidrico. Il composto che ne risulta non contiene più cloro e rappresenta l'iodidrato dell'ioduro di boro fenile secondo la reazione seguente con rendimento pressochè quantitativo:

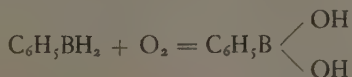


Si ottiene la fenil-borina facendo gocciolare da un imbuto a rubinetto gr. 10 di alcool assoluto in un pallone da distillazione contenente gr. 25 di iodidrato di ioduro di boro fenile raffreddando continuamente. Dopo due ore di riposo si fraziona in corrente di idrogeno: distilla dapprima ioduro di etile ed alcool mescolati ad acido iodidrico, quindi il termometro sale rapidamente a circa 200° lasciando distillare un liquido opalescente:

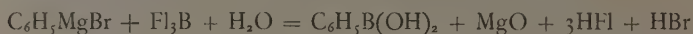


Questo liquido lasciato in riposo separa due strati: un piccolo strato di peso specifico più basso costituito principalmente da benzolo, ed uno strato più pesante costituito da un liquido incolore mobilissimo molto rifrangente che rettificato in corrente di idrogeno bolle a 193° e rappresenta la fenil-borina. Rendimento 60 %.

È solubile in etere, cloroformio solfuro di carbonio ed acido acetico. Si ossida facilmente all'aria in acido monofenil-borico:



polvere bianca che cristallizza dall'acqua bollente in aghetti riuniti a gruppi fusibili a 204°. Quest'acido è identico a quello ottenuto da Michaelis e Beker⁽¹⁾ per azione del cloruro di borofenile sull'acqua; e da Krause⁽²⁾ per azione del trifluoruro di boro sul bromuro di fenilmagnesio:..



La determinazione del peso molecolare, l'analisi elementare e la determinazione quantitativa del boro hanno dato rispettivamente i seguenti risultati:

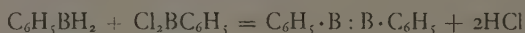
peso molecolare trovato = 89.1

	Trovato	%	C	80.1	H	7.6	B	11.9
per $\text{C}_6\text{H}_5\text{BH}_2 = 90$	Calcolato	%	C	80	H	7.8	B	12.2

Boro-Benzolo: $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{B} : \text{B} \cdot \text{C}_6\text{H}_5 \dots$

In un matraccio della capacità di 100 cm³ collegato ad un refrigerante a ricadere si introducono gr. 10 di fenil-borina e dopo aver fatto passare una corrente di idrogeno secco si aggiungono lentamente gr. 18 di cloruro di boro fenile continuando a far passare ininterrottamente idrogeno. Il buon andamento della reazione dipende dall'assoluta mancanza di ossigeno.

La reazione è molto vivace con forte sviluppo di calore è bene perciò mantenere il matraccio in un bagno refrigerante; si forma subito una densa massa giallastra che solidifica lentamente e densi fumi di acido cloridrico:



Terminata l'aggiunta del cloruro di boro fenile si lascia a sè per una o due ore mantenendo sempre la corrente di idrogeno e si riprende quindi la massa solidificata con etere bollente assolutamente esente da alcool, fino ad averne una soluzione.

Si evapora l'etere a bagnomaria in corrente di idrogeno e si ha in tal modo un residuo giallastro costituito da boro-benzolo.

Polvere gialla solubile a caldo in etere e cloroformio. Fonde a 155° alterandosi. È instabile all'aria formando una massa di consistenza pastosa poco definibile costituita probabilmente da boro-ossi-benzolo (?).

La determinazione della grandezza molecolare e l'analisi quantitativa del boro hanno dato:

	Trovato	%	C	81.2	H	5.3	B	11.8
per $\text{C}_{12}\text{H}_{10}\text{B}_2 = 176$	Calcolato	%	C	81.8	H	5.6	B	12.4

(1) «Ber.», 15, 180 (1882).

(2) «Ber.», 55, 1261 (1922).

Chimica fisiologica vegetale. — *Intorno all'attività riduttrice delle radici delle graminacee; la riduzione del nitrato di calcio per le radici delle graminacee*⁽¹⁾. Nota III⁽²⁾ di G. SANI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

Nelle Note precedenti che io ebbi l'onore di presentare a codesta illustre Accademia, su questo stesso argomento, ho dimostrato come contrariamente alla opinione del Gautier⁽³⁾, del Leuw⁽⁴⁾, del Meyer e dello Schultze⁽⁵⁾, del Bach⁽⁶⁾, del Berthelot e dell'André⁽⁷⁾, del Goldewski⁽⁸⁾ e dello Schimper⁽⁹⁾ che ritengono che la riduzione dei nitrati assunti per parte delle piante dal terreno si verifichi nelle foglie per diverse cause, dando secondo loro, luogo alla formazione di prodotti differenti, essa avviene invece nelle radici delle piante ove si generano una o più sostanze organiche azotate che accumulandosi riescono tossiche per l'agente stesso della riduzione (tanto da sospenderne l'attività) che, dicevo allora, è forse parte vivente del protoplasma contenuto nelle cellule che formano i tessuti radicali.

In via secondaria poi ho esposto allora alcuni fatti che col principale avevano la più stretta attinenza e che mi ero riservato di studiare più da vicino.

Azione degli alcali.

Nel riprendere ora, con la riconquistata salute, queste ricerche ho creduto che prima di ogni altra cosa fosse necessario di vedere se aveva conferma ciò che in modo particolare aveva fissato la mia attenzione, cioè l'influenza degli alcali sul fenomeno importante, nel senso di arrestare il potere riduttore delle radici delle graminacee, con la loro presenza.

A tale scopo ho preso radici di piante di mais, le ho soppestate come di consueto in fine poltiglia e le ho poste a contatto con soluzione di nitrato di calcio all'uno per mille nella quale avevo previamente disciolti

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore di Perugia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1929.

(3) A. GAUTIER, *Cours de Chimie*, to. III: *Chimie Biologique*, Paris, pp. 61-68.

(4) « Pflüger's Arch. f. ges. Physiologie », to. 22, p. 675; « Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. », 1881; *ibid.*, 1890, p. 675; « Chemiker-Zeitung », 1895, p. 143.

(5) « Berichte d. Deutsch. Chem. Ges. », 1884, p. 1564.

(6) Ginevra, 1896.

(7) « Comptes Rendus », 1884, to. 93, p. 591.

(8) « Anzeiger der Akad. der Wissensch. in Krakau », mars 1817, pp. 104-121.

(9) « Botan. Zeitschr. », 1888.

tre grammi di potassa caustica per litro; uguale porzione di poltiglia l'ho trattata con uguale volume di soluzione acquosa di nitrato di calcio all'uno per mille e dopo tre giorni ho determinato l'azoto nitrico in 50 cm³ delle due soluzioni filtrate e nella soluzione di nitrato senza radici per confronto, ed ottenni questi risultati:

Radici più soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰	Soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰	Radici più soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰, più 3 gr. ‰ di KOH
V = 6.3	V = 10.3	V = 10.21
t = 23°	t = 23°	t = 23°
p = 727	p = 727	p = 727

come si vede l'alcali impedisce in modo assoluto la riduzione del nitrato di calcio, agendo come tossico sulla sostanza che ha la proprietà di ridurre i nitrati nelle radici delle piante graminacee.

Azione degli acidi organici.

Constatato questo fatto volli vedere quale azione potesse esercitare sul fenomeno della riduzione la presenza di quantità di acidi organici superiore a quella normalmente contenuta nelle radici delle piante in esame ed a tale scopo alla soluzione del nitrato di calcio all'1 ‰ aggiunsi grammi due di acido citrico per litro; con questa soluzione trattai radici di mais rese in poltiglia nel modo solito e parallelamente radici di mais con la semplice soluzione del nitrato all'1 ‰ ed ottenni i seguenti risultati, naturalmente anche qui per confronto mi valse sempre della soluzione di nitrato di calcio all'1 ‰ come tale, in ogni caso le determinazioni vennero eseguite su 50 cmc. delle soluzioni in esperimento:

Soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰	Soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰ più radici di mais	Soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰, più 2 ‰ di acido citrico e radici di mais in poltiglia
V = 10.3	V = 6.3	V = 4.3
t = 23°	t = 19	t = 18°,5
p = 721	p = 721	p = 721

Risulta evidente che la presenza di acido citrico nella quantità di due per mille favorisce l'attività riduttrice delle radici delle graminacee in larga misura, infatti dal 38 ‰, grandezza della riduzione del nitrato in presenza della radici come tali, si passa ad una riduzione del 57 ‰ del nitrato pre-

sente con l'aggiunta di una lieve quantità di acido citrico, porzioni più grandi di questa sostanza non hanno dimostrato nessuna efficacia. Un acido organico quindi è favorevole: lo è del pari un acido inorganico?

Azione degli acidi inorganici.

Per rispondere a questa questione mi volli valere di un acido che fisiologicamente è notorio non reca alcun danno negli ambienti in cui si trova o si genera in quantità discrete, feci ricorso all'acido solforoso; ecco i risultati, ponendomi, si intende, sempre nelle stesse condizioni precedentemente indicate:

Radici di mais con soluzione nitrato di Ca all'1‰	Radici di mais con soluzione di nitrato di Ca all'1‰, più acido solforoso
V = 6.3	V = 6
t = 18	t = 24°
p = 716	p = 727

come si vede l'attività riduttrice delle radici delle graminacee non viene sensibilmente modificata dalla presenza di questo acido.

Reazione del medio al termine della riduzione del nitrato di calcio.

Frattanto ho potuto vedere seguendo l'andamento delle cose nella riduzione del nitrato di calcio per attività delle radici come tali, che al termine spontaneo di tale fenomeno la reazione del medio è completamente mutata e cioè mentre all'impianto della esperienza il liquido è perfettamente acido, al termine, cioè quando l'azione riduttrice si arresta, la reazione è perfettamente alcalina; in altri termini il prodotto o uno dei prodotti della riduzione ha reazione alcalina, ed è questo fatto che probabilmente arresta l'attività riduttrice delle radici delle graminacee in vitro, mentre in natura la presenza di questa sostanza alcalina è del tutto effimera.

Azione del calore (29 maggio 1929).

Ho determinato l'acido nitrico in 50 cmc. della soluzione di nitrato di calcio dell'1‰ ed in 50 cmc. di soluzione di nitrato di calcio all'1‰ tenuta a contatto per tre giorni con radici di mais mantenute per lungo tempo alla temperatura di 120° ed ottenni questi risultati:

Soluzione di nitrato di Ca. all'1 ‰	Soluzione di nitrato di calcio all'1 ‰ più radici di mais scaldate a 120° per tre ore, poi raffreddate e riscaldate di nuovo per tre ore e raffreddate.
--	--

$$V = 9.4$$

$$t = 24^{\circ}$$

$$p = 726$$

$$V = 9.51$$

$$t = 24^{\circ}$$

$$p = 726$$

Come si vede il calore distrugge la sostanza attiva della riduzione del nitrato di calcio.

Azione del tempo.

Radici di mais essicate lentamente all'ombra e conservate in ambiente sano e asciutto per tre anni, vennero messe a contatto della soluzione di nitrato di calcio all'1 ‰ per tre giorni; dopo dei quali si determinò acido nitrico su 50 cmc. ecco i risultati:

Soluzione di nitrato di Ca
all'1 ‰

$$V = 10.3$$

$$t = 23^{\circ}$$

$$p = 727$$

Soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰
più radici conservate per tre anni

$$V = 9.58$$

$$t = 24^{\circ}$$

$$p = 727$$

risulta chiaro che la sostanza riducente con l'essiccamento e la prolungata conservazione è morta, perdendo con la vita ogni sua attività riducente.

Azione del cloroformio.

Radici di mais trattate con cloroformio e mantenute per tre giorni in presenza di soluzione di nitrato di calcio all'1 ‰ hanno dato i seguenti risultati — alla determinazione dell'acido nitrico in 50 cmc. del liquido — confrontate con la soluzione di nitrato di calcio all'1 ‰ come tale:

Soluzione di nitrato di Ca
all'1 ‰

$$V = 10.3$$

$$t = 23^{\circ}$$

$$p = 727$$

Radici più cloroformio
e soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰

$$V = 10.8$$

$$t = 23^{\circ}$$

$$p = 727$$

Il cloroformio impedisce completamente l'attività riduttrice delle radici delle graminacee. Ciò che si è ripetuto in altre prove che ho avuto occasione di fare.

Azione dell'aldeide formica.

Volli vedere se l'aldeide formica esercitava qualche azione nel processo di riduzione del nitrato di calcio per opera delle radici graminacee ed a tale scopo radici di mais soppestate in fine poltiglia vennero addizionate con tracce di aldeide formica e con la soluzione all'1 ‰ di nitrato di calcio - chiuso il pallone venne lasciato a se per qualche giorno - poi come in ogni altro esperimento si dosò acido nitrico in 50 cmc. della soluzione tipo di nitrato di calcio all'1 ‰ ed in 50 cmc. della soluzione di nitrato di calcio più aldeide formica mantenuta in presenza delle radici e si ebbero i seguenti risultati:

Soluzione di nitrato di Ca all'1 ‰	Radici con nitrato di Ca e aldeide formica
V = 10.48	V = 10.32
t = 24°	t = 22°
p = 727	p = 723

Da ciò risulta palese che l'aldeide formica impedisce assolutamente la riduzione del nitrato di calcio per parte delle radici delle graminacee e si comporta come un energico veleno sulla sostanza riducente che esse contengono e ciò avvalora, se ce ne fosse bisogno, la mia dimostrazione che non nelle foglie, non per opera dell'aldeide formica ha luogo la riduzione dei nitrati nelle piante, ma sibbene nelle radici per opera di una sostanza vivente che l'essiccamento, il tempo, il calore, il cloroformio, l'aldeide formica uccidono o paralizzano nella sua attività, mentre in condizioni normali tale azione è favorita da lieve quantità di un acido organico, l'acido citrico.

Inoltre un nuovo fatto è emerso dalle presenti ricerche e cioè che fra le prime sostanze organiche azotate che in tale processo si generano ve ne è una, che ha reazione alcalina, e gode della facoltà, quando si accumula, di arrestare il processo di riduzione.

Ho fede di poter completare in breve queste ricerche per le quali non ebbi finora materiale sufficiente⁽¹⁾, mentre in avvenire, potendo disporre di un po' di terreno, avrò il materiale occorrente.

(1) Mi sono valso fin qui delle piantine di mais che il mio 'Collega d'agricoltura buttava nel diradamento.

Geologia. — *Su alcuni fenomeni di ricoprimento nell'Appennino Emiliano.* Nota ⁽¹⁾ di M. ANELLI, presentata dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

Nelle colline di Reggio Emilia e di Modena affiora su vasta area un potente complesso di marne scagliose e di molasse che dai vari Autori è stato riferito al miocene, mentre in realtà la sua pertinenza all'oligocene deve considerarsi come indubbia. Io ero già stato indotto a sospettarne l'età oligocenica da osservazioni relative alla sua posizione stratigrafica ed alle sue condizioni tettoniche e questa supposizione divenne certezza il giorno in cui potei rinvenire in svariate località, lontane tra loro, nummuliti decisamente oligoceniche, appartenenti quasi esclusivamente a *Nummulites Fichteli* Mich. Il complesso è costituito prevalentemente di marne alla base, di molasse con lenti conglomeratiche alla sommità, ma le variazioni locali di *facies* sono tutt'altro che rare.

Si inizia questo insieme in Val d'Enza nel vallone sottostante alla storica rupe di Canossa; ricompare un paio di chilometri ad oriente nella valle del T. Campola, donde prosegue, sotto forma di una striscia larga 3-4 chilometri parallela al margine dell'Appennino, sin alla valle del Secchia, subendo una breve interruzione nella valle del Crostolo dovuta ad un energetico sollevamento dei terreni eocenici; al di là del Secchia ricompare in Valle Urbana in lembi sottoposti in discordanza al miocene oppure inglobati nelle argille scagliose.

Nel territorio compreso tra il Campola ed il Crostolo l'oligocene è giustapposto al miocene evidentemente per un contatto anormale spesso contrassegnato da argille scagliose che si sono intruse lungo il piano di dislocazione; i rapporti tettonici delle due formazioni e la relativa interpretazione è stata da me data altra volta ⁽²⁾. Così pure altra volta ho descritto due curiosi ricoprimenti che si presentano a La Collina, e a Fondiano sotto forma di due calotte di argille scagliose poggianti sulla formazione oligocenica. A La Collina, altura che sorge sulla destra del T. Campola, le argille scagliose costituenti la vetta poggiano sulle marne e può apparire dubbio se siano state portate in tale posizione per effetto di una piega rovesciata, oppure per effetto di uno slittamento. Tenendo conto anzi del fatto che ad occidente di La Collina le argille scagliose costituenti il contrafforte

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1929.

(2) *Sulla presenza dell'oligocene nel Subappennino Reggiano.* « Boll. Soc. Geolog. Ital. », vol. XLII, 1923, p. 182; *Sul comportamento tettonico delle argille scagliose, ecc.* « Rend. R. Acc. Naz. Lincei. Classe Sc. fis. mat. nat. », XXXII, s. 5^a, II sem., p. 416.

tra il Campola e l'Enza e sorreggenti lembi miocenici, tra cui la rupe di Canossa, ricoprono ampiamente, in corrispondenza di ambedue i versanti, l'oligocene, i cui strati immergentisi sotto di esse danno l'apparenza di costituire una larga sinclinale su cui le argille riposano, può avanzarsi la supposizione che detto contrafforte corrisponda ad una linea di rottura lungo cui si sarebbero intruse le plastiche argille scagliose, che con vasto trabocco sarebbero così venute ad adagiarsi sull'oligocene. Il trabocco o, comunque sia, il ricoprimento sarebbe avvenuto anteriormente al depositarsi dei sedimenti miocenici.

L'altro ricoprimento, che già descrissi, si osserva a Fondiano, 15 chilometri ad oriente di La Collina, non lungi dalla nota salsa di Regnano. L'oligocene, che tra il Campola ed il Crostolo appare talora energicamente piegato, ad oriente del Crostolo costituisce invece una regolarissima sinclinale, che, diretta da OSO a ENE, si prolunga sino al Secchia nelle alture di Montebabbio e di Castellarano; a Fondiano, come del resto in tutto il territorio compreso tra il Crostolo ed il Tresinaro, il limite meridionale della sinclinale vien quasi a contatto coi calcari marnosi dell'eocene superiore di M. Duro, M. del Pilastro, i cui strati spiegazzati costituiscono una stretta e ripiegata sinclinale, pure diretta ONO-ESE, impigliata nelle argille scagliose, le quali affiorano sotto forma di una ristrettissima striscia rossigna interposta tra le due sinclinali. A Fondiano, dove è da escludersi in modo assoluto qualsiasi rovesciamento dell'oligocene, le molasse di questa età sono ricoperte da una calotta di argille scagliose.

Tenendo conto di questi ricoprimenti tra loro lontani, avanzai la supposizione che si trattasse di un fenomeno avvenuto su vasta scala durante il diastrofismo orogenetico verificatosi tra l'oligocene e il miocene medio, cosicchè talora sedimenti miocenici dovettero depositarsi, per vasti tratti, su argille scagliose nella cui massa giacevano sepolti, o diciamo meglio inglobati, più o meno estesi lembi di terreni oligocenici.

Estendendo i miei rilevamenti nell'Appennino Emiliano ho potuto constatare come questi ricoprimenti di oligocene da parte delle argille scagliose sono tutt'altro che rari. Ne ricordo tra gli altri uno evidentissimo sulla sinistra del Secchia, qualche chilometro a monte di Castellarano, presso Roteglia. Come ho già detto, la grande placca oligocenica ora ricordata costituisce nelle alture di Montebabbio e di Castellarano una regolare sinclinale in cui si adagia trasgressivamente la formazione pliocenica di S. Valentino, che alla sua base presenta una fauna salmastra (messiniana) a *Melania curvicosta*, *Melanopsis Narzolina*, *Neritina Mutinensis*.

La sinclinale nel suo fianco meridionale è a contatto colle argille scagliose largamente affioranti; queste, a sud di Castellarano, sorreggono nelle immediate vicinanze del Secchia, qualche lembo miocenico (Madonna di Campiano, M. Pernice) evidentemente collegati coi più estesi affioramenti di M. Pigneto e di M. Baranzone che si presentano al di là del fiume. Sempre

sulla sinistra del Secchia, circa un chilometro a sud del limite meridionale della placca oligocenica, compare un altro più esteso lembo di miocene medio piegato in sinclinale e costituente la sommità del M. Stádola, dove esiste una successione perfettamente identica a quella che si osserva, una ventina di chilometri ad occidente, a Canossa. Anche qui il miocene medio poggia sulle argille scagliose, le quali ricoprono l'oligocene, sorretto a sua volta da argille scagliose. Le argille scagliose interposte presentano uno spessore apparente di una cinquantina di metri; altrettanto e forse maggiore è lo spessore apparente del sottoposto oligocene, il quale è costituito di marne friabili e di molasse con strati raddrizzati e pendenti per lo più a NE, talora addirittura verticali. Esso compare nelle alture sovrastanti a Roteglia in tutto il versante meridionale del M. Stádola sotto l'aspetto di un affioramento a semicerchio con diametro di circa due chilometri. Il contatto colle sovrastanti argille scagliose è deciso, nettissimo, come può osservarsi con tutta evidenza dalla carrozzabile, a causa del contrasto tra la tinta bianca delle marne oligoceniche e quella scura e rossigna delle argille scagliose.

E termino accennando ad un altro ricoprimento, posto in evidenza dalla perforazione eseguita per ricerche petrolifere dalla « Petroli d'Italia » a Montebonello (Modena).

A sud della sinclinale, diretta da ONO a ESE, di calcari dell'eocene superiore su cui sorge Monfestino in Serra Mazzoni, affiora largamente la formazione argillosa, in cui Fossa Mancini ha creduto di ravvisare una anticlinale separante la sinclinale ora detta da un'altra sinclinale, presso a poco ugualmente diretta, passante per Montebonello, C. Bertacchini, Fradelletto. È in questa supposta anticlinale, a breve distanza dal km. 40 della Via Giardini, che venne eseguita la perforazione. Questa per una novantina di metri attraversò la formazione argillosa (argille scagliose) ed è qui che venne incontrato un po' di petrolio; dopo di che penetrò in un complesso prevalentemente sabbioso in alto, marnoso in basso, in cui rimase sino a circa 500 m., dopo di che entrò di nuovo nelle argille scagliose: Le sabbie si mostrarono impregnate di una ricca falda di acque salsojodiche.

Incaricato dal Ministero dell'Economia Nazionale di eseguire un sopralluogo, ebbi senz'altro il sospetto, appena posto al corrente dei dati di perforazione, che il complesso sabbioso marnoso costituisce una massa oligocenica inglobata dalle argille scagliose; il rilevamento eseguito non fece altro che tradurre questo sospetto in certezza.

Infatti l'oligocene affiora, circa mezzo chilometro a sud del pozzo, nei pendii situati a mezzogiorno delle C. Bertacchini sotto forma di molasse pendenti verso settentrione ed evidentemente immergentisi sotto le argille scagliose. Lo stesso oligocene compare un chilometro ad oriente, a Fradelletto, sotto forma di un ristretto lembo di molasse, avvolto e ricoperto esso pure dalle argille scagliose. Si tratta evidentemente di lembi oligocenici rimasti inglobati, durante i movimenti orogenetici, nelle argille scagliose; il lembo

di C. Bertacchini e quello di Fradeletto sono assolutamente indipendenti, come con tutta probabilità è indipendente dal lembo di C. Bertacchini quello incontrato dalla perforazione.

Il miocene compare un poco a sud dell'affioramento oligocenico di C. Bertacchini e precisamente al Pianello e a Montebonello sotto forma di arenarie e di conglomerati arenacei in una sinclinale ristrettissima, a fianchi molto raddrizzati, anzi con fianco settentrionale per gran parte laminato.

Si tratta di un affioramento molto ristretto, a forma di ferro di cavallo volgente la concavità verso nord. Esso poggia sulle argille scagliose inglobanti i lembi oligocenici sopra accennati e rappresenta l'avanguardia, molto maltrattata, delle grandi placche mioceniche affioranti qualche chilometro più a sud nelle alture di Pavullo nel Frignano.

Genetica. — *Variazioni brusche nella forma fogliare di « Cannabis sativa L. ».* Nota ⁽¹⁾ di R. SAVELLI e N. SOSTER, presentata dal Socio B. LONGO.

La presente Nota si ricollega alle notizie già pubblicate da uno di noi ⁽²⁾ sopra una variazione brusca di tipo retrogrado, intervenuta nella Canapa, per cui la foglia della pianta adulta mostra d'aver perduto la normale forma palmatosetta a segmenti indipendenti (fig. 1) e presenta un lembo unico, soltanto lobato (fig. 2).



Non si tratta di un semplice concrescimento marginale delle lamine dei singoli segmenti della foglia normale, il che potrebbe dare un lembo unico a nervature tuttavia dipartentisi ancora da uno stesso punto, e perciò ancora di tipo palmato: il concrescimento è più profondo e implica uno spostamento dei punti di derivazione delle nervature laterali, le quali vanno

(1) Pervenuta all'accademia il 27 luglio 1929.

(2) SAVELLI R., *La Canapa monofilla e il suo luogo d'origine*. «L'Italia Agricola» 11. 9, settembre 1928, pp. 8 con 6 figg.

a confluire a varie altezze con quella mediana, risultandone una disposizione imperfettamente pinnata (fig. 3).

Il numero dei lobi delle foglie di piante anomale presenta una diminuzione rispetto al numero dei segmenti delle foglie di piante normali della stessa stirpe, e ciò conferma la profondità del concrescimento, spinta fino ad un completo riassorbimento di alcuni segmenti, con diminuzione del numero complessivo delle nervature. Peraltro il numero dei lobi mostra conservata la maggior frequenza delle varianti dispari (3, 5, 7, 9), ricordo della disposizione simmetrica dei segmenti laterali, a fianco di uno mediano impari, propria della foglia normale. Il numero dei lobi è più alto nelle piante più robuste e meglio nutrite, maggiore nelle foglie dell'asse principale (fig. 3) che in quelle dei rami laterali (fig. 2).

Le osservazioni personali di Savelli riguardavano alcune *mutanti* comparse nella razza Ferrarese, una volta a Cento, in un esemplare non riprodottosi, e un'altra volta a Medelana, in esemplari che furono punto di partenza di colture sperimentali da cui risultò l'ereditarietà del carattere in forma *mendelianamente recessiva* di fronte al carattere normale, che dunque impronta di sè i prodotti di incrocio tra la forma anomala e la normale, senza che in questi eterozigoti sia neanche palese una diminuzione nel numero dei segmenti. Ma oltre a queste osservazioni personali, nel citato articolo veniva anche illustrato per la prima volta l'ampio lavoro del dott. Lyster H. Dewey del Bureau of Plant Industry di Washington, il quale scopriva per primo, nel 1918, una mutazione del tutto simile, e pur facendone oggetto — a scopo pratico — di accurato lavoro di selezione, nulla pubblicava in proposito, limitandosi a distribuire semi e notizie private ad alcuni corrispondenti.

Le osservazioni fatte a Ferrara valgono appunto a chiarire il valore del reperto del Dewey, poichè quella Canapa *simple leaf* comparve in America per la prima volta nella F_2 di un ibrido tra le varietà *Ferrara* (importata dall'Italia) e *Kimington* (importato dalla Cina), ibrido designato, secondo l'uso, col nome di *Ferramington*. Questa derivazione da un ibrido poteva far sorgere dubbio sulla natura puramente *mutativa* della *simple leaf*, ma poichè un fatto del tutto simile — per la morfologia e l'ereditarietà — si ritrova in uno dei due genitori, cioè nella pura Canapa ferrarese, nella quale questa attitudine mutativa serpeggia (tanto da esservi stata registrata due volte, a distanza di luogo e di tempo), non solo resta confermata la natura *mutativa* del fenomeno, ma viene reso altamente probabile che anche la manifestazione avutasene in America sia imputabile al genitore italiano, indipendentemente dall'avvenuto incrocio con la razza cinese.

Le nostre ulteriori ricerche confermano le esposte conclusioni, ma complicano la questione delle variazioni brusche nella foglia della Canapa,

mostrando accanto alla *simple leaf* di Dewey — perfettamente corrispondente a quella di Ferrara — un'altra forma del tutto diversa e da non confondersi con essa; errore in cui peraltro potrebbe indurre l'uso generico del termine *monofilla*, che merita dunque d'essere precisato e limitato nella sua applicazione.

Difatti già nel citato articolo, riportandosi la succinta descrizione del Penzig (*Pflanzenateratologie*, 2°, p. 214) di una pianta monofilla da lui trovata in Val Camonica, veniva rilevato che, mancando il documento iconografico, mancava la prova che quel caso coincidesse con i nostri. Il dubbio sarebbe rimasto se il compianto teratologo non ci avesse privatamente informato che il suo caso — riguardante un solo individuo maschile « piccolo e mingherlino » — differiva dai nostri « inquantochè tutte le foglie avevano la lamina affatto semplice, lanceolata, portata da un picciolo lungo e sottile, senza alcuna traccia di tendenza a biforcazione o divisione in lobi ».

Dunque, per designare la forma di Ferrara e la sua ripetizione americana, non può più usarsi indifferentemente il termine di *monofilla* (*simple leaf* di Dewey) o il termine di *pinnatifidofilla* usato da Schaffner in una menzione incidentale (*Ecology*, vol. IV, p. 331) ma va adottato appunto quest'ultimo, riservando il termine di *monifilla* esclusivamente per il tipo trovato dal Penzig. La cui osservazione, da noi comunicata al Dewey, ce ne procurava in contraccambio un'altra, ugualmente preziosa: cioè che nell'anno 1914 in mezzo a circa cento piante di *Kimington*, cresciute a S. Antonio del Texas, ne comparve una staminifera a foglie semplici, lanceolate, del tutto prive di lobi, simili — dice il Dewey — « a quelle del ciliegio ». Questa particolarità non fu in alcun modo ereditata e più non ricomparve.

Della pianta — non conservata — resta solo una fotografia, gentilmente comunicataci dal Dewey, dalla quale — per quanto può vedersi — sembra che tutte le foglie sieno del tipo descritto: e ne abbiamo contate 182 sull'asse principale e sui 29 rami laterali. Senza insistere sulla similitudine delle foglie con quelle del ciliegio, ci limitiamo a rilevarne l'*assoluta somiglianza con quelle ottenute quest'anno nelle nostre colture sperimentali*, e per il particolare del « picciolo lungo e sottile »; ci sembra di non rischiare molto nel supporle corrispondenti a quelle dell'esemplare del Penzig, non controllabile in più minuti particolari perchè smarrito e non figurato.

Oltre a ciò, abbiamo anche potuto collegare le informazioni del Penzig e del Dewey con una pubblicazione del 1916, sfuggita all'uno ed all'altro, e difatti quasi introvabile, esaurita presso l'autore stesso; ma tuttavia dalla infinita gentilezza del prof. Munerati, non solamente segnalataci e procurataci, ma anche resaci accessibile nel suo testo integrale — per noi chiuso a sette sigilli perchè in lingua ungherese ⁽¹⁾ — e, oltre tutto, integrataci da

(1) GÉZA HAYASS, *Rendellenességek a Kőzdúséges Kenderen* — « Kisérletiigyi Közlemények ». XIX. Kötet; 3-4. füzet, p. 712-717 con 7 tav.

fotografie inedite in aggiunta a quelle pubblicatevi, per miglior agio di confronto tra i nostri reperti e quelli ungheresi: al prof. Munerati i nostri più sentiti ringraziamenti.

Ma a questo punto, prima di estendere i confronti tra i reperti degli altri autori, preferiamo esporre le nostre proprie ricerche, appunto perchè da esse ci sembra venire la maggiore influenza chiarificatrice.

*
* *

Le nostre colture riguardano quattro gruppi di piante:

1. Ferramington pinnatifidofillo di selezione Dewey - coltura in pieno campo, in epoca normale (semina 11 aprile 1929), buona nutrizione - circa 2000 esemplari, perfettamente uniformi, nessuna variazione gemmaria, nessuna forma intermedia. La purezza della coltura e la costanza della forma fogliare (figg. 2 e 3) mostrano la stabilità della mutazione. Se in passato, nelle colture americane comparvero sporadicamente piante normali, ciò fu per *vicinismo*; se in altre colture si videro differenze nella profondità di separazione dei lobi, e forme di transizione alla normalità, ciò non va imputato ad oscillazioni inerenti al *determinante* della mutazione, in sè considerato, ma al fatto che esso era venuto a trovarsi in costellazione con complessi eterozigoti assai disformi subendone le differenti influenze ⁽²⁾. Nel prodotto dell'accurata selezione di Dewey, la *gene* per la pinnatifidofilia, trovandosi invece a far parte di un complesso fattoriale uniforme dà - a parità di ambiente e in assenza di stimoli anormali - estrinsecazioni uniformi.

2. Nella stazione di Bieticoltura, in Rovigo, il Ferramington pinnatif. era stato in precedenza incrociato con una razza normale polesana: gli esemplari pinnatif. che si ebbero in F_2 per disgiunzione furono da noi allevati in coltura invernale (sem. 5 novembre 1928), in vaso, in serra. Uno di essi dette parte dei germogli laterali con foglie di tipo schiettamente monifillo (fig. 5): variazioni gemmarie, dunque, peraltro incomplete, perchè col crescere di questi rami le giovani foglie prodotte verso l'apice, tornarono di nuovo pinnatifide, e tali furono anche quelle dei rami di terzo ordine, sia che nascessero all'ascella delle foglie basali, monofille, sia che nascessero all'ascella di quelle pinnatifide. Poichè questa pianta, nel suo aspetto composito, può bene apparire come la iustapposizione delle due variazioni brusche dei genitori del Ferramington - la mutazione del Ferrara, e lo *sport* prodotto dal Kimington a S. Antonio del Texas⁽¹⁾ - noi

(1) Vedasi sull'argomento generale: SAVELLI, *La mutazione pistillodica attraverso l'ibridazione*, principalmente nei cap. II e III in «Atti Reale Istituto Veneto Scienze Lettere ed Arti», to. 86°, 1926-27.

(2) Il Kimington, nelle nostre colture, da seme favorito dal Dewey, mostra uno spiccatissimo carattere di ricchezza nel numero dei segmenti fogliari: non sono rare le foglie presentanti persino 15 lobi. Tanto più notevole che abbia dato una variazione monofilla!

avremmo anche potuto ritenere con verosimiglianza che la monofillia fosse proprio appunto da imputarsi specificamente alla presenza del « sangue » di Kimington: come una resurrezione d'una sua latente attitudine peculiare. Ma i seguenti reperti ci salvano da questa erronea attribuzione di paternità.

3. Per quanto riguarda la pura razza Ferrarese, le pinnatifidofille ed i loro eterozigoti d'aspetto normale, che servirono alle nostre colture, furono prodotti da fecondazioni effettuate a Ferrara presso la Scuola Agraria Navarra e a Medelana, presso il sig. Dal Buono, non solo a varie decine di chilometri dal luogo di coltura del Ferramington e derivati (Rovigo); ma anche in epoche in cui questi non erano in fiore e prima che a Rovigo venisse introdotto il Kimington che vi fiorirà quest'anno per la prima volta. Le *abbondantissime* manifestazioni di monofillia avute da questa pura Ferrarese in condizione di coltura iemale (sem. 1 novembre 1928) in vaso e in serra, provano bene che neanche nel lotto precedente il fenomeno della monofillia è da mettersi in conto della presenza di « sangue » Kimington.

Una variante di poco conto del carattere monofillico è data dal margine che può essere intero (fig. 4) o dentato. Prevale quest'ultimo. Le due sottoforme possono trovarsi riunite nello stesso ramo. La monofillia si presenta in numerose piante interessandole sempre parzialmente, insorgendo a sviluppo avanzato, e perciò sempre permettendo di riconoscere se la pianta alterata era una pinnatifidofilla o un eterozigoto (a pinnatifidofillia recessiva). La distribuzione del carattere monofillico sulla pianta presenta grande varietà, tuttavia quasi sempre riconducibile ad una qualche manifestazione di quella *legge di periodicità* sulla quale tanto insiste il de-Vries. Così sull'asse principale, dopo un certo numero di foglie pennatifide può comparire la monofillia, ma poi, verso l'apice, si ripristina la pinnatifidofillia; più spesso la monofillia si presenta nei rami di secondo e terzo ordine che possono esordire con essa, poi passano alla forma pennatifida, indi tornano alla monofilla. Ma la successione può anche essere invertita avendosi alla base la forma pinnatifidofilla, poi la monofilla, poi di nuovo la pinnatifidofilla. Qualche consimile regolarità può anche ritrovarsi nella distribuzione dei singoli rami sulla pianta, procedendo dal basso all'alto oppure seguendo la successione delle ramificazioni di vario ordine. Le diverse distribuzioni della monofillia certamente corrispondono ai diversi casi individuali d'alterazione di nutrizione della pianta nel momento della differenziazione degli abbozzi fogliari. Le foglie basali dei rami di terz'ordine possono essersi differenziate contemporaneamente a quelle apicali dell'asse principale, e ciò spiega certe corrispondenze. Ma con queste considerazioni sulle alterazioni trofiche noi tocchiamo il punto fondamentale della questione, meglio illuminata dall'ultima serie di colture.

4. Conglobiamo diversi gruppi di piante di comuni razze normali: le precroci Russa e Ungherese, e la Bolognese; coltivate nelle condizioni predette. Se le manifestazioni di monofillia fossero apparse soltanto nei due

gruppi precedenti, sarebbe venuto spontaneo di pensarle connesse con la pinnatifidofillia che, in un certo senso, potrebbe interpretarsi come un incamminamento verso la monofillia, sebbene ciò sia molto discutibile anche dal semplice punto di vista morfologico. In particolare per gli eterozigoti a foglia composta, ma celanti la pinnatofillia recessiva, si sarebbe stati tentati di omologare la comparsa di rami monofilli con una specie di particolarissima disgiunzione vegetativa. Ma anche qui la molteplicità, la varietà dei nostri esperimenti, ci salva da errate interpretazioni, poichè anche in questo gruppo di piante geneticamente normali, senza alcuna relazione con la pinnatifidofillia, compaiono le stesse variazioni localizzate di monofillia nel doppio tipo a margine liscio e dentato.

Sembra evidente a questo punto che soltanto le anormali condizioni, le alterazioni di umidità, di luce, di temperatura, di nutrizione inerenti all'allevamento jemale in vaso e in serra, possano costituire il fattore comune di queste manifestazioni così generalizzate, ma anche così instabili come mostra il loro stesso modo di distribuzione sulle singole piante. Che in altri casi la stessa manifestazione morfologica possa anche assumere valore genetico di mutazione, non è da escludersi, e sarebbe poi il fatto stesso che uno di noi ha mostrato per la pistilloidia ovulare. Ma intanto sta di fatto che l'esemplare del Penzig era anch'esso un individuo depauperato e che il polline di quello americano non indusse la ripetizione del fenomeno nelle successive generazioni: per cui a tutt'oggi - e fino a prova del contrario - sembra doversi concludere che la monofillia è una manifestazione saltuaria, instabile, verosimilmente una reazione a condizioni ecologiche abnormi, e perciò geneticamente diversissima dalla mutazione pinnatifidofilla.

*
* *

Non diversa sentenza può scaturire da un esame critico del lavoro di Havass, quali che siano le personali opinioni dell'autore. A disegno abbiamo lasciato a questo punto la segnalazione d'un altro fenomeno comparso nelle nostre colture iemali, e cioè l'ermafroditismo, che del resto in quelle condizioni poteva ben prevedersi sulla base di molti lavori: da quelli del Tournois a quelli dello Schaffner. Nelle nostre colture di serra le canape Russe e Ungheresi, fiorite a metà marzo, mostrarono deviazioni sessuali più spiccate di quelle delle altre razze fiorite qualche giorno più tardi. L'abbondanza della monofillia nei diversi casi, non fu in ragion diretta con l'entità delle deviazioni sessuali, anzi piuttosto in rapporto inverso; ma ciò non toglie il legame indiretto dei due fatti. Oggi nessuno più negherebbe una dipendenza delle deviazioni sessuali della Canapa da condizioni fisiologiche anormali di sviluppo, che possono bene realizzarsi per diverse vie; e l'ermafroditismo largamente constatato da Havass nelle sue piante, legittima la supposizione che esse, benchè crescenti in pieno campo, si

trovassero sotto l'influenza di turbe fisiologiche. La monofillia comparsa in quelle condizioni (e nella stessa duplice modalità vista anche nelle nostre colture, cioè con margine intero e dentato), ci sembra corrispondere a quella del nostro ultimo gruppo di coltura, e rientrare nello stesso quadro di interpretazione: carattere infissabile suscitato da stimoli anormali. Difatti anche negli esperimenti di Havass essa non fu ereditaria. L'autore escogita una macchinosa interpretazione, suggerita dal voler trasportare di peso le conclusioni di Shull sulla degenerazione del Mais per *geitonogamia* ad un caso come quello della Canapa diversissimo sotto tutti i riguardi. Una degenerazione per consanguineità non ha certo potuto aver luogo nella canapa di Havass e, seppur ci fosse bisogno di molti argomenti per ricusare una interpretazione tanto inverosimile, almeno due gruppi delle nostre colture deporrebbero contro di essa: le colture in pieno campo della pinnatifidofilla del tutto priva di monofillia nonostante la lunga serie di fecondazioni in consanguinità; e — per controprova — la comparsa di monofillia nelle colture di serra in prodotti di recente eterozigosi. Noi non abbiamo invece difficoltà ad ammettere una particolare propensione di alcune razze, e forse tali sono le precoci Ungheresi, sulle quali Holuby fin dal 1878 faceva qualche osservazione ravvicinabile a quelle dell'Havass, cui questo lavoro sembra essere sfuggito.

Riassumendo:

1°) Apparvero nella Canapa due variazioni brusche della forma fogliare, caratterizzate dalla sostituzione di un lembo unico a quello normale palmatosetto: la *pinnatifidofilla lobata*, la *monofilla* intera.

2°) La pinnatifidofillia è una mutazione del tutto stabile, mendelianamente recessiva di fronte alla normalità: la monofillia è da ritenersi a tutt'oggi come uno *sport* infissabile.

3°) La monofillia affetta piante intere o parti di piante; insorge come reazione a stimoli abnormi, senza alcun rapporto necessario con la pinnatifidofillia.

Biologia sperimentale. — *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli.*⁽¹⁾ Nota I⁽²⁾ di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Il metodo dei trapianti di tessuti e di organi è stato fecondo di risultati, sia per la biologia normale che patologica. Applicato all'embriologia, negli ultimi trenta anni ha permesso un ampio sviluppo di interessanti ricerche. Di recente, specialmente tra i patologi, il metodo dei trapianti è stato rivolto allo studio della costituzione biologica. Da un punto di vista molto generale è stato prospettato (Morpurgo) che le relazioni svolgentisi tra due individualità biochimiche messe a contatto hanno il carattere di un conflitto, poichè una determinata costituzione biochimica ha tendenza a difendere la propria purezza distruggendo e allontanando le sostanze che provengono da individui di diversa costituzione. Queste reazioni, però, sono assai differenti a seconda della posizione zoologica e del grado di sviluppo, e il Morpurgo giustamente nota che «mentre in tutte le epoche dello sviluppo e in tutti i gradi della scala zoologica si può presumere qualche differenza individuale, col progredire e complicarsi dell'organizzazione e il moltiplicarsi delle funzioni, vediamo evolversi meccanismi di reazioni, sempre più numerose e complesse, per la difesa della costituzione⁽³⁾». Se dalle considerazioni di carattere generale desideriamo addentrarci nello studio concreto dei difficili e numerosi problemi, che dal punto di vista della zoologia generale e sperimentale si presentano al nostro esame, ci accorgiamo che tutto un vasto campo di nuove indagini si offre allo studioso. Basterà la esposizione riassuntiva di alcune nostre esperienze di trapianti tra Anfibi anuri e urodeli per prospettare il grande interesse dei problemi che abbiamo affrontato.

Non è in queste Note di carattere sintetico che è possibile esporre diffusamente i precedenti bibliografici. I più antichi lavori in proposito sono quelli del Born, il quale nelle sue fondamentali ricerche del 1897 mentre ottenne risultati positivi negli innesti tra diverse forme di Anuri (esperienze portate ancora più oltre, subito dopo, da Harrison) non fu ugualmente fortunato nelle esperienze tra Anuri e Urodeli. Parecchi anni dopo (1906-1908) Lewis riuscì però a trapiantare con successo la vescicola otica di *Rana palustris* su embrioni di *Amblystoma*, e queste ricerche nel 1921 sono

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1929.

(3) MORPURGO B., *Le difese della costituzione individuale*, «Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze», XVI riunione, Perugia 1927, p. 82.

state confermate da Ogawa. Soltanto negli ultimissimi anni si sono fatte altre esperienze di trapianti tra Anfibi anuri e urodeli. Geinitz nel 1925 ottenne risultati positivi nei trapianti di blastule e di gastrule all'inizio dello sviluppo. Sono poi del 1927 le esperienze del Guyenot, e degli ultimi mesi (1929) le ricerche di Hans Bytinsky-Salz sui trapianti di presunto ectoderma gastrulare tra Anfibi anuri e urodeli.

Nei trapianti tra classi differenti di Vertebrati sono da ricordare le esperienze di Hiraiwa, che ripigliando ricerche più antiche di Murphy ha ottenuto, ma solo per alcuni tessuti e organi, risultati positivi trapiantando abbozzi embrionali di ratto sulla membrana corio-allantoidea di pollo.

Le esperienze di cui riferiamo nella presente Nota sono state condotte trapiantando singoli abbozzi embrionali o un insieme di tali abbozzi, da embrioni di *Rana esculenta* su embrioni di *Triton cristatus* o di *Triton taeniatus*. Abbiamo sperimentato con i seguenti abbozzi: vescicola ottica primaria, piastra olfattiva, ectoderma della testa con la zona lentogena, parti più o meno estese di prosencefalo, zone di mesenchima unite ad altri abbozzi.

Nelle prime esperienze cominciammo con lo studiare il comportamento del trapianto della piastra olfattiva cercando di escludere il mesenchima circostante. Si è notato un affondamento poco profondo dell'abbozzo; al 7° giorno si può già osservare un differenziamento istologico dei vari elementi cellulari abbastanza notevole, ma uno scarso differenziamento morfologico. In un esemplare al 14° giorno si presenta solo una piccola zona interposta nell'epidermide di tritone che interpretiamo come un residuo o un rudimento dell'organo trapiantato. In tutti gli altri esemplari operati, e fissati, dopo tale periodo di tempo non riuscimmo a trovare più nessuna traccia dell'organo di *Rana* trapiantato.

Risultati assai scarsi, se non addirittura nulli, abbiamo notato con il trapianto della vescicola ottica primaria senza mesenchima e senza territorio lentogeno.

Risultati assai più completi abbiamo ottenuti in una nuova serie di esperienze. Queste in gran parte sono consistite nel trapianto contemporaneo di vari abbozzi embrionali. Un differenziamento con tutti gli strati retinici si è avuto nello sviluppo dell'occhio di *Rana* trapiantato in *Triton*. Differenti modalità dei risultati raggiunti nei vari casi riguardano lo sviluppo del nervo ottico e del cristallino. Per lo più manca lo sviluppo di un tipico nervo ottico, tuttavia abbiamo ottenuto che fibre nervose partenti dallo strato ganglionare dell'occhio di *Rana* trapiantato si dirigano verso l'occhio di *Triton* e abbiamo anche ottenuto lo sviluppo di un tipico nervo ottico che dall'occhio di *Rana* si dirige verso il pezzo di encefalo, anche di *Rana*, trapiantato unendosi ad esso. Circa il cristallino, abbiamo notato tutti i vari casi: dall'assenza a uno sviluppo rudimentale o a uno sviluppo molto notevole.

Esperienze che hanno condotto a risultati molto interessanti riguardano il trapianto di abbozzi oculari di *Rana* accanto a quelli di *Triton*. Abbiamo ottenuto casi positivi di fusione delle due retine: anche tra forme sistematicamente lontane, come gli Anuri e gli Urodeli, si manifestano durante il periodo embrionale dell'autodifferenziamento, le proprietà di affinità e di attrazione dei singoli abbozzi oculari della stessa specie. In un primo caso la fusione intima delle due retine è fatta soltanto dallo strato granulare interno. In un secondo caso si tratta di unione più completa, manca solo quella dello strato delle cellule ganglionari. Un terzo caso ci ha dato il risultato più importante; una parte della vescicola ottica di *Rana* era stata trapiantata vicino a quella di *Triton*, anch'essa mutilata di una porzione: questo caso mentre è servito a dimostrarci i processi di affinità embrionali culminanti nella fusione ci ha mostrato altresì (alla data della fissazione) che già nell'occhio di *Rana* trapiantato, dopo essersi differenziato, cominciano a svolgersi, in armonia con le nuove condizioni larvali, i processi di repulsione biochimica, che queste nostre esperienze mettono ad un dato tempo in evidenza, come vedremo tra breve. Relazioni nervose, per il tramite di fibre, si stabiliscono tra gli organi di senso e pezzi di encefalo trapiantati della stessa specie: si è accennato al nervo ottico, ma abbiamo anche ottenuto dall'abbozzo olfattorio di *Rana* lo sviluppo di fibre nervose dirette al pezzo di encefalo di *Rana* trapiantato. Se come tutto lascia ritenere ci sono degli stimoli (neurochemiotassi) che spingono le fibre nervose sviluppatesi dai due organi di senso a dirigersi verso i centri nervosi, le nostre esperienze dimostrano che tali stimoli si esplicano ancora quando gli organi da senso e l'encefalo di *Rana* vengono a trovarsi in un ambiente biochimico differente (embrione di *Triton*) come nei casi da noi realizzati.

Nelle nostre esperienze abbiamo anche notato l'associazione dello strato dei coni e bastoncelli dell'occhio di tritone con parte di encefalo di *Rana* trapiantato.

I risultati da noi conseguiti ci hanno dimostrato che molte condizioni embrionali si manifestano egualmente quando abbozzi di organi di *Rana* vengono trapiantati negli embrioni di *Triton*. Un differenziamento maggiore o minore si può ottenere in funzione dell'associazione di varie condizioni embrionali, date dalla contemporanea presenza di vari abbozzi d'organi e di tessuti.

Un fatto che crediamo fondamentale riguarda i processi di repulsione biochimica che, dopo il differenziamento, a un dato momento entrano in azione: abbiamo infatti ottenuto, almeno per gli organi finora sperimentati, che essi vanno poi soggetti a processi di istolisi che finiscono col distruggerli.

Sulla modalità con cui si svolgono tali processi in rapporto ai differenti organi trapiantati, come sulle condizioni di sviluppo di vari abbozzi trapiantati contemporaneamente e sulle deduzioni teoriche riferiremo in una prossima Nota.

Biologia sperimentale. — *Processi di rigenerazione e di regolazione nella regione encefalica degli embrioni di Urodeli*⁽¹⁾. Nota III⁽²⁾ di ALDO SPIRITO, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Ho già esposto, antecedentemente⁽³⁾, alcuni risultati ottenuti nel campo delle rigenerazioni e regolazioni delle pareti encefaliche⁽⁴⁾ negli embrioni di Anuri, descrivendo, nel tempo stesso, un nuovo tipo d'operazione da me tentato per ottenere quei determinati processi che formano appunto l'oggetto delle due Note citate.

Mi è parso opportuno, quindi, dopo le numerose operazioni eseguite su embrioni di *Rana esculenta* e di *Bufo vulgaris*, estendere le mie ricerche agli embrioni di Urodeli, sperando di poter ottenere in questi ultimi, dotati di grandi poteri rigenerativi, anche più di quanto avevo ottenuto nei primi.

Prima di esporre i risultati delle esperienze su *Triton cristatus*, ritengo però opportuno fermarmi a considerare i presupposti teorici di esse insieme ai criteri che mi hanno guidato nell'impostazione della tecnica operatoria. Detta tecnica è stata seguita allo scopo di ottenere la rigenerazione, con successive regolazioni bilaterali, di una parete cerebrale (telencefalo e diencefalo).

È noto infatti che, dopo l'asportazione di una larga zona dell'encefalo, la parte residua si piega su sè stessa e i lembi della ferita si accostano per fondersi e cicatrizzarsi. Poichè la cicatrizzazione deve essere considerata come l'antitesi di ogni processo rigenerativo, è stata per me prima cura impedire che essa avesse luogo e a tal uopo ho tamponato la cavità cerebrale con un cuscinetto di tuorlo di embrione della stessa specie. Il tutto è stato in seguito coperto da un lembo di ectoderma ventrale.

Tuttavia l'apposizione del tuorlo non aveva il solo scopo di mantenere inalterata la forma della parete encefalica rimasta *in situ*, chè esso avrebbe acquistato anche il valore di parete, lungo la quale si sarebbe disposta la nuova zona rigenerata del cervello. Nel tempo stesso il riassorbimento del tuorlo avrebbe influito, insieme al fattore del turgore interno del tubo neurale, sui successivi processi di sviluppo.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della Regia Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1929.

(3) In questi « Rendiconti », 1928, vol. VIII, pp. 429-430; 1929, vol. IX, pp. 797-799.

(4) In tutta questa serie di ricerche intendo sempre riferirmi alla regione precordale dell'encefalo.

L'esame microscopico di molti tra gli embrioni operati ha dimostrato la corrispondenza di tali presupposti con i fatti accertati, poichè si è dimostrato possibile ottenere, a spese delle pareti rigenerate, parti paragonabili a emisferi cerebrali.

Ciò dimostra ancora meglio la fondatezza dei concetti dai quali ero partito nell'impostazione della tecnica operatoria; concetti che, a loro volta, si fondano su quelli più ampi indicati dal Cotronei per i processi di sviluppo in genere e dallo Schaxel proprio per i processi rigenerativi. Per il Cotronei l'autodifferenziamento degli abbozzi embrionali (per lo meno della regione precordale) non è il solo fattore necessario per il loro sviluppo, ma anzi esso è subordinato in modo imprescindibile a particolari condizioni

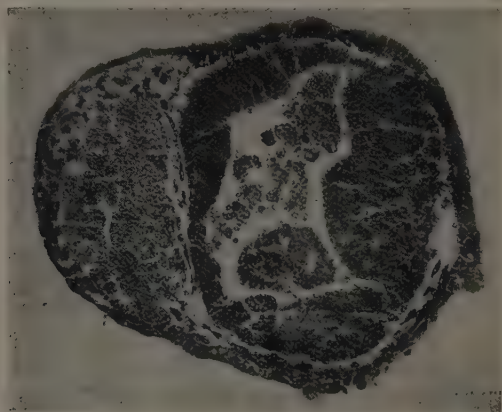


Fig. 1.

Microfotografia di una sezione trasversale di *Triton cristatus* interessante la regione anteriore dell'encefalo (obb. Zeiss 8 mm. apocr., oc. 4 K).

spaziali e di sostegno, relativi a determinati momenti della vita di ciascun organo.

D'altro canto lo Schaxel, parlando delle cause che favoriscono le rigenerazioni, ammette che « si devono creare condizioni iniziali simili alle tipiche, poichè nel luogo di formazione sono dimostrati fattori formativi, la cui assenza toglie certamente ogni speranza (di successo). Spazio per lo svolgimento dell'abbozzo è poi la condizione principale »⁽¹⁾.

La realizzazione pratica di questi concetti nel campo delle rigenerazioni cerebrali mi ha permesso di ottenere, come ho già detto, fecondi ri-

(1) Ripreso dal Giacomini in « Bollet. Soc. It. Biol. sper. », 1929, vol. IV, pp. 147-149.

sultati, là dove molti autori precedenti non avevano ottenuto che risultati negativi o di scarsa entità⁽¹⁾.

Lo stadio dei tritoni adoperati per le esperienze corrisponde a quello già descritto per gli embrioni di Anuri. Ho fissato gli animali in vari momenti dopo l'operazione e alcuni sono stati nutriti con *plankton* per osservarne il comportamento fisiologico.

Le sezioni dei primi stadi mostrano disposizioni analoghe a quelle della fig. 1. In essa si vede chiaramente la parete prosencefalica residua (a destra) e quella rigenerata aderente al cuscinetto di tuorlo in via di riassorbimento. Di quest'ultimo si trovano tracce anche nella cavità cerebrale.

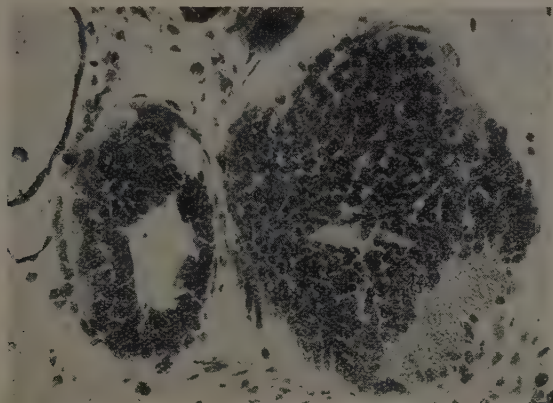


Fig. 2.

Microfotografia di una sezione trasversale di *Triton cristatus* interessante la zona degli emisferi cerebrali (obb. Zeiss 8 mm. apocr., oc. K).

La parete rigenerata è affatto simile a quella normale con elementi morfologici uguali sebbene in diversa quantità.

La fig. 2 rappresenta una sezione interessante la zona degli emisferi

(1) Nell'impostazione delle esperienze mi ero proposto anche di vedere se fosse possibile la neoformazione di una vescicola ottica dai territori rigenerati. L'esame successivo dei casi operati ha dimostrato l'inattuabilità di tale risultato e nel tempo stesso la possibilità di ottenere parti paragonabili a emisferi cerebrali.

Questo sta a dimostrare l'importanza del tempo nei processi di sviluppo poichè se è stato possibile ottenere la neoformazione di un emisfero e non di un occhio ciò deve essere attribuito al fatto che, al momento dell'operazione, gli embrioni presentavano i territori oculari già estroflessi, ma la parte anteriore dell'encefalo ancora allo stadio di unica vescicola.

cerebrali di un embrione di *Triton cristatus*, fissato vari giorni dopo l'inizio della nutrizione. A destra è visibile l'emisfero derivato dalla parete residua, laddove a sinistra la zona simmetrica è occupata da una neoformazione paragonabile ad un emisfero, la quale, per quanto di minori dimensioni, si è differenziata, come normalmente, in zone cellulari ed aree di fibre. Simili risultati avevo del resto ottenuti anche per gli Anuri.

Ad eliminare il dubbio che nei casi di formazione degli emisferi si trattasse in realtà di scarse asportazioni dovute ad operazioni riuscite incomplete, debbo riferire che è stata mia cura conservare sempre ed esaminare istologicamente i pezzi asportati caso per caso.

In conclusione, da quanto ho sopra esposto risulta che, in *Triton cristatus* allo stadio di vescicola ottica primaria, non ancora introflessa, è possibile ottenere, con la tecnica operatoria sopradetta, la rigenerazione di una intera parete prosencefalica più o meno cospicua.

La rigenerazione è seguita, a sua volta, da fenomeni di regolazione tali da indurre la formazione di parti paragonabili ad emisferi cerebrali. Debbo mettere però in rilievo che mai, negli Anuri come negli Urodeli, le dimensioni delle parti rigenerate raggiungono le dimensioni delle corrispondenti parti normali, e che intendo usare la parola regolazione in questo senso limitato. Quasi si direbbe che la quantità di cellule di neoformazione può giungere fino ad un certo limite e non oltrepassarlo.

Morfologia sperimentale. — *Rigenerazione del cristallino nelle larve di Anfibi Anuri*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di P. PASQUINI e A. DELLA MONICA, presentata dal Corresp. F. RAFFAELE.

È ormai un fatto ben noto come, negli Urodeli, il cristallino, qualora venga asportato o naturalmente perduto⁽³⁾, possa rigenerarsi dal margine superiore dell'iride. I processi, per cui, dal territorio irideo, in seguito ad un processo metaplasico e nel tempo stesso eteromorfotico, si neoforma il cristallino, si manifestano, almeno in questi Anfibi, in due tempi: 1° depigmentazione del foglietto esterno dell'iride; 2° proliferazione e conseguente ispessimento dell'orlo libero dell'iride i cui foglietti, esterno ed interno, nel punto ove confluiscono, si allontanano per la sopravvenuta attiva multipli-

(1) Ricerche eseguite in parte presso l'Osborn Zoological Laboratory dell'Università di Yale (Stati Uniti), in parte, presso l'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1929.

(3) La perdita naturale della lente, nell'occhio delle larve di tritoni, sembra, per le osservazioni di Wachs, dovere essere un fatto non raro, difficilmente osservabile per la grande rapidità con la quale si compie il processo rigenerativo.

cazione cellulare, che conduce alla formazione di una vescicola. Questa, dapprima in continuità diretta con l'iride, per costrizione non uniforme della sua base, si distacca dal territorio irideo rendendosi indipendente e, quindi, per successivo differenziamento delle sue parti, dà luogo al cristallino.

Sulle cause che inducono nell'occhio, l'attuarsi di tali processi rigenerativi a spese di tessuti già così altamente differenziati, sono state fatte ampie discussioni determinate anche dal valore stesso dei fatti che per la prima volta furono messi in luce, nei tritoni, dall'italiano Vincenzo Colucci (1891), seguito a breve distanza da G. Wolf (1893).

Per spiegare la rigenerazione del cristallino sono state così formulate le ipotesi più varie, come quella di uno stimolo esercitato dall'umore acqueo sulle cellule iridee indotte perciò a moltiplicarsi e a dare l'abbozzo lentogeno (E. Uhlenuth, 1919); di un'azione meccanica di compressione e di secrezione insieme, del cristallino, che inibirebbero la rigenerazione quando esso è presente e non quando manca (H. Wachs, 1914; A. Fischel, 1900, 1903): in tal caso questa *regolazione secondaria* dell'iride si produrrebbe quando lo stimolo meccanico, rappresentato dalla presenza del cristallino, viene a cessare.

Non vogliamo qui entrare nella disamina delle cause possibili del meccanismo col quale si compie la rigenerazione della lente; tuttavia prima di esporre i nostri risultati sperimentali, dobbiamo insistere su alcuni punti d'importanza fondamentale, che riguardano il significato di certi fatti attinenti alla rigenerazione del cristallino.

Vogliamo alludere alla normale formazione, che avviene durante lo sviluppo embrionale, di nuove lenti, sotto l'influenza del calice ottico, quando il territorio lentogeno manca, sia in caso di asportazione, sia quando il calice ottico, trapiantato in sede diversa da quella normale, induce la formazione della lente da ectoderma non presuntivo di essa.

Sotto tale aspetto, lo stimolo al differenziamento del cristallino parte dal calice che funziona da *centro organizzatore* (H. Spemann e O. Mangold, 1924).

Ma la formazione di nuove lenti, nella embriogenesi degli Anfibi, si compie anche — in speciali condizioni di spazio nelle quali il calice ottico può trovarsi — dall'orlo pupillare del calice con il differenziamento di lentoidi o di lenti descritti più volte dai vari autori (E. T. Bell, 1907; W. Lewis, 1905; H. Spemann, 1905; H. Wachs, 1914; P. Pasquini, 1927; H. Adelmann, 1928) e che dimostrano, in questi casi, l'insufficienza induttrice e organizzatrice del calice sull'ectoderma ⁽¹⁾.

Per l'autodifferenziamento o meno del territorio lentogeno, esiste una stretta relazione fra il periodo di determinazione della lente e l'influenza

(1) Cfr. P. PASQUINI, *La capacità lentogena della vescicola ottica negli embrioni di Anfibi e l'« organizzatore » del cristallino*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », vol. VI, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 11, dicembre, 1927.

del cosiddetto *organizzatore di 2° ordine* del calice ottico⁽¹⁾; il che spiega la divergenza di comportamento che si manifesta fra Anuri e Urodeli, a questo riguardo. I primi avrebbero, come suol dirsi, lente *autodifferenziabile*; negli altri, al contrario, la lente subirebbe un *differenziamento dipendente*. Ma si tratta, evidentemente nei due gruppi di Anfibi, di un: « eterocronismo della determinazione degli abbozzi, che hanno un potere indipendente di accrescimento e di differenziamento tanto maggiore quanto sono più precocemente fissati nell'embrione »⁽²⁾.

Questi risultati concordano con quelli, ottenuti per i trapianti degli abbozzi degli arti in diverse specie di Anfibi, dal Brandt⁽³⁾ che diede una illustrazione parallela al nostro *eterocronismo* (o differenza nel tempo della determinazione), nella sua *Individuelle Geschwindigkeitskurve der Determination*.

*
* *

Premessi questi fatti, è evidente come si debba attribuire un diverso significato alla neoformazione di una lente dall'orlo del calice, nello sviluppo embrionale, e alla rigenerazione metaplasica del cristallino dall'epitelio irideo.

Non vi è chi non veda, in questo caso, il forte cambiamento cui debbono andare soggette le cellule dei tessuti iridei così altamente differenziate e specializzate, per rigenerare un nuovo cristallino. E in base a ciò riesce ancora più difficile spiegare la formazione di lenti da altri territori dell'occhio all'infuori dell'iride, come dalla retina (A. Fischel, 1900) e la stessa doppia formazione di lenti dal margine superiore ed inferiore pupillare dell'iride (A. Fischel, 1900-1902; A. Jokl, 1918; W. Kolmer, 1920).

La differenza che si presumeva esistesse, fra Anuri e Urodeli, per ciò che si riferisce al normale differenziamento o alla neoformazione della lente, nella embriogenesi, sembrava, dalle ricerche degli autori precedenti, che fosse, e ancora più spiccata, estensibile alle larve e agli adulti, per quel che riguarda la rigenerazione del cristallino.

I risultati di W. Kocks⁽⁴⁾, fondati su di un caso unico di cristallino riscontrato nell'occhio di una larva di *Rana fusca*, pochi giorni dopo la sua asportazione, sono stati infirmati, e vari argomenti come, la tecnica molto imprecisa, lo stesso aspetto dell'occhio operato, la rapidità con la quale si sarebbe compiuto il processo riparativo, fanno sospettare, in questo caso, che il cristallino non fosse stato asportato.

(1) P. PASQUINI, loc. cit.

(2) P. PASQUINI, loc. cit., p. 541.

(3) D. BRANDT, *Extremitäten Transplantationen an Pleurodeles Walli* in « Verhand. d. Anat. Ges. », 1927.

(4) W. KOCKS, *Regeneration von Organen bei Amphibien*, « Arch. f. mikr. Anat. », Bd. 49, 1897.

La presunta mancata rigenerazione della lente negli Anuri risulta, ma dubbiosamente, dai lavori del Lewis (1904) in *Rana palustris*, e in *Rana sylvatica*: per questa specie l'autore accenna a un caso molto incerto.

In *Rana fusca*, nel 1921, l'Alberti⁽¹⁾ descrive ampiamente le modificazioni subite dalla retina in seguito all'asportazione del cristallino, e asserisce che, per quanto si esplichì un'attiva proliferazione cellulare dei tessuti dell'iride, *mai si forma un nuovo cristallino*. Egli aggiunge che nessuno dei fenomeni determinati nell'occhio dall'asportazione, può spiegare la mancata formazione del cristallino.

E neanche nelle altre specie di Anuri si poteva fin'oggi ritenere possibile la rigenerazione del cristallino dal margine dell'iride, chè i risultati del Wachs (1914) in *Pelobates* e *Rana* e quelli del Lewis (1904) in *Rana*, sono troppo scarsi ed incerti. I processi descritti dal Wachs, in quanto riscontrati su giovani embrioni, non sono riconducibili a processi tipici di rigenerazione, anche perchè non è improbabile, in questi casi, una formazione della lente dall'ectoderma che ricopre il calice ottico.

In base a quanto siamo venuti esponendo, risulta all'evidenza, come il problema della rigenerazione del cristallino negli Anuri, non sia affatto risolto.

Nè ci sembra, in base ai dati sperimentali di cui disponiamo, che si possa ritenere, come fa l'Alberti⁽²⁾ — cercando di spiegare i suoi risultati negativi e, come tali, poco probativi — che la facoltà rigenerativa dell'occhio degli Anuri si vada perdendo con il progredire dello sviluppo, perchè questa facoltà (presente nel periodo della determinazione e del differenziamento degli organi), nulla ha di comune con la capacità posseduta dall'occhio completo e già differenziato di rigenerare il cristallino.

Le nostre esperienze sono state condotte su *Rana sylvatica*, *R. esculenta*, *Bufo vulgaris*, in stadi larvali avanzati: per la *sylvatica* corrispondenti ad arti posteriori già sviluppati: le operazioni su *R. esculenta* e *Bufo vulgaris* furono compiute su girini di 10-12 mm. di lunghezza.

Per le operazioni, eseguite tenendo le larve in liquido di Ringer, previa narcosi in tricaina o cloretone, si adoperò un piccolo bisturi a punta molto sottile ed un paio di forcicine da iridectomia a manico lungo, arrotate al binoculare.

Si incideva la cornea al suo limite superiore, e, con leggeri movimenti di pressione sulla superficie corneale, si provocava l'espulsione del cristallino integro, dal globo oculare.

Delle numerose operazioni fatte, si presero in considerazione soltanto quelle perfettamente riuscite, nelle quali cioè il globo oculare aveva risentito

(1) W. ALBERTI, *Linsenregeneration bei Anuren*, « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 50, 1922.

(2) Loc. cit.

il meno possibile dell'atto operatorio, eccezion fatta dalla perdita dell'umore acqueo e di una minima parte del vitreo. I cristallini rimossi venivano osservati a fresco e poi fissati e chiusi in balsamo, colorati. L'osservazione microscopica ci ha assicurati della loro completa integrità.

Così le esperienze che si considerano in questa Nota, eccettuata *Ra V β*, sono soltanto quelle perfettamente riuscite e positive.

I risultati sono i seguenti:

Nella serie di 20 operazioni su *R. sylvatica*, si ottennero tre risultati positivi e cioè: *Ra V β*: dopo 11 giorni dall'operazione è presente, nell'occhio operato, un cristallino normale completamente differenziato, ma difettoso, ed assai più piccolo di quello dell'occhio dell'altro lato, ed un secondo cristallino di rigenerazione, allo stadio vescicolare con pareti ancora non differenziate e cavità interna irregolare. Le pareti della vescicola rigenerata sono in perfetta continuazione con i due foglietti del margine superiore dell'iride, i quali, in questa zona, sono notevolmente allontanati per la intervenuta proliferazione cellulare.

In *Ra III ε*: 13 giorni dopo l'asportazione del cristallino, questo, nell'occhio operato, si è già rigenerato e ha l'aspetto di una vescicola con piccola cavità, contenente granuli di pigmento. Quest'abbozzo del cristallino neoformato si continua con il margine superiore dell'iride, talchè non si può dubitare della sua origine metaplasica. La parete della vescicola rivolta medialmente, è ispessita per la proliferazione dei suoi elementi che daranno le fibre e la sua cavità conseguentemente ne risulta quasi obliterata.

Il terzo caso di *Rana sylvatica* è *Ra III δ*: dopo 10 giorni dall'operazione, dal margine inferiore dell'iride si distacca una piccola vescichetta a pareti ancora indifferenziate, che nelle sezioni più cefaliche è tuttora in continuazione con i foglietti iridei e rappresenta l'abbozzo del nuovo cristallino.

In un secondo gruppo di operazioni, condotte su 5 larve di *R. esculenta*, si sono ottenuti 2 casi positivi di rigenerazione del cristallino:

In *Re I a*, 5 giorni dopo l'operazione, il cristallino rigenerato appare alquanto avanzato nel suo differenziamento. Ha l'aspetto di una vescichetta con cavità semilunare e parete esterna epiteliale; quella interna ha subito l'iniziale differenziamento delle fibre. Questa lente neoformata è in relazione di continuità con il margine superiore dell'iride, notevolmente ipertrofizzato e dista alquanto dal margine inferiore.

Nove giorni dopo l'asportazione del cristallino, nell'occhio operato di *Re I g*, la lente rigenerata vescicolare, racchiude una cavità presso che sferica ed è in uno stadio di differenziamento simile a *Re I a*. Tale lente, sicuramente metaplasica, si trova a semplice contatto di contiguità, e non di continuità con il margine superiore dell'iride.

In un terzo gruppo di sei operazioni eseguite su *R. esculenta*, si sono avuti altri tre casi certi di rigenerazione.

Re III c: 5 giorni dopo l'operazione l'occhio operato possiede un cristallino in stadio di sviluppo piuttosto avanzato; la sua cavità è quasi completamente obliterata dalle fibre, circondate dall'epitelio della capsula. Nelle sezioni più cefaliche la lente è prossima all'orlo superiore dell'iride, più caudalmente occupa una posizione normale al centro della pupilla, ma è notevolmente più piccola della lente normale dell'occhio dell'altro lato, che funge da controllo.

L'operazione di *Re III e*, ci ha fornito un altro caso positivo di rigenerazione del cristallino. Dopo otto giorni dall'asportazione di questo, si osserva nell'occhio una piccolissima vescichetta all'inizio del suo differenziamento, che nella sezione più caudale è in continuazione con il margine superiore dell'iride.

Il terzo caso si è verificato nell'esperienza *Re III f*. La larva è stata fissata sette giorni dopo l'operazione. Si osserva nell'occhio una piccola lente priva di cavità, obliterata del tutto dalle fibre. Anche questa lente neoformata è in continuazione dell'orlo superiore dell'iride, spostata caudalmente nella apertura pupillare.

Di 15 operazioni condotte in *Bufo vulgaris*, un solo caso ha dato risultati favorevoli alla rigenerazione del cristallino, anche in questa specie.

Per avere una conoscenza diretta, e non attraverso gli autori precedenti, delle differenze, che si possono riscontrare nei processi di rigenerazione fra Anuri e Urodeli, abbiamo anche eseguito operazioni di asportazione del cristallino in larve di *Axolotl* in stadî corrispondenti al 46 di Harrison per *Amblystoma punctatum*.

Un gruppo di sette operazioni di questo tipo ci ha dato tre casi positivi.

Ax I: 8 giorni dopo l'operazione mostra il cristallino rigenerato allo stato di vescicola con le cellule della parete mediale in via di proliferazione e limitanti una piccola cavità, in sezione semilunare. La lente neoformata è in diretta continuità della porzione superiore dell'iride, staccata dal margine inferiore.

Ax II b: 10 giorni dopo l'operazione ha il cristallino rigenerato in un grado di più avanzato differenziamento rispetto al caso precedente, ma non ancora indipendente dall'iride, con il quale si connette cefalicamente.

Ax II c: 8 giorni dopo l'operazione, nell'occhio operato sono presenti due cristallini rigenerati in uno stadio di sviluppo molto precoce. Sono infatti rappresentati da due tipiche vescicole la cui parete è costituita, in entrambe, di uno strato uniformemente spesso di cellule, che delimitano una cavità in sezione quasi circolare. La lente, che è in contatto col margine inferiore dell'iride, è più piccola dell'altra connessa al margine superiore. Nelle sezioni più caudali dell'occhio, tutti e due i cristallini metaplasici, si continuano con il margine dell'iride.

*
* *

L'esame dei protocolli sopra trascritti è sufficiente, per ora, a fornire le conclusioni principali che si debbono trarre da queste nostre ricerche:

« La facoltà di rigenerazione posseduta, nell'occhio degli Urodeli, dalle cellule dell'iride per sviluppare un cristallino, si deve estendere anche agli Anuri (*Rana* e *Bufo*) nell'occhio dei quali si manifestano, in seguito all'asportazione del cristallino normale, fenomeni analoghi: principalmente la proliferazione e conseguente allontanamento dei foglietti iridei, che conducono alla formazione metaplasica di una nuova lente. Questa, prima in continuità con l'iride, generalmente col margine superiore, ma eccezionalmente anche con quello inferiore, si rende poi indipendente andando incontro al tipico differenziamento descritto ».

Patologia vegetale. — Su una « pseudocarie » delle cariossidi di frumento. Nota ⁽¹⁾ di M. CURZI, presentata dal Corrisp. L. PETRI.

Nel periodo nel quale il frumento completa, dopo la raccolta, la sua maturazione e il disseccamento indispensabile per una conveniente trebbiatura, per varie cause dipendenti dal clima eccessivamente umido o dagli agricoltori che anticipano la mietitura o che non sono sufficientemente diligenti nella disposizione e conservazione dei covoni, il grano va talora soggetto ad anormali fermentazioni con forte riscaldamento della massa e sviluppo di una microflora particolare di specie microbiche che in condizioni normali, alla temperatura ordinaria dell'ambiente, non si sarebbero sviluppate. In tali condizioni, la migrazione dei principi elaborati dalle foglie e dai culmi nei semi viene ad essere disturbata oppure ad arrestarsi, e le cariossidi, oltre a non ricevere tutto il materiale di riserva, subiscono una degradazione, specialmente nell'embrione, che facilmente si altera e viene invaso da micromiceti e batteri fra cui non mancano specie patogene e virulente su questo cereale.

Un frumento simile, alterato dall'autoriscaldamento in spiga raccolta, mi venne inviato in esame nell'autunno del 1926 da Suzzara, dal dott. Aldo Pizzarelli della Cattedra Ambulante d'Agricoltura di Mantova.

Trattavasi di un campione di « Ardito » che alcuni agricoltori del luogo avevano seminato con esito infelice, senza alcun segno di germinabilità. Infatti, le cariossidi — poste in condizioni opportune — non germina-

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1929.

vano, mentre il pericarpo in corrispondenza dell'embrione si rigonfiava e poi si lacerava, lasciando uscire una massa scura come di caffè bruciato, costituita unicamente dalle spore di un fungillo che in questa Nota preventiva brevemente descrivo.

Le cariossidi avevano un colore rossiccio non usuale della varietà del grano da cui provenivano e presentavano la cavità embrionale ripiena di un denso ammasso di spore attorno all'embrione profondamente alterato se non del tutto distrutto.

L'infezione era generalmente confinata allo scudetto o meglio all'embrione, ma qualche volta si estendeva anche nelle altre parti della cariosside, al disotto della tunica seminale, con la formazione di uno strato più o meno spesso di spore fra gli avanzi del perisperma e l'endosperma avente lo strato di aleurone alterato e talora completamente distrutto. In qualche rarissimo caso anche il parenchima amilifero veniva invaso dal fungo in modo che la parte interna della cariosside risultasse ripiena di spore quasi a guisa di una infezione di carie.

A prima vista sembrava veramente di trovarsi di fronte a una carie speciale: l'aspetto dell'alterazione delle cariossidi e il fatto di rinvenire nell'interno di queste soltanto un ammasso polverulento di spore — senza conidiofori distinti — sostanzialmente non diverse nella forma, colore e nella natura dell'episporio dalle clamidospore delle *Tilletiaceae*, avvaloravano questa ipotesi; ma poi, attraverso alla germinazione delle spore e allo sviluppo del micelio, ho potuto subito constatare di trovarmi di fronte ad un ifomicete del genere *Acremoniella* Sacc.

Alla temperatura ambiente di 20°–25° C. le spore non germinavano e per questo tutti gli isolamenti in coltura da me eseguiti in queste condizioni termiche andarono falliti. Tali prove ebbero invece un esito positivo a temperature superiori fino ai 52° C. La germinazione si inizia infatti verso i 30° C. e migliora sempre nei gradi superiori di temperatura fino a un ottimo di 42°–45° C., oltre diminuisce per cessare del tutto a 52° C. che segna il limite massimo di germinazione e di vegetazione di questo ifomicete.

In base a questi dati si può quindi stabilire lo sviluppo ordinario del fungo fra i 30° C. e i 52° C. di temperatura, cioè con un *minimum* che viene quasi a coincidere col *maximum* degli usuali ifomiceti parassiti delle piante, che generalmente è quasi sempre di poco superiore ai 30° C.

Dalla germinazione delle spore si originava un micelio ialino, piuttosto sottile e di calibro uniforme, settato e variamente ramificato talora anche dicotomicamente, che in substrati adatti produceva le fruttificazioni specifiche, date da conidiofori brevi, eretti, leggermente ingrossati presso l'apice o nella parte mediana, quasi sempre semplici e portanti una spora globosa di 8–11 μ di diametro, prima ialina poi olivacea e liscia, in seguito fuliginea o castanea, con l'episporio ispessito, rugoso e subreticolato.

Questa specie non mi risulta che sia stata descritta; essa si distingue nettamente, per i soli caratteri sporologici, da tutte le specie del genere finora conosciute e particolarmente dall'*Acremoniella occulta* Cav.⁽¹⁾ che sovente si rinviene nei culmi di grano⁽²⁾, la quale peraltro — secondo le recenti ricerche del Mason⁽³⁾ — non sarebbe che un sinonimo della *Monotospora Oryzae* Berk. et Br., oggi meglio nota sotto il nome di *Nigrospora Oryzae* (Berk. et Br.) Pet.

Pertanto, nel mentre sto facendo lo studio biologico di questa *Acremoniella*, interessante non tanto come nuova entità specifica associata a una speciale alterazione delle cariossidi di frumento, quanto come specie facilmente soggetta a modificazioni genotipiche con la comparsa nelle colture di numerose forme biologiche alcune delle quali differenziate anche morfologicamente, comunico in questa Nota la nuova specie, denominandola *Acremoniella thermophila* n. sp., per ricordare la sua elevata temperatura di sviluppo.

(1) CAVARA F., *Ueber einige parasitische Pilze auf dem Getreide*. « Zschr. f. Pflanzenkr. », III. Bd., p. 24, 1893.

(2) PETRI L., *Rassegna dei casi fitopatologici più notevoli osservati nel 1926*. « Boll. R. Stazione Pat. Veg. », anno VII, N. S., n. 1, p. 32, Roma, 1917.

(3) MASON E. W., *On species of the genus Nigrospora Zimmermann recorded on monocotyledons*. « Trans. Brit. Mycol. Soc. », XII, 2-3, pp. 152-165, 1 pl., 1927.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1929 (Anno VII).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Astrofisica. — *Struttura della riga $H\alpha$ e periodo di rotazione della cromosfera solare.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ABETTI e di B. NOVÁKOVÁ.

In precedenti Note ⁽²⁾ lo scrivente (Ab) ha comunicato il risultato sulla dissimmetria della riga $H\alpha$ al bordo del Sole ricavato da spettrogrammi ottenuti con la Torre solare di Arcetri. Tale dissimmetria fu misurata e calcolata considerando la componente di emissione $H\alpha_2$ come costituita dalle due componenti di emissione, violetta ($H\alpha_2v$) e rossa ($H\alpha_2r$) e confrontandone il medio con la componente centrale oscura di assorbimento ($H\alpha_1$). Ma la dissimmetria totale della bisettrice rispetto a quella di $H\alpha_2$, considerata come l'insieme delle due componenti di emissione è, come si vede subito ⁽³⁾, il doppio di quella suddetta. Da un numero molto maggiore di misure fatte e calcolate dalla signorina Nováková (Nv) su spettrogrammi eseguiti da Ab nel 1927 e nel 1928 risulta, in un buon accordo con quanto fu allora trovato:

$$H\alpha_3 - H\alpha_2 = -0.059 \pm 0.002 \text{ \AA},$$

il centro della componente oscura $H\alpha_3$ è dunque spostato rispetto ad $H\alpha_2$, insieme delle componenti di emissione, di 0.059 Å.

Nelle prime misure era stato trovato, ed è ora confermato da queste, che tale dissimmetria è sensibilmente costante a tutte le latitudini. Quindi

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1929.

(2) Questi « Rendiconti », vol. III, p. 594, maggio 1926 e « Pubblic. Osserv. Arcetri », fascic. 43, p. 23, 1926.

(3) Cfr. « Pubblic. Osserv. Arcetri », fascic. 46, p. 37, 1929.

se si determina il periodo di rotazione che spetta alle componenti $H\alpha_2$ e $H\alpha_3$, si dovrebbe trovare per ambedue lo stesso valore.

Ciò è stato fatto con una serie di spettrogrammi eseguiti confrontando opposti lembi del sole a varie latitudini. Determinando gli spostamenti relativi dei bordi delle componenti di emissione e di quella di assorbimento non che gli spostamenti di alcune righe metalliche dello strato invertente (S. I.), si sono trovati i seguenti risultati, dove con $v + v_1$ si intendono le velocità lineari e con ξ le velocità angolari diurne corrispondenti al periodo siderale P di rotazione.

φ	$v + v_1$ Km. sec.			ξ			P		
	$H\alpha_2$	$H\alpha_3$	S. I.	$H\alpha_2$	$H\alpha_3$	S. I.	$H\alpha_2$	$H\alpha_3$	S. I.
0°	1.95	2.07	1.99	13°9	14°7	14.1	α 26.0	α 24.5	α 25.5
30	1.46	1.66	1.60	11.9	13.6	13.1	30.2	26.5	27.5
60	0.65	0.78	0.78	9.1	10.9	11.0	39.5	33.1	32.8

da cui risulta che la velocità dello strato di idrogeno, che dà origine alla riga $H\alpha_3$, è maggiore di quella spettante alla $H\alpha_2$ e che quella dello strato invertente è compresa fra le due. L'accelerazione equatoriale è sensibilmente uguale per i tre strati.

L'errore medio che spetta alle velocità $v + v_1$ è dell'ordine di 0.05 km. sec. quindi le differenze fra le velocità date da $H\alpha_2$ e da $H\alpha_3$ sono poco superiori agli errori di osservazione. Tuttavia è probabile che le differenze siano reali e dovute alla maggiore altezza dello strato che produce la riga $H\alpha_3$ rispetto a quella di $H\alpha_2$ sulla fotosfera.

Le trovate differenze aumenterebbero ancora della metà del loro ammontare se si considera, invece che il medio delle due componenti di emissione, il medio dei bordi esterni, violetto o rosso, della $H\alpha_2$ considerata come una sola riga.

Anche nella determinazione della dissimmetria, se confrontiamo i valori ottenuti per il bordo est con quelli per il bordo ovest si ha:

	Est $H\alpha_3 - H\alpha_2$ $A \times 10^{-3}$	Ovest $H\alpha_3 - H\alpha_2$ $A \times 10^{-3}$	Differenza Est — Ovest
0°	— 60	— 55	— 5
$\pm 30^\circ$	— 66	— 59	— 7
$\pm 60^\circ$	— 63	— 62	— 1

Benchè le differenze siano piccole, e per 0° e 30° di latitudine poco superiori all'errore medio, che è all'ordine di $\pm 4 \text{ \AA} \times 10^{-3}$, tuttavia sembra probabile che la dissimetria sia maggiore all'est che non all'ovest, avendosi così un periodo di rotazione per la $H\alpha$, maggiore che non per la $H\alpha_2$, a conferma di quanto si è prima trovato.

Misure preliminari eseguite da Nv col microfotometro di Moll dell'Istituto di Chimica-fisica dell'Università di Praga, su alcuni degli spettrogrammi di Arcetri confermano questi risultati (fig. 1). Dalle curve ricavate per tre punti della riga $H\alpha$ su di uno spettro del lembo preso al polo sud del sole (lastra T 316) si deduce, che l'intensità della riga $H\alpha$, è notevolmente superiore a quella dello spettro continuo e che quelle delle due componenti di emissione sono naturalmente ancora maggiori. Quella della componente rossa è però leggermente minore di quella della componente violetta, inoltre la prima è più larga della seconda.

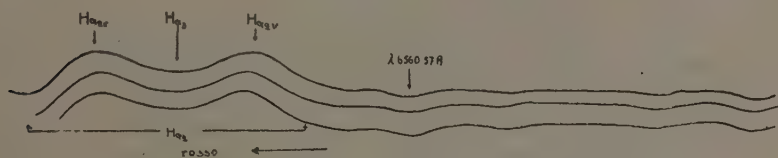


Fig. 1. - Microfotogramma della riga $H\alpha$.

Qualche perturbazione nell'intensità di queste componenti deve essere certamente causata dalla presenza di righe atmosferiche, che sappiamo essere sovrapposte alla riga $H\alpha$, ma poichè detto spettrogramma è stato preso con sole alto, tale perturbazione è forse trascurabile. Ciò risulterà del resto dall'esame di altri spettrogrammi in cui le righe atmosferiche sono bene visibili.

La disimmetria trovata con le misure dirette sulla lastra deve risultare anche dai microfotogrammi ed infatti da queste sole tre curve, determinando le distanze dei massimi e minimo di intensità della $H\alpha$ dalla riga atmosferica $\lambda 6560.57 \text{ \AA}$, si ha:

$$H\alpha_3 - H\alpha_2 = 0.060 \text{ \AA}.$$

Nelle classiche determinazioni di Adams⁽¹⁾ del periodo di rotazione, quelle fatte con la riga $H\alpha$ di assorbimento, immediatamente dentro il lembo, mostrano, al confronto dello strato invertente, una velocità maggiore e una minore accelerazione equatoriale. Per mettere d'accordo i suoi risultati con quelli qui ottenuti si deve ammettere, che gli strati di idrogeno che producono, immediatamente al di fuori del lembo, le componenti

(1) «Carnegie Inst. of Washington», n. 138, p. 103, 1911.

$H\alpha_2$ e $H\alpha_3$, sieno ad un livello notevolmente più basso di quello che produce la riga $H\alpha$ dentro il lembo, ciò che si potrà probabilmente dimostrare misurando la relativa intensità delle componenti stesse.

Dalle misure eseguite in Arcetri si sono anche ricavate le lunghezze d'onda al lembo delle componenti di $H\alpha$ e di alcune righe metalliche.

Si sa dalle determinazioni di St. John⁽¹⁾ a Monte Wilson, che nel centro del disco solare la riga $H\alpha$ è spostata verso il rosso, rispetto alla sua lunghezza d'onda nel vuoto, di 0.023 Å, spostamento che egli fa l'ipotesi sia dovuto, parte all'effetto Einstein (+ 0.014 Å) e parte (+ 0.009 Å) ad un movimento convettivo del vapore di idrogeno verso il basso che possiamo chiamare *effetto St. John*. Al lembo, dove questo si annulla, noi troviamo per $H\alpha$, rispetto al vuoto, tenendo conto dell'effetto Einstein, uno spostamento di - 0.014 Å e per la $H\alpha_2$, considerata come un'unica riga di emissione, + 0.046 Å, mentre se si considera il medio delle sue componenti violetta e rossa, misurate separatamente, + 0.016 Å.

Per quattro righe metalliche nelle regioni di $H\alpha$, da confronti fra i due lembi ed il centro troviamo le differenze fra effetto St. John ed *effetto al lembo* uguale in media a - 0.009 Å, da cui, ammettendo che il primo, secondo le misure di St. John, sia per questa riga uguale a - 0.003, risulta il loro effetto al lembo uguale a + 0.006 Å, notevolmente maggiore di quello medio trovato da St. John (+ 0.0015 Å) per lunghezza d'onda minori. Probabilmente anche l'effetto al lembo deve essere funzione dell'intensità e delle lunghezze d'onda delle righe considerate.

(1) «Contrib. from Mt. Wilson Observatory», n. 348, p. 13, 1928.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *I complessi quadratici contenenti la congruenza degli assi⁽¹⁾ di una cubica gobba e le condizioni affinchè due cubiche binarie abbiano due radici comuni.* Nota⁽²⁾ di D. MERCOGLIANO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

I. — Allo scopo di paragonare le *note condizioni*⁽³⁾ affinchè due cubiche

$$a_0 x_1^3 + a_1 x_1^2 x_2 + a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = 0,$$

$$h_0 x_1^3 + h_1 x_1^2 x_2 + h_2 x_1 x_2^2 + h_3 x_2^3 = 0,$$

abbiano due radici comuni,

$$(\alpha) \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = R = 0,$$

$$(\beta) \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\gamma) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 0 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

(1) Il REYE (*Die Geometrie der Lage*, 1907, vol. II) chiama *assi biplanari* di una cubica gobba le intersezioni delle coppie di piani osculatori. Noi — col Bertini — diremo *assi* senz'altro le intersezioni predette.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1929.

(3) V. CAPELLI, *Istitut. di Analisi Algebrica*, 1909, p. 334.

all'annullarsi dei cinque determinanti del 4° ordine della matrice

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

coefficienti del covariante (del 4° ordine) θ del Gordan⁽¹⁾, o all'annullarsi di due⁽²⁾ di questi determinanti, od infine al risultato del Brioschi⁽³⁾, ho voluto — attraverso una rappresentazione geometrica — guardare le cose da un altro punto di vista. Sono riuscito a dimostrare così che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè due cubiche binarie abbiano due radici comuni sono date dall'annullarsi del determinante

$$(\epsilon'_1) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{e dei due, che precedono, } (\beta) \text{ e } (\gamma).$$

Ed ho potuto anche far vedere che a tale risultato corrisponde una notevole proprietà della congruenza degli assi di una cubica gobba, di essere cioè rappresentata analiticamente dalle equazioni di tre complessi quadratici soltanto.

II. — All'uopo sull'esempio di O. Hesse⁽⁴⁾ mi sono giovato della particolare corrispondenza che si può stabilire tra le ∞^3 terne di punti di una retta r e gli ∞^3 punti dello spazio, per cui alla terna di punti di r

$$a_0 x_1^3 + a_1 x_1^2 x_2 + a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = 0$$

viene ad essere coordinato il punto dello spazio

$$X_1 = a_0, \quad X_2 = a_1, \quad X_3 = a_2, \quad X_4 = a_3;$$

e quindi alle ∞^3 terne di r , costituite ciascuna da un punto contato tre volte

$$(x'_2 x_1 - x'_1 x_2)^3 = 0,$$

(1) V. « Math. Annalen », vol. III, 1871: Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen.

(2) V. SALMON, *Lessons introductory to the modern algebra*, fourth edit., 1885.

(3) V. *Opere Mat.*, vol. V, p. 385: Sur les invariants de deux formes binaires à facteur commun, Lettre à Mr. Noether, 1895.

(4) Ein Uebertragungsprincip, « Journ. für die reine und angew. Mathematik », 1866.

corrispondono i punti dello spazio con le coordinate

$$X_1 = x_2'^3, \quad X_2 = -3x_1'x_2'^2, \quad X_3 = 3x_1'^2x_2', \quad X_4 = -x_1'^3,$$

i punti cioè di una cubica gobba Γ , con x_1', x_2' parametri variabili.
Esprese perciò con

$$-\theta^3, \quad 3\theta^2, \quad -3\theta, \quad 1$$

le coordinate di un punto M_c di tale cubica gobba, corrispondente al punto M_r' di r , considerato come triplo, è immediato che il piano osculatore di Γ in M_c ,

$$X_1 + \theta X_2 + \theta^2 X_3 + \theta^3 X_4 = 0,$$

contiene ogni altro punto (dello spazio) che sia corrispondente di una delle ∞^2 terne di punti di r , dei quali faccia parte il punto M_r' considerato come semplice.

E ne segue che le ∞^1 terne di r , contenenti due suoi punti assegnati M_r', N_r' , hanno per omologhi i punti della retta dello spazio in cui si tagliano i piani osculatori di Γ in M_c ed in N_c , corrispondenti rispettivamente ad M_r' e ad N_r' . E quindi pure che alla totalità (∞^2) delle ∞^1 terne di r , ciascuna costituita dalle terne aventi due punti comuni, viene a corrispondere la *congruenza* (di ordine 3 e classe 1) delle rette dello spazio secondo cui si tagliano a 2 a 2 i piani osculatori della predetta cubica gobba, la congruenza cioè — come diremo — degli assi di Γ .

Manifestamente allora il *problema di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè due cubiche binarie abbiano due radici comuni* viene ad essere equivalente — per la corrispondenza stabilita — alla *ricerca delle condizioni atte a rappresentare analiticamente in modo completo la suddetta congruenza*.

Pertanto siamo ridotti in sostanza a cercare di vedere:

- 1) quali complessi quadratici contengono la congruenza stessa,
- 2) quali tra essi sono sufficienti per la sua rappresentazione analitica completa.

III. — Per la prima questione, è ovvio che se

$$1, \theta, \theta^2, \theta^3,$$

$$1, \theta', \theta'^2, \theta'^3$$

sono le rispettive coordinate dei piani osculatori in due punti arbitrari della

cubica gobba, per le coordinate plückeriane d'una retta qualunque della congruenza in esame, si avrà (soppresso il fattore comune $\theta' - \theta$):

$$\begin{aligned} p_{34} &= 1, \quad p_{24} = -(\theta + \theta'), \quad p_{23} = \theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2, \\ p_{14} &= \theta\theta', \quad p_{31} = \theta\theta'(\theta + \theta'), \quad p_{12} = \theta^2\theta'^2. \end{aligned}$$

Quindi perchè tale retta, per θ e θ' qualsiansi, appartenga ad un complesso quadratico, occorre e basta che l'equazione di quest'ultimo sia della forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1(p_{14}^2 - p_{34}p_{12}) + \alpha_2(p_{34}p_{31} + p_{14}p_{24}) + \alpha_3(p_{14}p_{31} + p_{24}p_{12}) + \\ + \alpha_4(p_{31}^2 - p_{14}p_{12} - p_{23}p_{12}) + \alpha_5(p_{24}^2 - p_{34}p_{14} - p_{34}p_{23}) + \\ + \alpha_6(p_{34}p_{12} + p_{14}p_{23} + p_{24}p_{31}) = 0, \end{aligned}$$

con i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ arbitrari.

A parte perciò la relazione

$$(k) \quad p_{34}p_{12} + p_{14}p_{23} + p_{24}p_{31} = 0,$$

sempre esistente tra le coordinate p_{ij} delle rette dello spazio, si può concludere che la congruenza in questione è contenuta nei cinque complessi quadratici:

$$(l) \quad \begin{cases} (e_1) & p_{14}^2 - p_{34}p_{12} = 0, \\ (e_2) & p_{34}p_{31} + p_{14}p_{24} = 0, \\ (e_3) & p_{14}p_{31} + p_{24}p_{12} = 0, \\ (e_4) & p_{31}^2 - p_{14}p_{12} - p_{23}p_{12} = 0, \\ (e_5) & p_{24}^2 - p_{34}p_{14} - p_{34}p_{23} = 0. \end{cases}$$

Dalle quali equazioni si vede subito che si possono ottenere le condizioni necessarie e sufficienti — per questo primo esame — affinchè le due cubiche binarie date abbiano due radici comuni.

Corrispondendo infatti ad esse cubiche rispettivamente i due punti dello spazio

$$(a_0, a_1, a_2, a_3), \quad (h_0, h_1, h_2, h_3),$$

la retta di questi avrà le coordinate esprimibili mediante i minori della matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix},$$

ed appartenendo alla congruenza in esame, se le due cubiche binarie hanno due radici comuni, le sue p_{ij} verificheranno le (l).

Per $p_{12} = a_0 h_1 - a_1 h_0$ ecc., si ha⁽¹⁾ in effetti:

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_1) \quad & \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_3 \\ h_0 & h_3 \end{array} \right|^2 - \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ h_2 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ h_0 & h_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_3 & 0 \\ h_0 & h_1 & h_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_3 \\ 0 & h_0 & h_2 & h_3 \end{array} \right| = 0, \\
 (\epsilon_2) \quad & \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ h_2 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_0 \\ h_2 & h_0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_3 \\ h_0 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ h_1 & h_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_3 & 0 \\ h_0 & h_2 & h_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{array} \right| = 0, \\
 (I') \quad (\epsilon_3') \quad & \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_3 \\ h_0 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_0 \\ h_2 & h_0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ h_1 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ h_0 & h_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ h_0 & h_1 & h_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_3 \end{array} \right| = 0, \\
 (\epsilon_4') \quad & \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_2 \\ h_0 & h_2 \end{array} \right|^2 - \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_3 \\ h_0 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ h_0 & h_1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_1 \\ h_0 & h_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 \end{array} \right| = 0, \\
 (\epsilon_5') \quad & \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{array} \right|^2 - \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ h_2 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_0 & a_3 \\ h_0 & h_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ h_2 & h_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 0 \end{array} \right| = 0.
 \end{aligned}$$

Le quali eguaglianze, ottenute passando dallo spazio alla retta, hanno il significato di *relazioni* tra i coefficienti di cubiche binarie aventi due radici comuni.

E, come si vede, si sono ottenuti per quest'altra via i cinque determinanti della matrice (δ), coefficienti del covariante θ del Gordan, di cui il 4° ed il 5° sono rispettivamente il (β) ed il (γ) di I (il 1° di (I') coincidendo col 1° della 2ª terna di I).

IV. — Per la 2ª questione, si può dimostrare subito che (ϵ_2) ed (ϵ_3) si annullano se sono nulle le altre tre equazioni di (I): cioè a dire che i

(1) Non tenendo conto anche qui dell'identità tra i coefficienti a_i h_i di due cubiche binarie qualsiasi a cui dà luogo la (k)

complessi $(\epsilon_1), (\epsilon_4), (\epsilon_5)$ bastano solo essi a rappresentare completamente la congruenza degli assi della cubica gobba Γ , e corrispondentemente su r le relazioni $(\epsilon'_1), (\epsilon'_4), (\epsilon'_5)$ sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché le due cubiche binarie date abbiano due radici distinte comuni.

Cominceremo dall'osservare infatti che le rette

$$(1) \quad p_{14} \neq 0, \quad p_{12} = p_{13} = p_{23} = p_{24} = p_{34} = 0,$$

$$(2) \quad p_{13} \neq 0, \quad p_{12} = p_{14} = p_{23} = p_{24} = p_{34} = 0,$$

$$(3) \quad p_{24} \neq 0, \quad p_{12} = p_{13} = p_{14} = p_{23} = p_{34} = 0$$

non appartengono a tutti i complessi (l) , di modo che ne risulta la indipendenza di ciascuno dei complessi $(\epsilon_1), (\epsilon_4), (\epsilon_5)$ dai rimanenti.

Si vede poi facilmente che, data la cubica gobba

$$(\Gamma') X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1 : \theta : \theta^2 : \theta^3,$$

la congruenza (d'ordine 1 e classe 3) delle sue corde, di cui le coordinate (soppresso il fattore comune $\theta' - \theta$) hanno la forma

$$(c) \quad \begin{aligned} p_{12} &= 1, & p_{13} &= \theta + \theta', & p_{14} &= \theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2, \\ p_{23} &= \theta\theta', & p_{24} &= \theta\theta'(\theta + \theta'), & p_{34} &= \theta'\theta'^2, \end{aligned}$$

appartiene ad (ϵ_4) e ad (ϵ_5) , ma a nessuno degli altri tre complessi di (l) .

Onde, decomponendosi la congruenza di 4° grado — comune ai complessi (ϵ_4) ed (ϵ_5) — nella nostra congruenza (d'ordine 3 e classe 1) e nella precedente (d'ordine 1 e classe 3), si è indotti a vedere se i complessi (ϵ_4) ed (ϵ_5) col complesso (ϵ_1) , ovvero con questo e qualche altro dei rimanenti di (l) , sieno atti a rappresentare in modo completo la nostra congruenza; e ciò per la precedente osservazione, per cui anche per l'annullarsi simultaneo di $(\epsilon_4), (\epsilon_5), (\epsilon_3), (\epsilon_2)$ non sempre è nullo (ϵ_1) .

Ed infatti, detta G l'espressione

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23},$$

quadrando l'espressione (ϵ_2) e tenendo conto di (ϵ_1) , di (ϵ_4) e di (ϵ_5) , si ha:

$$\begin{aligned} (\epsilon_2)^2 &= p_{31}^2 p_{31}^2 + p_{14}^2 p_{21}^2 + 2p_{34}p_{31}p_{14}p_{24} = p_{31}^2(p_{14}p_{12} + p_{23}p_{12}) + \\ &+ p_{34}p_{12}(p_{34}p_{14} + p_{34}p_{23}) + 2p_{34}p_{31}p_{14}p_{24} = \\ &= 2p_{34}p_{14}(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}) - 2p_{34}p_{14}p_{13}p_{42} - 2p_{34}p_{14}p_{23} + \\ &+ 2p_{34}^2p_{23}p_{12} + 2p_{34}p_{31}p_{14}p_{24} = \\ &= 2p_{34}p_{14}G - 2p_{34}p_{23}(p_{14}^2 - p_{34}p_{12}) = 2p_{34}p_{14}G - 2p_{34}p_{23}(\epsilon_1). \end{aligned}$$

Onde, essendo G identicamente nulla se le p_{ij} sono coordinate di rette dello spazio, è anche — per (ϵ_1) nulla — $(\epsilon_2)^2 = 0$, e quindi $\epsilon_2 = 0$.

Ed analogamente:

$$\begin{aligned} (\epsilon_3)^2 &= p_{14}^2 p_{31}^2 + p_{21}^2 p_{12}^2 + 2 p_{14} p_{31} p_{24} p_{12} = \\ &= p_{34} p_{12} (p_{14} p_{12} + p_{23} p_{12}) + (p_{34} p_{14} + p_{34} p_{23}) p_{12}^2 + 2 p_{14} p_{31} p_{24} p_{12} = \\ &= 2 p_{12} p_{14} (p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23}) - 2 p_{12} p_{14} p_{13} p_{42} - 2 p_{12} p_{14}^2 p_{23} + \\ &+ 2 p_{14} p_{31} p_{24} p_{12} + 2 p_{12}^2 p_{23} p_{34} = \\ &= 2 p_{12} p_{14} G - 2 p_{12} p_{23} (p_{14}^2 - p_{34} p_{12}) = 2 p_{12} p_{14} G - 2 p_{12} p_{23} (\epsilon_1)^2. \end{aligned}$$

Effettivamente dunque (ϵ_2) ed (ϵ_3) si annullano se sono nulli (ϵ_1) , (ϵ_4) ed (ϵ_5) , e ne segue il teorema.

V. — Osservazioni.

1. Avendo notato che la retta

$$p_{14} \neq 0, \quad p_{12} = p_{13} = p_{23} = p_{24} = p_{34} = 0$$

non appartiene al complesso (ϵ_1) , possiamo concludere che dalla coesistenza di nessun'altra terna delle (l) — diversa dalla precedente e sempre includente (ϵ_4) ed (ϵ_5) — si potrà dedurre l'annullamento delle altre due: (ϵ_2) ed (ϵ_3) sono in altri termini le sole soddisfatte, se lo sono le altre tre.

2. Si può vedere — a conferma del teorema del numero precedente — che le rette (ϵ_4) , (ϵ_5) ed (ϵ_1) sono tutte rette anche di (ϵ_2) e di (ϵ_3) .

Infatti, perchè, ad es., una retta della congruenza delle corde di Γ' appartenga ad (ϵ_1) , si deve avere:

$$p_{14}^2 - p_{34} p_{12} = (\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2)^2 - \theta^2 \theta'^2 = (\theta + \theta')^2 (\theta^2 + \theta'^2) = 0;$$

la quale condizione è verificata se

$$\theta' = -\theta, \text{ ovvero se } \theta' = \pm i\theta.$$

Le (c) dunque, assumendo in tal caso la forma:

$$\begin{array}{llll} p_{12} = 1 & , & \text{ovvero } 1 & , \\ p_{13} = 0 & , & \text{» } \theta(1 \pm i) & , \\ p_{14} = \theta^2 & , & \text{» } \pm i\theta^2 & , \\ p_{23} = -\theta^2 & , & \text{» } \pm i\theta^2 & , \\ p_{24} = 0 & , & \text{» } \pm i\theta^3(1 \pm i) & , \\ p_{34} = \theta_4 & , & \text{» } -\theta^4 & , \end{array}$$

è immediato che rappresentano rette anche di (ϵ_2) e di (ϵ_3) .

3. Si può facilmente vedere che dalla coesistenza di

$$(\epsilon_4), (\epsilon_5) \text{ e di } (\epsilon_1)$$

segue quella di

$$(\epsilon_4), (\epsilon_5) \text{ e di } R = 0;$$

dove poi il significato geometrico di (ϵ_1) , o del complesso cubico $R = 0$.

4. Il covariante del 4° ordine del Gordan, annullandosi identicamente, non dà - come abbiamo visto - cinque relazioni tra loro indipendenti.

5. Manifestamente due delle predette condizioni non bastano mai sole ad esprimere, per due cubiche binarie, le condizioni di esistenza di due radici comuni, a meno che non si tratti di casi particolari e quindi non si introduca di volta in volta qualche altra ipotesi. Rispondiamo così all'osservazione del Salmon. Ecc.

Fisica matematica. — *L'effetto Hall con elettrodi estesi.* Nota I ⁽¹⁾
di E. PERSICO e F. SCANDONE, presentata dal Socio A. GARBASSO.

1. Nel 1915 il Corbino ⁽²⁾ mostrava come per avere un effetto Hall indipendente dalla forma della lamina e dalla posizione degli elettrodi occorre che questi fossero puntiformi. In tal caso la formula che dà l'effetto è:

$$(1) \quad V = R \frac{HI}{\epsilon}$$

ove I è la corrente primaria, H il campo, ϵ lo spessore della lamina ed R il coefficiente di Hall dipendente solo dalla natura della sostanza adoperata. Nel caso che le misure dell'effetto Hall sieno fatte con elettrodi primari estesi si era osservato sperimentalmente ⁽³⁾ come esso dipenda in modo essenziale dalla forma della lamina, dall'estensione degli elettrodi primari e dalla posizione di quelli secondari. Tali variazioni dell'effetto Hall erano spiegate dal Corbino, considerando che non tutta la corrente trasversale di Hall raggiunge gli elettrodi secondari, ma parte di essa sfugge attraverso a quelli primari. Inoltre egli eseguiva delle esperienze su di una lamina rettangolare con elettrodi primari estesi a due lati opposti

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1929.

(2) O. M. CORBINO, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*. «Nuovo Cimento» (6) 9, 1915.

(3) A. ETtingshausen und W. NERNST, *Ueber das Hallsche Phänomen*, «Anz. Acad. Wiss. Wien», p. 173, 1886; E. H. HALL, *Experiments on the effect of magnetic Force on the equipotential lines of and electric current*, «Am. Journ. Sc.», (3), 36, p. 131, 1888.

del rettangolo, e misurando l'effetto Hall fra due punti che in assenza di campo erano sulla medesima linea equipotenziale. Ebbene, egli trovò che per un dato rettangolo l'effetto Hall era massimo per elettrodi secondari centrali, e diminuiva poi spostando gli elettrodi verso l'estremità della lamina, per annullarsi quando gli elettrodi secondari raggiungevano quelli primari. La dipendenza dell'effetto dallo spostamento degli elettrodi secondari dalla posizione centrale, avveniva con legge parabolica.

Infine Volterra ⁽¹⁾ dà la soluzione generale del problema dell'effetto Hall con elettrodi estesi. Data una lamina piana σ di contorno qualsiasi, (vedi fig. 1), in cui i tratti AB e CD sono occupati da elettrodi di resistenza trascurabile egli mostra come il problema di determinare l'effetto Hall si riduce

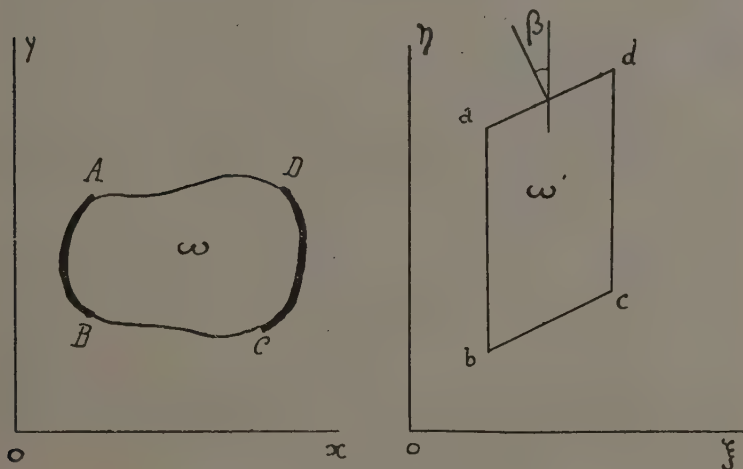


Fig. 1.

a risolvere un particolare problema di Dirichlet e cioè di trovare quella funzione armonica V che prenda sui tratti AB e CD i valori per essa assegnati e sui tratti AD e BC sia: $\frac{\partial V}{\partial l} = 0$ ove l è la direzione inclinata dell'angolo $\beta = \frac{eH}{s}$ sulla normale esterna al contorno, ove H è il campo ed s la conducibilità. Supponiamo col Volterra che tale superficie sia rappresentata nel piano complesso ω . Supponiamo ancora che si possa rappresentare conformemente l'area σ in un parallelogramma a, b, c, d , del piano complesso ω' tale che sia $\widehat{abc} = \frac{\pi}{2} - \beta$ e che i tratti di contorno

(1) V. VOLTERRA, *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico*, «Nuovo Cimento», (6), 9, 1915, cap. X, p. 62.

AB e CD corrispondano rispettivamente ad ab , cd , parallele all'asse delle y . Basterà quindi risolvere il nostro problema di Dirichlet nel parallelogramma. La soluzione evidentemente è:

$$(2) \quad V = M\xi + N$$

dove M ed N sono costanti determinate dalle condizioni al contorno.

Determinata così la funzione $V(\xi, y)$ che risolve il nostro problema nel parallelogramma, mediante la rappresentazione $\omega'(\omega)$ si passa alla funzione $V(x, y)$ che risolve il problema nella lamina data. Il problema è così risolto dal punto di vista più generale, ma non è per questo facile di applicare questo metodo a dei casi concreti. Tale problema per il caso del rettangolo in cui due lati opposti sono occupati da elettrodi primari è già stato affrontato da Koláček ⁽¹⁾ il quale è riuscito a rappresentare conformemente un rettangolo nel parallelogramma mediante l'applicazione delle formule di Schwarz e Christoffel. Ma in seguito egli s'inoltra in un lunghissimo e formoloso studio di tale rappresentazione, mediante complicati sviluppi in serie, che, come egli stesso confessa, convergono assai lentamente, sì da presentare un interesse pratico solo per valori assai piccoli di β , (metalli in cui la costante di R di Hall è assai piccola).

In questa Nota ci proponiamo appunto di studiare il caso del rettangolo in modo tale da ottenere i risultati facilmente controllabili con l'esperienza e valevoli fin per i più alti valori di β (e quindi di R) osservati.

2. Per una lamina in cui il rapporto dei lati è $\frac{b}{a}$ e in cui gli elettrodi secondari sono alla distanza x dalla posizione centrale (assumendo uguale ad 1 la distanza dalla metà del lato all'estremità di esso), potremo porre in generale l'effetto Hall sotto la forma

$$(3) \quad V = R \cdot f\left(\frac{b}{a}, x, H\right) \frac{HI}{\epsilon}.$$

Si tratta di determinare la funzione f . Applichiamo il solito metodo della rappresentazione conforme. Mediante l'applicazione delle formule di Schwarz e Christoffel si giunge ai seguenti risultati che poniamo sotto una forma leggermente diversa da quella di Koláček perchè abbiamo orientato diversamente il rettangolo ed il parallelogramma.

Posto

$$(4) \quad q = e^{-2\pi \frac{b}{a}}$$

$$k = \frac{[\vartheta_2(q, 0)]^2}{[\vartheta_3(q, 0)]^2} = 4\sqrt{q} \left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6) \dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5) \dots} \right]^4$$

(1) KOLÁČEK, *Theoretischer Beitrag zu den Messmethoden des Halleffektes*, « Ann. d. Phys. », (4), p. 1491, 1912.

ove q è la costante del Iacobi che compare nella teoria delle funzioni ellittiche, le \wp son le funzioni dell'Iacobi e k è il modulo dell'integrale ellittico di prima specie. Allora ad un punto ω del rettangolo corrisponde in un semipiano positivo z il punto:

$$(5) \quad z = sn\left(\frac{\omega}{C}, k\right) \quad \text{ove } C = \frac{a}{2K} \quad \begin{array}{l} (K \text{ è l'integrale ellittico} \\ \text{completo di 1ª specie}) \end{array}$$

e al punto z del semipiano corrisponde poi nel parallelogramma un punto dato da

$$(6) \quad \omega'(z) = C \int_0^z \frac{\left[\frac{(\zeta-1)(k\zeta+1)}{(\zeta+1)(k\zeta-1)} \right]^{\frac{\beta}{\pi}}}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} d\zeta.$$

È così individuata la funzione $\omega'(\omega)$ che rappresenta il rettangolo nel parallelogramma in modo che il contorno dell'uno corrisponde al contorno dell'altro. Non deve meravigliare che una trasformazione che conserva gli angoli possa rappresentare un rettangolo in un parallelogramma, poichè appunto ai vertici la funzione che ci dà la rappresentazione conforme non è olomorfa, ma presenta una singolarità essenziale.

A causa della ploidromia della potenza $\frac{\beta}{\pi}$ che compare nella (6) occorre determinare il valore assunto dall'integrale nei vari tratti dell'asse reale delle z in modo che attraversando i punti singolari $1, \frac{1}{k}, -1, -\frac{1}{k}$ mediante dei semicerchi di raggio infinitamente piccolo, i valori della funzione si riattaccino gli uni agli altri con continuità. Esaminando la cosa particolarmente si trovano per la funzione nel tratto $1 < z < \frac{1}{k}$ il valore

$$(7) \quad \omega'(z) = \int_0^1 \frac{\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}}}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} d\zeta + e^{-i\beta + i\frac{\pi}{2}} \int_1^z \frac{\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}}}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} d\zeta$$

e nel tratto $\frac{1}{k} < z < \infty$

$$(8) \quad \omega'(z) = \int_0^1 \frac{\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}}}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} d\zeta + e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}}}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} d\zeta + \\ + e^{i\pi} \int_{\frac{1}{k}}^z \frac{\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta}\right)^{\frac{\beta}{\pi}}}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} d\zeta$$

da cui ponendo $\xi = -\frac{1}{kz}$ si verifica facilmente che

$$(9) \quad \int_0^1 = e^{i\pi} \int_{\infty}^{-\frac{1}{k}} = \int_{-\frac{1}{k}}^{\infty}$$

relazione che ci servirà in seguito. Sviluppiamo ora la funzione integranda della (6) in serie di logaritmi. Essendo lo sviluppo convergente uniformemente in tutto il piano z possiamo invertire il segno di sommatoria con quello di integrale. Scriveremo perciò:

$$\frac{\omega'}{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^n}{n!} \int_0^1 \frac{\log^n \frac{(z-1)(kz+1)}{(z+1)(kz-1)}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} dz.$$

I massimi valori di β osservati sperimentalmente sono inferiori a $\frac{1}{18}$ quindi possiamo benissimo fermarci a studiare gli effetti del primo ordine e prendere soltanto $n=0; 1$:

$$\frac{\omega'}{C} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{\beta}{\pi} \int_0^1 \frac{\log \frac{(z-1)(kz+1)}{(z+1)(kz-1)}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} dz.$$

Osservando che il primo integrale a secondo membro è $\frac{\omega}{C}$ e ponendo

$$(10) \quad \Phi(z, k) = \int_0^1 \frac{\log \frac{(z-1)(kz+1)}{(z+1)(kz-1)}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} dz$$

ossia

$$(11) \quad \omega'(z) - \omega(z) = C \frac{\beta}{\pi} \Phi(z).$$

Il logaritmo che compare nella funzione integranda della (10) è nei vari tratti sempre determinato poichè abbiamo già precedentemente ridotto l'argomento ad essere sempre positivo.

La (11) ci dice che la $\Phi(z)$ ci rappresenta a meno del fattore $C \frac{\beta}{\pi}$ costante, la differenza fra le due funzioni ω' e ω relative ad un medesimo punto z del semipiano positivo, ossia tra due punti corrispondenti nella nostra rappresentazione conforme, dandocene lo spostamento in grandezza e direzione.

Se facciamo nella (10) la sostituzione $z = -\xi$ si vede che

$$(12) \quad \Phi(z) = \Phi(-z).$$

Da questa proprietà deriva subito che

$$a' = \omega'(1) - \omega'(-1) = \omega(1) - \omega(-1) = a$$

ossia nella nostra rappresentazione la lunghezza della base rimane invariata. La base del parallelogramma uguale a quella del rettangolo rimane però, rispetto a questa, spostata della quantità $c(k) = C \frac{\beta}{\pi} \Phi(1, k)$. Dimostriamo ora che anche l'altezza del rettangolo è uguale a quella del parallelogramma. Infatti calcoliamoci il lato obliquo del parallelogramma:

$$b' = \omega'\left(\frac{1}{k}\right) - \omega'(1) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \left[\omega\left(\frac{1}{k}\right) - \omega(1) \right] + C \frac{\beta}{\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \left[\Phi\left(\frac{1}{k}\right) - \Phi(1) \right]$$

essendo β molto piccolo

$$b' = b\beta + ib + C \frac{\beta}{\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \left[\Phi\left(\frac{1}{k}\right) - \Phi(1) \right]$$

con la sostituzione $\xi = \frac{1}{kz}$ si dimostra che:

$$\int_1^{\frac{1}{k}} = - \int_1^{\frac{1}{k}} \quad \text{ossia} \quad \int_1^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Dunque

$$b' = \omega'\left(\frac{1}{k}\right) - \omega'(1) = b\beta + ib$$

ossia l'altezza del parallelogramma è sempre b . Inoltre la proiezione del lato obliquo sulla base è $b\beta$. (Il fatto che venga $b\beta$, invece di $b \tan \beta$ dipende dall'essersi fermati ad effetti del primo ordine in cui per la piccolezza di β si confondono β e $\tan \beta$).

Inoltre tenendo conto della (9) e della (12)

$$\omega'(1) = \omega'(\infty) - \omega'\left(-\frac{1}{k}\right) = \frac{a}{2} + C \frac{\beta}{\pi} \left[\Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{1}{k}\right) \right]$$

ossia
$$\frac{a}{2} + c = \frac{a}{2} + C \frac{\beta}{\pi} \left[\Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{1}{k}\right) \right]$$

ossia
$$C \frac{\beta}{\pi} \Phi(\infty) = 2c + b\beta$$

cioè il punto $\omega'(\infty)$ dista di $b\beta + 2$ dall'asse immaginario. In tal modo la nostra rappresentazione conforme rimane chiarita in tutti i suoi partico-

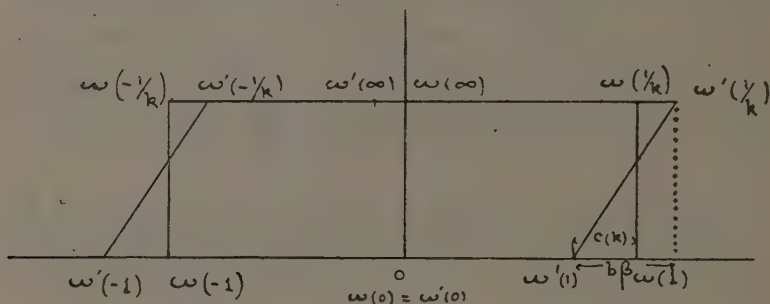


Fig. 2.

lari: la fig. 2 mostra la posizione relativa del rettangolo e del parallelogramma. Nella prossima Nota, potremo risolvere facilmente il problema di determinare l'effetto Hall nella nostra lamina.

Astronomia. — *R Scuti.* Nota ⁽¹⁾ di M. MEROLA, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Riassunto. — 85 osservazioni fotometriche eseguite a Capodimonte dal 10 agosto 1927 al 6 dicembre 1928 permettono di ricavare 2 massimi e 4 minimi e confermano le irregolarità del periodo e della curva di luce, in accordo con le osservazioni di Jacchia, Spears, Peltier, Carr, Ford e colle precedenti discussioni di Sawyer e di Campbell.

Scoperta nel 1795 questa variabile è stata oggetto di molti ed accurati studi. Il Pigott (1795) comincia con l'assegnare un periodo di 63^d che corregge più tardi in 61^d.5, il Westphal elaborando otto anni di osservazioni del precedente autore (1795-1803), dà come periodo 68^d.8 e succes-

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1929.

sivamente $60^d.56$, i minimi precedendo i massimi di 19^d . Argelander dalle osservazioni proprie e da quelle di altri osservatori, fino al 1862, trova un periodo medio di 71^d e mette per la prima volta in evidenza le irregolarità del periodo e la differente luminosità della stella nei successivi massimi e nei successivi minimi. Lo Schmidt sulla base di 34 anni di osservazioni (1845-1879) è d'opinione che vi sia un periodo principale di 140^d diviso in due da un minimo secondario, il Sawyer (1885-86) trova oscillazioni nel periodo da 44^d a 74^d . Più recentemente il Campbell esprime la veduta che le variazioni di luce sono irregolari e che pertanto riesce impossibile qualunque previsione ⁽¹⁾.

Le nostre osservazioni insieme con quelle di altri autori confermano, pel biennio 1927-28, sostanzialmente le vedute di Sawyer e di Campbell.

Qui in seguito è il riassunto delle nostre osservazioni.

Variabile ⁽²⁾.

$\alpha = 18^h 39^m 44^s$ $\delta = -5^\circ 51'.4$ (1855), amplit. $4^m.5-9^m.0$

Spettro G_{3P} Irregolare.

Stelle di confronto ⁽³⁾.

Posizione approssimativa al 1900				Spettro	Gr.	Gr. Nap.
BD — $6^\circ.4913$	$\alpha = 18^h 43^m.3$	$\delta = -6^\circ.7'$		A_2	6.53	6.56
» — 4.4582	41.9	-4.51		G_0	4.47	4.40
» — 6.4922	44.3	-6.1		A_0	6.22	6.22
» — 6.4897	41.8	-6.0		A_0	7.08	7.06

Le grandezze dell'ultima colonna s'intendono riferite alla stella 4922 BD.

(1) G. MÜLLER u. E. HARTWIG, *Geschichte und Literatur des Lichtwechsels*. II Band. Leipzig, 1920.

(2) R. PRAGER, *Katalog und ephemeriden veränderlicher Sterne für 1927*. Berlin, 1926.

(3) « Annals of Harvard College Observatory of the Henry Draper Catalogue ». Vol. 97. Cambridge, 1922.

Osservazioni.

1927 agosto 10-novem. 17		1928 giugno, 5-luglio 26		1928 luglio 28-settem. 30		1928 ottobre 2-dicembre 6	
J. D. T. M. G.	Gr.	J. D. T. M. G.	Gr.	J. D. T. M. G.	Gr.	J. D. T. M. G.	Gr.
2425103.4	5.65	2425403.4	4.91	2425456.4	5.15	2425522.4	5.44
105.3	5.27	404.4	5.02	458.4	5.10	525.3	5.22
109.3	5.31	406.5	5.02	460.4	5.20	528.3	5.08
115.3	5.51	409.4	4.95	463.4	5.15	531.2	5.00
118.3	5.48	411.3	5.09	466.4	4.81	535.3	5.58
122.4	5.18	413.4	4.98	469.3	5.41	538.2	5.36
126.3	5.52	416.4	4.89	472.3	5.16	540.2	5.40
134.3	5.73	418.4	5.42	473.4	4.69	546.2	5.53
137.3	5.97	421.4	5.55	475.4	5.26	548.2	5.84
141.3	6.04	424.4	5.53	477.4	4.95	555.2	5.84
146.3	6.62	428.4	5.89	481.4	5.53	557.2	5.88
161.3	8.39	431.4	6.21	483.3	5.37	564.2	6.43
165.3	8.62	434.4	6.72	485.4	5.39	566.2	5.97
166.3	8.36	438.4	6.92	487.4	5.43	570.2	6.61
168.3	8.12	442.4	7.26	489.4	5.43	572.2	6.11
174.3	7.00	444.4	7.23	491.4	6.20	576.2	6.00
179.2	6.50	446.4	6.46	498.3	6.01	580.2	6.11
181.3	5.85	448.4	6.36	501.4	6.27	582.2	6.13
183.3	5.48	450.0	5.97	502.4	6.05	587.2	5.86
185.3	5.35	451.3	5.87	510.4	5.77	—	—
188.2	5.29	452.4	5.89	515.3	5.34	—	—
202.2	5.38	454.4	5.39	520.3	5.10	—	—

Colore stimato = GR della scala colorimetrica di Potsdam. Seguono le curve di luce ottenute col consueto metodo di perequazione.

Dalle curve risultano i seguenti massimi e minimi (sempre contando l'inizio del giorno a 12^h civili di Greenwich).

Massimi.

1928 agosto 10.1 = 2425469.1 J. D. T. M. G. 5^m.20

» ottobre 4.2 = 524.2 » » 5.12

Minimi.

1927 ottobre	10.7 =	2425164.7	J. D. T. M. G.	8 ^m .48
1928 luglio	13.0 =	441.0	»	7 .15
» settembre	9.2 =	499.2	»	6 .17
» novembre	16.9 =	567.9	»	6 .30

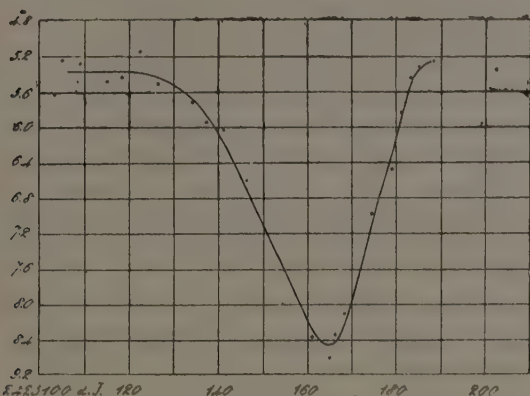


Fig. 1.

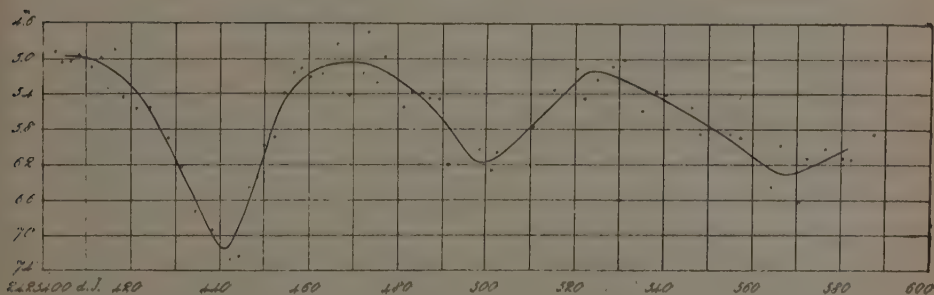


Fig. 2.

I massimi hanno sensibilmente uguale luminosità, i minimi mostrano invece più spiccate differenze; notevole l'escursione della luminosità nel minimo 2425164.7 d. J. ove la grandezza della stella varia da 5^m.4 ad 8^m.5. I minimi 2425164.7 d. J. e 2425441.0 d. J. sono abbastanza pronunziati, mentre i due seguenti lo sono assai meno, molto largo è il massimo a 2425469.1 d. J. Inoltre il gradiente diurno del ramo discendente è minore di quello corrispondente al ramo ascendente e tanto più quanto più profondo è il minimo. Risulta infatti:

Minimo	Gradiente ramo discendente	Gradiente ramo ascendente	Luminosità
2425164.7 d. J.	0 ^m .10	0 ^m .18	8 ^m .48
441.0 »	0 .10	0 .14	7 .15
499.2 »	0 .05	0 .05	6 .17

La differenza delle epoche del terzo e del secondo minimo e quella che intercede fra le epoche del quarto e terzo minimo è 58^d.2 e 68^d.7 rispettivamente, mentre l'analoga differenza per i due massimi è 55^d.1. Ciò induce il sospetto di un periodo irregolare e, allo scopo di possedere una nozione più sicura intorno a tale presunta irregolarità e di vedere se e fino a qual punto sono confermate le vedute del Sawyer e del Campbell, abbiamo utilizzato le osservazioni dei seguenti autori: Spears, Carr, Peltier, Ford e Jacchia. Per i primi quattro ci riferiamo alle osservazioni contenute nel vol. XXXVI (1928) della « Popular Astronomy » (a Review of Astronomy and allied Sciences), per l'ultimo si deve tener presente la curva di luce riportata nel « Calendario del R. Osservatorio Astronomico di Napoli per l'anno 1929 ».

Con metodo grafico abbiamo ricavato i massimi e minimi che elenchiamo nel quadro seguente insieme ad altre indicazioni.

Massimi.

Osservatore	Epoca	Grandezza	Epoca media	Grandezza media	Differenza epoche	Annotazioni
	J. D. T. M. G.		J. D. T. M. G.			
Jacchia	2424781	5.2	2424781	5.2	61	Le epoche della seconda colonna sono approssimate al giorno
Id.	842	5.2	842	5.2	78	
Id.	920	5.0	920	5.0	61	
Id.	981	5.4	981	5.4	78	
Id.	2425059	5.5	2425059	5.5	57	
Id.	116	5.3	116	5.3	76.5	
Id.	190	5.5				
Spears	195	5.3	192.5	5.4		
Jacchia	246	5.1			60.5	differenza incerta
Spears	256	5.2	253	5.2		
Peltier	256	5.2			95	differenza incerta
Spears	346	5.3	348	5.15		
Peltier	350	5.2			58	
Spears	402	5.2	406	5.2		
Peltier	410	5.2			60	
Id.	463	5.1	466	5.15		
Merola	469	5.2			57	
Peltier	522	5.0	523	5.05		
Merola	524	5.1				

Minimi.

Osservatore	Epoca J. D. T. M. G.	Grande- zza	Epoca media J. D. T. M. G.	Grande- zza media	Diffe- renza epoche	Annotazioni
Jacchia	2424743	7.2	2424743	7.2	67	Le epoche della seconda colonna sono approssimate al giorno
Id.	810	5.8	810	5.8	69	
Id.	879	6.2	879	6.2	74	
Id.	953	5.7	953	5.7	69	
Id.	2425022	6.1	2425022	6.1	71	
Id.	093	6.4	093	6.4		
Id.	163	8.3				
Spears	162	8.4			70	
Carr	162	8.0				
Peltier	164	8.1	163	8.2		
Ford	162	7.8			53	
Merola	165	8.5				
Jacchia	215	5.8	216	5.8		
Spears	217	5.8			87	
Id.	303	5.8				
Peltier	301	5.9	303	5.9		
Jacchia	305	6.0			83	
Peltier	386	5.9	386	5.9		
Id.	442	7.0			55	
Ford	441	6.0	441	6.7		
Merola	441	7.2			56	
Peltier	495	6.1	497	6.15		
Merola	499	6.2			71	
Id.	568	6.3	568	6.3		

Dalla successione dei valori contenuti nella penultima colonna (differenze delle epoche di due massimi o di due minimi consecutivi) risulta che il periodo per i massimi varia tra 57^d e 78^d (trascurando i valori delle differenze indicati come incerti) e per i minimi tra 53^d e 87^d . L'ampiezza media delle variazioni del periodo è di 32^d in buon accordo con i 30^d trovati dal Sawyer. Poichè la legge di variazione non si lascia precisare risulta impossibile ogni previsione, come già ha sostenuto il Campbell.

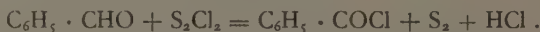
Sono infine confermate le variazioni di luminosità nei massimi e nei minimi: per i primi da $5^m.05$ a $5^m.5$, per i secondi tra $5^m.7$ e $8^m.2$.

Chimica. — *Isoterme di viscosità di miscele binarie.* — IV. *Sistema: aldeide benzoica-monocloruro di zolfo* ⁽¹⁾. Nota di F. DE CARLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Una delle proprietà caratteristiche delle aldeidi è quella di formare composti di addizione con prodotti di varia natura. Facendo astrazione da quelli più comuni (cianidrine, ammonaldeidi, composti bisolfidici, ecc.), ricorderò solo che se ne conoscono molti formati con acidi e con sali. Nel caso dell'aldeide benzoica, per esempio, sono stati isolati prodotti di addizione con acido bromidrico, cloruro e bromuro di stagno, cloruro e bromuro di antimonio, ioduro di magnesio ⁽³⁾.

Proseguendo le mie ricerche sulle soluzioni di sostanze diverse in monocloruro di zolfo, ho voluto perciò studiare anche il comportamento delle miscele di aldeide benzoica col monocloruro.

È stato già osservato ⁽⁴⁾ che a 150° in tubo chiuso si verifica la seguente reazione:



A temperatura ordinaria i due liquidi si mescolano in tutte le proporzioni senza dar luogo a reazione. Essi formano soluzioni perfettamente limpide, colorate in giallo, che presentano la caratteristica di sopraraffreddarsi in maniera molto spiccata.

Non è stato infatti possibile applicare l'analisi termica allo studio di questo sistema, perchè quasi tutte le miscele si rapprendevano al raffreddamento in masse vischiose nelle quali la velocità di cristallizzazione non aveva valori praticamente apprezzabili, ed in molti casi si ottenevano in definitiva prodotti vetrosi.

Ho pensato allora di ricorrere a misure di viscosità. Altre volte infatti, in casi analoghi, è stato possibile stabilire a questo modo la formazione di complessi, che per la loro piccolissima attitudine a cristallizzare non potevano venire rivelati con l'analisi termica ⁽⁵⁾.

Mi sono servito di aldeide benzoica di Kahlbaum ridistillata in ambiente di antride carbonica, e di monocloruro di zolfo preparato in laboratorio e distillato tre volte.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 giugno 1929.

(3) P. PFEIFFER, *Organische Molekülverbindungen*, p. 70.

(4) F. LOTH, « Ber. », 27, 2548 (1894).

(5) MAZZETTI, « Gazz. Chim. Ital. », LVI, 606, 1926.

Ho misurato la viscosità a quattro temperature: 20°, 13°, 2, 9° e 3°. Nella tabella e nel diagramma riporto i risultati di queste misure:

TABELLA I.

$\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO}$ %	d_{20°	20°		13°2		9°		3°	
		trov.	calcol.	trov.	calcol.	trov.	calcol.	trov.	calcol.
0	1.6798	0.01118	—	0.01161	—	0.01279	—	0.01389	—
20	1.5095	0.01220	0.01218	0.01301	0.01292	0.01398	0.01374	0.01705	0.01659
30	1.4419	0.01266	0.01267	0.01367	0.01355	0.01470	0.01449	0.01826	0.01734
40	1.3626	0.01338	0.01316	0.01462	0.01420	0.01562	0.01517	0.01900	0.01808
50	1.3014	0.01383	0.01364	0.01532	0.01485	0.01624	0.01583	0.01986	0.01882
60	1.2411	0.01417	0.01412	0.01601	0.01550	0.01710	0.01649	0.02073	0.01955
70	1.1911	0.01465	0.01459	0.01654	0.01614	0.01767	0.01715	0.02138	0.02028
80	1.1426	0.01487	0.01497	0.01681	0.01678	0.01818	0.01779	0.02204	0.02099
100	1.0504	0.01595	—	0.01804	—	0.01906	—	0.02339	—

~~TEMPERATURE~~ $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO}$ - C_2Cl_2

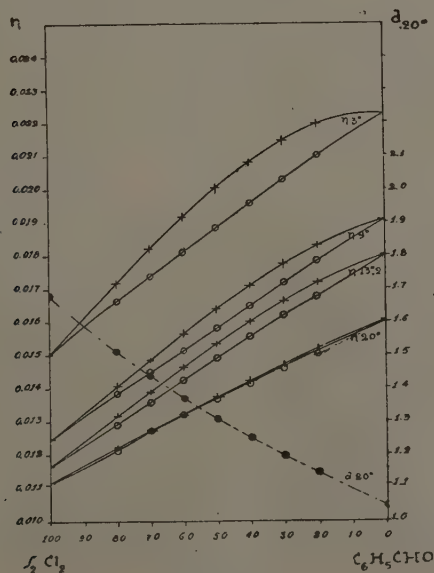


Fig. 1.

Da quanto precede risulta che queste soluzioni sono caratterizzate da un massimo di viscosità, che va gradualmente scomparendo con il salire della temperatura; tale comportamento depone a favore della formazione di un complesso stabile in soluzione a temperature inferiori a 20° C.

Per verificare se facendo uso di questi dati, è possibile risalire, anche in modo approssimativo, alla formula del composto in questione, ho creduto opportuno verificare a quali concentrazioni corrispondono le maggiori differenze percentuali tra viscosità misurata e calcolata.

Riporto qui sotto i risultati dei calcoli:

TABELLA II.

C ₆ H ₅ CHO %	Differenza %			
	20°	13°,2	9°	3°
20	0.14	0.70	1.31	2.77
30	0.15	0.88	1.45	5.00
40	0.16	2.95	3.00	5.30
50	1.30	3.00	3.20	5.52
60	0.35	3.29	3.70	6.05
70	0.41	2.47	3.03	5.42
80	0.35	1.78	2.20	5.00

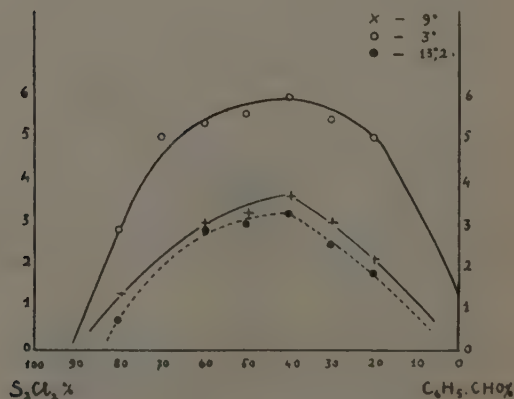


Fig. 2.

Dal diagramma appare evidente che la massima divergenza si verifica nelle miscele contenenti 60 % di aldeide benzoica, e questo potrebbe far supporre che al complesso formatosi in soluzione si possa attribuire la formula $2\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO} \cdot \text{S}_2\text{Cl}_2$ (61.10 % di aldeide benzoica). Per quanto però si è visto nella nota precedente non si può dire fino a che punto sia legittimo attribuire questa formula al complesso che esiste nelle miscele.

Chimica-fisica. — *Sull'importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide.* - VI. *Analisi termica e röntgenografica dei sistemi* $\text{CaCl}_2 - \text{CoCl}_2$, $\text{CaCl}_2 - \text{FeCl}_2$, $\text{CaCl}_2 - \text{MnCl}_2$ *e* $\text{CaCl}_2 - \text{CdCl}_2$ *anidri*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. FERRARI e A. INGANNI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Nelle Note III, IV e V⁽³⁾ del presente studio abbiamo esaminato i sistemi $\text{MnCl}_2 - \text{CoCl}_2$, $\text{CdCl}_2 - \text{CoCl}_2$, $\text{MgCl}_2 - \text{CoCl}_2$, $\text{MgCl}_2 - \text{FeCl}_2$, $\text{CdCl}_2 - \text{FeCl}_2$, $\text{CoCl}_2 - \text{FeCl}_2$ e $\text{MnCl}_2 - \text{FeCl}_2$ che fanno parte delle quindici coppie ottenute combinando due a due i cloruri romboedrici dei metalli bivalenti (NiCl_2 , CoCl_2 , MgCl_2 , FeCl_2 , MnCl_2 , CdCl_2).

Tutte queste coppie di cloruri presentano una miscibilità completa allo stato solido con inizi di cristallizzazione delle miscele intermedi ai punti di fusione dei componenti puri. Lo stesso comportamento era stato riscontrato in precedenza da altri autori per i sistemi $\text{MgCl}_2 - \text{MnCl}_2$, $\text{MnCl}_2 - \text{CdCl}_2$ e $\text{MgCl}_2 - \text{CdCl}_2$ per cui finora dieci delle quindici coppie sopradette risultano studiate e tutte confermano la completa miscibilità che si prevedeva in relazione alla struttura cristallina simile dei sei cloruri che intervengono in esse.

Abbiamo tentato anche lo studio dei cinque sistemi rimanenti, che sono quelli col cloruro di nichelio, senza poterlo condurre a compimento anche solo parziale, perchè questo cloruro non fonde. Colla fusione prolungata delle miscele contenenti cloruro di nichelio anidro solo una piccola porzione di esso si scioglie nell'altro. Tale difficoltà di incorporamento dei due cloruri potrebbe forse essere superata disidratando assieme le miscele dei due cloruri idrati in modo che dapprima fondano assieme nella loro acqua di cristallizzazione. Questo se potrà permettere di ottenere miscele fuse più ricche di cloruro di nichelio non elimina però ancora la difficoltà derivante dal fatto da noi osservato, che fin dalla prima miscela con piccola por-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e di Chimica-fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1929.

(3) Questi « Rendiconti », (6^a), VIII, 1928, pp. 238-243 e 306-308; IX, 1929, pagine 782-789.

zione di cloruro di nichelio (5%) si hanno intervalli di cristallizzazione grandi che saranno certamente assai maggiori verso la parte centrale del sistema. Questi grandi intervalli rendono il tratto della curva di raffreddamento corrispondente alla solidificazione molto inclinato e quindi difficilmente identificabile.

I pochi elementi raccolti finora rendono però molto verosimile che anche questi sistemi presentino una miscibilità completa. Infatti piccole quantità di cloruro di nichelio innalzano subito la temperatura di fusione dei cloruri di cobalto, magnesio, ferro, manganese e cadmio come deve verificarsi qualora questi sistemi col cloruro di nichelio si comportino come quelli di questa serie già studiati.

Nella Nota attuale prendiamo in esame i sistemi formati dal cloruro di calcio con i cloruri romboedrici escluso per le dette ragioni quello col cloruro di nichelio. Questi sistemi sono:

- 1) $\text{CaCl}_2 - \text{MgCl}_2$ 2) $\text{CaCl}_2 - \text{CoCl}_2$ 3) $\text{CaCl}_2 - \text{FeCl}_2$
 4) $\text{CaCl}_2 - \text{MnCl}_2$ 5) $\text{CaCl}_2 - \text{CdCl}_2$.

Sarebbe stato di grande utilità per l'esame del problema postoci, relazione fra solubilità allo stato solido e forma cristallina, conoscere la struttura del cloruro di calcio anidro ma ciò non è stato fino ad ora possibile⁽¹⁾.

Dei cinque sistemi sopra ricordati erano già stati studiati precedentemente quelli coi cloruri di magnesio, manganese e cadmio.

Il sistema $\text{CaCl}_2 - \text{MgCl}_2$ è stato studiato da O. Menge⁽²⁾ e presenta secondo questo autore un eutectico alla temperatura di 621° e della composizione 3,91 $\text{CaCl}_2 - 6,09 \text{MgCl}_2$.

I sistemi $\text{CaCl}_2 - \text{CoCl}_2$ e $\text{CaCl}_2 - \text{FeCl}_2$ non erano stati invece fino ad ora studiati; abbiamo applicato al loro esame i metodi termico e röntgenografico.

I risultati dell'analisi termica sono raccolti nella tabella I e rappresentati graficamente nella fig. 1 e 3.

(1) Vecchie osservazioni (GROTH, *Chem. Kristall.*, 1906, I, p. 208) accennano ad una forma cubica del cloruro di calcio che si troverebbe allo stato naturale fra i prodotti emessi dal Vesuvio. Per quanto una struttura del tipo « fluorite » potesse sembrare probabile essendo presentata dal cloruro di stronzio, l'esame röntgenografico l'ha esclusa come afferma V. M. GOLDSCHMIDT (*Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*, VI, « Vid. Akad. Skr. M. N. Kl. », 1926, n. 1 p. 13) e come hanno confermato anche dei fotogrammi di Debye di questo cloruro da noi eseguiti. Questi fotogrammi presentano molte linee deboli che escludono una struttura cubica e farebbero piuttosto pensare ad una struttura tipo MgCl_2 che è presentata dal cloruro di cadmio col quale sarebbe verosimile esistesse un isomorfismo. Un ordinamento del fotogramma secondo questa struttura non ci è ancora riuscito, inoltre contro questa supposizione stanno molti fatti sperimentali.

(2) « Zeitschr. anorg. Chem. », 72, 1911, p. 162.

TABELLA I.

Sistema $\text{CaCl}_2 - \text{CoCl}_2$				Sistema $\text{CaCl}_2 - \text{FeCl}_2$			
Molecole % di CoCl_2	Tempera- tura della cristalliz- zazione primaria	Tempera- tura della cristalliz- zazione eutectica	Durata arresto eutectico in secondi	Molecole % di FeCl_2	Tempera- tura della cristalliz- zazione primaria	Tempera- tura della cristalliz- zazione eutectica	Durata arresto eutectico in secondi
0.0	782°	—	—	0.0	782°	—	—
9.5	744	—	—	10	758	562°	75
19.3	709	611°	270	19.5	734	588	180
25.4	690	612	300	30.0	696	590	300
40.6	629	616	615	39.9	658	594	375
45.7	614	614	930	50.0	617	594	660
51.0	621	614	795	55.5	592	592	915
59.6	642	—	—	60.0	600	592	810
65.0	651	614	480	66.6	617	—	—
69.1	658	—	—	69.2	624	—	—
75.0	674	613	195	75.0	637	593	210
80.8	684	—	—	80.0	650	—	—
85.0	693	613	105	85.01	660	593	75
88.2	700	—	—	90.0	667	—	—
100.0	722	—	—	100.0	674	—	—

Vediamo così che i due sistemi danno un eutectico alle rispettive temperature di 614° e di 592° colle percentuali molecolari di 54.3 e 44.5 di CaCl_2 (1).

Dalla tabella si rileva che delle miscele di composizione compresa tra quella eutectica e il cloruro di cobalto o il cloruro ferroso non ci dettero l'arresto eutectico. Si è riconosciuto trattarsi di un fenomeno di soprafusione perchè coll'aggiunta di un granello di cloruro di calcio alla miscela fluida

(1) In generale si osserva per la composizione dell'eutectico la seguente caratteristica: la miscela eutectica è tanto più ricca del componente che fonde più basso quanto maggiore è la differenza fra i punti di fusione dei componenti il sistema. È una conseguenza di ciò il fatto che quando questi punti sono molto lontani fra loro, l'eutectico del sistema coincide col componente puro basso fondente. Esempi di questo comportamento sono assai frequenti. Fra i metalli citiamo le coppie: Ag — Bi, Ag — Na, Ag — Pb, Ag — Tl, Al — Be, Al — Sn, Bi — Hg, Bi — Cu, Hg — Sn, Hg — Zn. Tra i sali, molti sistemi con i cloruri di zinco e di stagno di cui diremo meglio in un'altra Nota.

quando la temperatura era giunta al disotto del punto di fusione di questo abbiamo ottenuti gli arresti eutectici che prima mancavano.

L'esame röntgenografico di questi sistemi ha confermato l'eutectico perchè ci ha mostrato sempre la presenza del reticolo del cloruro di cobalto o del cloruro ferroso non deformato, non si rilevano invece le linee corrispondenti al cloruro di calcio, anzi le miscele più ricche di quest'ultimo non danno praticamente linee.

Il sistema $\text{CaCl}_2 - \text{MnCl}_2$ era stato studiato da C. Sandomini⁽¹⁾ che aveva trovato una miscibilità in ogni proporzione con un minimo di temperatura di solidificazione delle miscele, e individuata pure una decomposizione dei cristalli misti dopo la deposizione. Essendo di grande importanza essere sicuri che questo sistema si comportasse in modo diverso dai tre precedenti noi abbiamo ripetuto lo studio termico aggiungendovi l'esame röntgenografico.

I risultati ottenuti sono raccolti nella tabella II e rappresentati dalla curva della fig. 2 di confronto con quelli ottenuti da Sandomini.

TABELLA II.

Sistema $\text{CaCl}_2 - \text{MnCl}_2$			Sistema $\text{CaCl}_2 - \text{CdCl}_2$		
Molecole % di MnCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Decomposi- zione dei cristalli misti	Molecole % di CdCl_2	Inizio della cristal- lizzazione	Decomposi- zione dei cristalli misti
0.0	782°	—	0.0	782°	—
10	739	—	10.0	735	—
19.3	710	—	20.2	704	—
30.0	674	—	30.0	681	—
42.3	635	—	39.1	652	—
50.0	619	—	50.0	617	414°
60.0	596	475°	55.0	605	415
65.4	590	474	59.92	592	412
70.0	592	475	65.0	578	414
80.6	608	473	70.0	566	413
90.0	627	—	79.9	548	414
100.0	650	—	85.0	537	413
—	—	—	90.0	545	414
—	—	—	95.51	554	412
—	—	—	100.0	564	—

(1) « Gazz. Chim. Ital. », XLIV, 1°, 1914, p. 341.

Come si vede chiaramente dai due diagrammi della fig. 2 i nostri risultati concordano pienamente con quelli di Sandonnini.

Le miscele più ricche di cloruro di manganese hanno potuto essere fotografate ed hanno dato tutte il reticolo del cloruro di manganese, quelle ricche di cloruro di calcio come nei precedenti sistemi non danno fotogrammi misurabili. Comunque l'esame röntgenografico conferma che i cristalli misti sono decomposti nei due componenti di cui riusciamo a riconoscerne uno solo: il cloruro di manganese.

Il sistema $\text{CaCl}_2 - \text{CdCl}_2$ è stato studiato da O. Menge ⁽¹⁾ e da C. Sandonnini ⁽²⁾; entrambi gli autori concludono per una miscibilità in ogni proporzione, malgrado i diagrammi dati dai due autori differiscano notevolmente come è mostrato dalla fig. 4.

Per la ragione detta a proposito del sistema $\text{CaCl}_2 - \text{MnCl}_2$ e per questo notevole divario fra i due sperimentatori abbiamo ritenuto utile ristudiare il sistema col metodo termico aggiungendovi l'esame röntgenografico. Il risultato di questo studio è riassunto nella tabella II e rappresentato graficamente di confronto a quella dei due precedenti autori nella fig. 4. Il nostro diagramma praticamente coincide con quello di C. Sandonnini.

Questo autore non ha riscontrato però la decomposizione dei cristalli misti che avviene alla temperatura di 414° e che noi abbiamo potuto dimostrare nettamente già nelle prime miscele contenenti piccole quantità di cloruro di calcio anche coll'esame röntgenografico che ci diede sempre il reticolo del cloruro di cadmio.

Tutte le miscele sono state analizzate dopo la fusione. I cloruri di cobalto, ferro e manganese usati erano gli stessi che già servirono alle ricerche riferite nella Nota V dove sono pure date le analisi.

Per quelli di cadmio e di calcio le analisi dettero i seguenti valori:

		trovato	teorico		trovato	teorico
CaCl_2	Ca	36.107 %	36.101 %	Cl	36.903 %	63.900 %
CdCl_2	Cd	61.14 %	61.31 %	Cl	38.87 %	38.69 %

Riassumendo: I cloruri cobaltoso e ferroso danno un eutectico col cloruro di calcio alle rispettive temperature di 614° e 592° colle proporzioni molecolari 54.3 % e 44.5 % di cloruro di calcio. Analogo comportamento, come ha dimostrato O. Menge, presenta il cloruro di calcio rispetto a quello di magnesio.

I cloruri di manganese e di cadmio danno cristalli misti in ogni proporzione col cloruro di calcio. Questi cristalli misti, anche con piccola proporzione di uno dei componenti come si osserva coll'esame röntgeno-

(1) Loc. cit.

(2) « Gazz. Chim. Ital. », XLIV, 1°, 1914, 338.

grafico, si decompongono nei loro costituenti alle temperature di 475° e 414° circa. Riguardo al sistema $\text{CaCl}_2 - \text{MnCl}_2$ le nostre osservazioni confermano perfettamente quanto aveva già trovato C. Sandonnini. Per il sistema $\text{CaCl}_2 - \text{CdCl}_2$ studiato da Sandonnini, e da O. Menge le nostre osservazioni si accordano assai di più con quelle del primo autore. Entrambi i precedenti sperimentatori non hanno però riscontrata la decomposizione dei cristalli misti, che appare sicura dalle nostre osservazioni.

Il comportamento di questi sistemi fa ritenere che la struttura del cloruro di calcio sia diversa da quella dei cloruri romboedrici di cobalto, ferro, magnesio, manganese e cadmio, perchè non si riscontra in nessuno di questi sistemi una miscibilità completa, priva di massimi e minimi nella temperatura di solidificazione delle miscele, che sembra si possa considerare come caratteristica delle miscele isomorfe.

I diametri degli ioni metallici spiegano perfettamente il comportamento di questi sistemi. Assumendo i valori di V. M. Goldschmidt i raggi di questi ioni sono: $\text{Co}^{++} = 0.82 \text{ \AA}$, $\text{Mg}^{++} = 0.78 \text{ \AA}$, $\text{Fe}^{++} = 0.83 \text{ \AA}$, $\text{Mn}^{++} = 0.91 \text{ \AA}$, $\text{Cd}^{++} = 1.03 \text{ \AA}$, $\text{Ca}^{++} = 1.06 \text{ \AA}$.

Il cloruro di calcio non si scioglie allo stato solido in nessuna proporzione nei cloruri di cobalto, magnesio e ferro, la grandezza dei cui ioni metallici è assai diversa da quella dell'ione calcio; mentre dà cristalli misti, instabili però a temperatura ordinaria, coi cloruri di manganese e cadmio i cui ioni metallici sono assai più vicini come grandezza all'ione Ca^{++} .

Chimica analitica. — *Sulla ricerca spettrografica del bismuto nelle ceneri degli organismi animali* ⁽¹⁾ Nota ⁽²⁾ di G. PICCARDI presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

La ricerca spettrografica, sia qualitativa che quantitativa, del bismuto presenta notevoli difficoltà quando la si debba eseguire su piccolissime quantità di sostanza.

Essendomi stato proposto di eseguire una ricerca su ceneri di certi organi di animali curati di bismuto, ho realizzato un artificio, suggeritomi dalla pratica quotidiana degli spettri di scintilla, che mi ha permesso di giungere allo scopo quantunque le quantità di materiale disponibile fossero realmente minime.

Ho condotto la ricerca in base a poche righe situate nella regione ultravioletta dello spettro, che per la loro sensibilità si prestano discretamente bene allo scopo (λ 3076,78; λ 3067,73; λ 3024,64; λ 2993,34;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1929.

λ 2938,31 λ 2897,98; λ 2855,67). Meno bene ho ritenuto che si prestasse una riga intensa situata nell'azzurro a λ 4722,5 per varie ragioni, non ultima fra le quali la quasi coincidenza di questa con le righe λ 4722,3 Sr I, e λ 4722,2 Zn I.

Delle righe ultraviolette quella a λ 3067 è la più sensibile e la si può osservare nello spettro (di scintilla) di soluzioni contenenti 0,001 % di bismuto. Le altre righe sono tutte di sensibilità assai minore; non si può perciò contare molto sulla loro sensibilità per accertare la presenza del bismuto qualora questo si trovi allo stato di tracce, a meno che non si concentri il bismuto con mezzi chimici. Ora per una ricerca di rigore dove è necessario identificare non una sola riga ma un complesso di date righe, occorre disporre di una soluzione relativamente concentrata. Per i comuni dispositivi in uso per gli spettri di scintilla bastano pochi cm³ di soluzione, ma nel caso delle ceneri animali è sovente impossibile ricavare dalle ceneri stesse anche pochi cm³ di soluzione concentrata occorrenti. D'altra parte la scintilla polverizza e disperde notevoli quantità di soluzione, il livello del liquido si abbassa rapidamente nello spinterometro e la scintilla finisce con lo scoccare fra gli elettrodi asciutti se la vaschetta dello spinterometro non è abbastanza capace o se non si riaggiunge via via la soluzione. Il diluire la soluzione per aumentarne il volume conduce alla sparizione delle righe meno sensibili e riduce lo spettro alla sola riga λ 3067, quando non sparisca del tutto anche quella. Ho dovuto perciò girare le su accennate difficoltà.

Anzitutto ho trovato utile abolire l'autoinduzione inserita nel circuito di scarica ottenendo qualche vantaggio riguardo alla luminosità. Le righe atmosferiche che compaiono in assenza dell'autoinduzione, sono così poche e deboli, nella regione considerata, che non danno alcuna noia. Per contro conservando l'autoinduzione sarebbero comparse nello spettro le bande del gruppo ossidrilie, dovute al frantumamento delle molecole dell'acqua della soluzione, che avrebbero disturbato la identificazione delle righe del bismuto ed in special modo della riga più sensibile λ 3067 che cade proprio nella testa della banda più intensa del gruppo OH.

La scintilla, semplicemente condensata, scocca fra elettrodi d'oro situati, come sempre, verticalmente: quello superiore è formato da un semplice filo d'oro del diametro di 1 mm., lungo circa 8 cm. in modo che sia salvo dagli spruzzi prodotti dalla scintilla il morsetto che lo sostiene; quello inferiore è formato da un pezzetto dello stesso filo d'oro lungo un paio di mm. saldato ad un filo di platino (portante al serrat filo del morsetto inferiore dello spinterometro) a sua volta saldato nel fondo di una minuscola coppa di vetro a forma di convolvolò, aperta verso l'alto, in modo che il filo d'oro appoggi sul fondo della coppa stessa.

Si riempie completamente colla cenere da esaminare la coppa e vi si lascia cadere una goccia di HCl concentrato. Se l'incenerimento è stato condotto bene non si nota che uno scarsissimo sviluppo gassoso. Una parte

delle ceneri si scioglie, una parte precipita e ricopre le pareti ed il fondo della coppa di una fine poltiglia.

Quando si fa scoccare la scintilla, dapprima la scarica avviene fra le punte d'oro, regolarmente, ma ben presto la soluzione polverizzandosi si disperde ed il suo livello si abbassa. Allora, se tutto è ben regolato, quando il livello si abbassa, poichè gli orli ed il fondo sono ricoperti da un fine poltiglia fortemente acida per HCl, la scintilla invece di scoccare sull'elettrodo inferiore direttamente, scocca sul bordo della coppa, discende lungo la parete, percorre la superficie della soluzione e rimonta lungo l'elettrodo inferiore sino alla sommità. In tal modo continua il polverizzamento della soluzione fino a che ve n'è una traccia e la coppa è completamente secca.

Con una coppa di 5 millimetri di diametro massimo e 2 millimetri di profondità, cioè circa 0,025 cc. di capacità, si possono fare, 3-4 minuti di posa, tempo sufficiente per ottenere un'ottima negativa.

In tal modo ho realizzato i seguenti vantaggi:

1° operare colla soluzione cloridrica satura della sostanza da esaminare e perciò nelle migliori condizioni per ottenere uno spettro abbastanza completo, com'è necessario per una ricerca di rigore;

2° impiegare piccolissime quantità di sostanza ed utilizzarne totalmente la soluzione;

3° ottenere una scintilla assai luminosa per un tempo sufficiente allo scopo della ricerca.

Ho sperimentato il mio sistema su soluzioni titolate, contenenti fra 1 e 0,000001% di bismuto, ed ho ritrovato le sensibilità caratteristiche già note per ciascuna riga. Ciò dimostra che non si consegue un aumento di sensibilità delle righe stesse, cosa del resto impossibile, operando almeno nelle condizioni comuni di scarica, ma che si fa un così razionale impiego della sostanza in esame che permette di identificare il bismuto quando i metodi usuali si dimostrano inservibili.

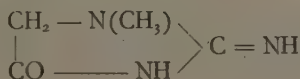
Il metodo si presta bene non soltanto per le ricerche biochimiche, per le quali è stato ideato, ma anche come metodo corrente di analisi chimica.

Ho sperimentato il dispositivo sopra descritto su vari campioni di ceneri fornitimi dal Dr. Abbruzzese della Clinica Ostetrico-ginecologica della R. Università di Firenze, provenienti da organi di animali curati con bismuto, ed ho potuto dimostrare con perfetta evidenza la presenza di questo elemento in quantità più o meno grandi in ottimo accordo con le più sensibili ricerche istochimiche eseguite sui pezzi stessi avanti l'incenerimento.

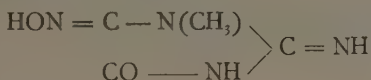
È da osservare che per ottenere dei buoni risultati occorre che l'incenerimento sia stato condotto razionalmente, carbonizzando molto lentamente dapprima il pezzo da esaminare, riprendendolo poi nella fase di imbiancamento con acido nitrico concentrato e conducendo l'imbiancamento alla temperatura più bassa possibile: si ottiene così una cenere leggiera soffice, in gran parte solubile in HCl.

Chimica. — *Sulla reazione cromatica fra nitroprussiato sodico e creatinina* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. SCAGLIARINI e P. PRATESI, presentata dal Socio G. BOERIS.

Questa reazione fu osservata per la prima volta dal Weyl nel 1878 ⁽³⁾. Finora era noto soltanto che per azione del nitroprussiato sodico sulla creatinina in soluzione alcalina si forma isonitrosocreatinina ⁽⁴⁾. Questo risultato è stato confermato anche da noi; in soluzione acquosa fredda molto leggermente alcalina la colorazione rosso rubino caratteristica è stabile per alcune ore, poi passa al giallo aranciato lasciando separare l'isonitrosocreatinina. I numerosi tentativi da noi fatti per isolare il prodotto colorato della reazione, sia operando in soluzione concentrata a 0°, sia tentando estrarlo o precipitarlo con solventi sono rimasti infruttuosi. Impiegando invece un eccesso di alcali la reazione cromatica è molto fugace e non si ha separazione di isonitrosocreatinina che resta disciolta allo stato di sale alcalino. La creatinina



viene trasformata in isonitrosocreatinina



per introduzione di un aggruppamento NO fornito dal nitroprussiato. Questa azione nitrosante in seguito a distacco del gruppo NO del nitroprussiato, dopo avvenuta la reazione cromatica, era già stata riconosciuta da L. Cambi ⁽⁵⁾ studiando l'azione del nitroprussiato sui chetoni.

Ora, dato che il gruppo NO del nitroprussiato risulta poi unito alla molecola della creatinina sembrava verosimile che la reazione cromatica stesse in rapporto con una qualche condensazione nella quale fosse impe-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1929.

(3) « Ber. », 1878, *II*, p. 2175.

(4) KRAMM, « Centr.-Bl. », 1898, *I*, p. 37; SCHMIDT e HENNIG, « Arch. d. Pharmazie », 1912, 250, p. 371.

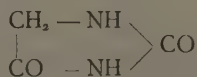
(5) « Rend. Acc. Lincei », XXIII, 1° sem., 1914, p. 812.

gnato il gruppo NO; il successivo distacco di questo con formazione di isonitrosocreatinina avrebbe dovuto perciò portare alla formazione di un pentacianuro diverso dal nitroprussiato. L'esperienza ha confermato pienamente questa ipotesi. Contemporaneamente alla separazione dell'isonitrosocreatinina ha luogo la formazione di acquoferropentacianuro alcalino $\text{Na}_3[\text{Fe}''(\text{CN})_5\text{H}_2\text{O}]$: questi sono i prodotti principali della reazione; insieme con questi si formano poi sempre minime tracce di nitritopentaferrocianuro alcalino $\text{Na}_4[\text{Fe}''(\text{CN})_5\text{NO}_2]$ anche usando un difetto di alcali. Poichè almeno un atomo d'idrogeno della creatinina è in condizioni di mobilità tali da permettere la formazione finale di isonitrosocreatinina legandosi all'NO nitroprussico e anche perchè i nitritopentacianuri alcalini non danno la reazione, si può ammettere per la reazione cromatica un meccanismo analogo a quello della reazione fra nitroprussiato e chetoni⁽¹⁾ secondo il quale si avrebbe l'apertura del legame $\text{N}=\text{O}$ a mezzo di un atomo di idrogeno mobile e conseguentemente il passaggio dell'azoto alla trivalenza in seguito all'azione degli alcali.

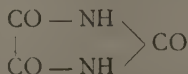
Dalla formula della creatinina si vede che gli atomi d'idrogeno che si trovano in queste condizioni di mobilità, possono essere o quello del carbonio metilenico o quello dell'azoto amidico; l'aggruppamento $-\text{CH}_2-\text{CO}-$ corrisponderebbe in certo qual modo a quello dei chetoni e dei β -chetoacidi, mentre il gruppo $-\text{CO}-\text{NH}-\text{C}=(\text{NH})-$ corrisponderebbe al $-\text{CO}-\text{NH}-\text{CO}-$ che esiste in molte ureidi che presentano la tautomeria:



Resterebbe da prendere in considerazione l'idrogeno imidico del gruppo $>\text{C}=\text{NH}$, ma questa ipotesi già poco probabile è da scartare per il fatto che anche l'idantoina



mostra la reazione di Weyl, per quanto non contenga tale gruppo. Poichè anche le idantoine $\text{N}-$ sostituite presentano la stessa reazione, che invece non ha più luogo quando si passa all'acido parabanico



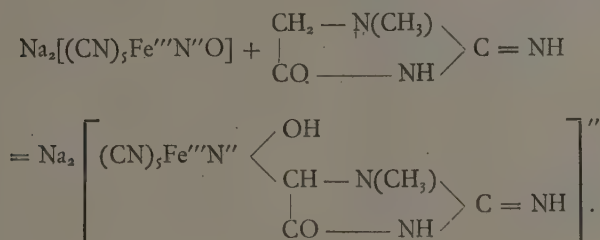
non resta che ascrivere alla mobilità dell'idrogeno metilenico del gruppo $-\text{CH}_2-\text{CO}-$ la reazione cromatica della creatinina. Una prova diretta

(1) L. CAMBI, loc. cit.

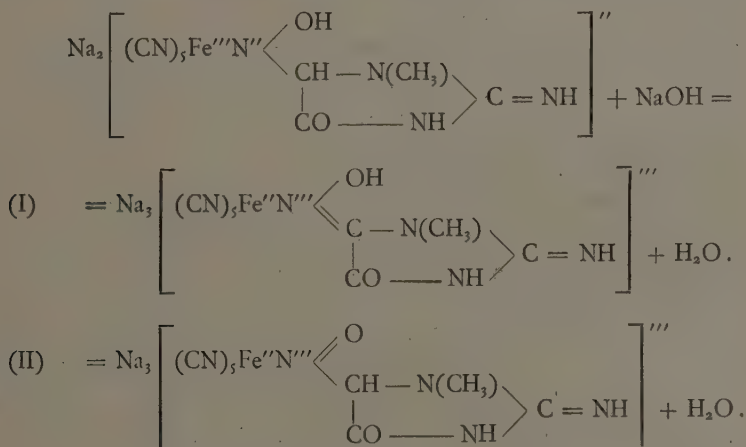
la si ha nella formazione finale di isonitrosocreatinina, dove appunto il gruppo ossimico è unito al carbonio metilenico.

La creatina, nella quale sono sparite o per lo meno molto attenuate le condizioni di mobilità dell'idrogeno metilenico per la vicinanza immediata del carbossile libero, non presenta più la reazione di Weyl.

La reazione di condensazione può essere così rappresentata:



In seguito all'aggiunta di alcali si determina la formazione del sale colorato, per la quale bisogna prendere in considerazione le due seguenti possibilità:



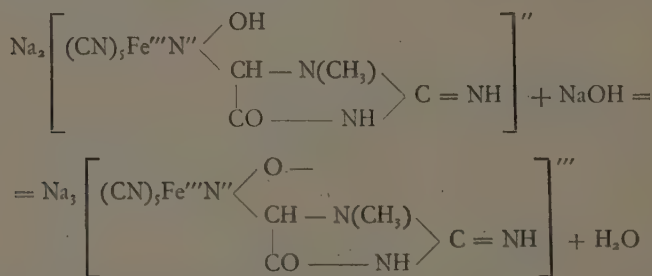
Il gruppo metilenico è il solo con cui la creatinina reagisce col nitroprussiato poichè non si ha nè sviluppo di azoto (eventualmente dovuto a ossidazione dell' = NH imidico o dell' NH₂ se si considera la formula tautomerica della creatinina)⁽¹⁾, nè formazione di altri nitrosoderivati.

Per riconoscere quante molecole di idrato alcalino prendono parte alla reazione di formazione del complesso, abbiamo fatto agire su una molecola di creatinina e una molecola di nitroprussiato — in soluzione N/10 — rispet-

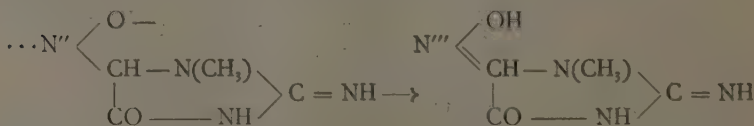
(1) A. HYND e MACFARLANE, «Centr.-Bl.», 1927, I, p. 1291.

tivamente una, due, e più molecole di NaOH in soluzione N^{ro} 10 sempre alla temperatura di 0°. Con una sola molecola di alcali il complesso colorato è stabile per circa 3 ore, poi vira lentamente al giallo aranciato con separazione di isonitrosocreatinina; con due molecole di alcali il viraggio si osserva dopo pochi minuti mentre non avviene nessuna precipitazione di isonitrosoderivato; con maggiori quantità di alcali il viraggio è ancora più rapido. Alla reazione prende quindi parte una sola molecola, di NaOH per una di nitroprussiato poichè una seconda molecola, rimanendo in eccesso, discioglie l'isonitrosocreatinina. L'anione colorato perciò è trivalente, come mostra anche la formazione dell'acquopentaferrocianuro. Nel sale colorato il ferro è effettivamente legato (per valenze secondarie) all'azoto poichè la formazione di acquopentaferrocianuro alcalino non è istantanea col manifestarsi della reazione, ma l'acquosale è presente in tracce appena si fa avvenire la reazione e quando questa ha raggiunto la massima intensità, e la sua quantità aumenta col tempo o mediante aggiunta di alcali. Ci siamo resi conto di questo operando su quantità equimolecolari delle sostanze e usando come reattivo, assai sensibile, dell'acquocianuro i sali rameici ⁽¹⁾ a diversi intervalli di tempo.

La formazione finale di acquoferropentacianuro dimostra anche l'avvenuta riduzione nel sale colorato del ferro alla bivalenza in conseguenza al passaggio di valenza dell'azoto. Ammesso infatti che l'azoto rimanga bivalente:



quando, mediante aggiunta di alcali o lentamente stando a sè, il nitroso derivato della creatinina si isomerizza in isonitroso e si separa



si dovrebbe formare acquoferripentacianuro (Fe'''), ciò che non è.

(1) HOFMANN, «Liebig's Annalen», 1900, 312, p. 15.

Concludendo, per il sale colorato della reazione di Weyl sono possibili le formule (I) o (II) indicate più sopra. Per ora non vi sono elementi sufficienti per potere dare la preferenza all'una piuttosto che all'altra.

La formula (I) sarebbe in analogia con i complessi intensamente colorati in rosso che il ferro bivalente forma colle diossime⁽¹⁾ e isonitrosochetoni⁽²⁾. La sparizione della colorazione sarebbe allora dovuta a sostituzione, nel complesso, di una molecola d'acqua alla isonitrosocreatinina, con la quale il residuo ferrocianico presenta minore affinità. La sostituzione verrebbe accelerata dagli alcali, inquantochè salificano la isonitrosocreatinina.

Con la formula (II) si spiegherebbe la sparizione del colore mediante la tautomerizzazione della nitrosocreatinina in isonitroso che si separa; alcalinizzando il liquido si favorirebbe la trasformazione nitroso → isonitroso e quindi la decomposizione del complesso. Gli acidi anche deboli decompongono istantaneamente il sale colorato con formazione, sempre, di acquoferropentacianuro e isonitrosocreatinina. La reazione di Salkowski (colorazione azzurra per riscaldamento con HCl diluito del liquido rosso rubino) è dunque dovuta a trasformazione dell'acquoferropentacianuro.

PARTE SPERIMENTALE.

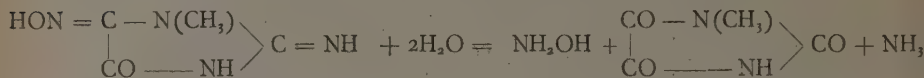
Ad una soluzione acquosa circa al 2% di creatinina (1 molecola) mantenuta da 0° a —2° si aggiungeva una soluzione concentrata a 0° di nitroprussiato sodico (1 molecola) e poi una soluzione concentrata ed ugualmente fredda di NaOH (1 molecola). Il liquido assumeva colore rosso rubino intenso che si manteneva inalterato a questa temperatura per varie ore; già dopo circa tre ore dalla soluzione limpida cominciava a separarsi un precipitato biancastro, mentre il colore del liquido tendeva gradatamente al giallo-aranciato. Il liquido fu lasciato a sè, sempre intorno a 0°, per altre sette ore, poi filtrato a freddo. Il precipitato ben lavato venne purificato sciogliendolo ripetutamente in alcali e riprecipitandolo con CO₂ o con acido acetico, poi venne seccato nel vuoto su cloruro di calcio e analizzato.

Calcolato per C ₄ H ₆ N ₄ O ₂ :		Trovato:
C	33.78	33.98
H	4.25	4.61
N	39.43	39.44

(1) TSCHUGAEFF, « Zeitschr. Anorg. Chemie », 46, 158.

(2) L. CAMBI, « Rendic. Acc. Lincei », vol. XXII, 1° sem., p. 381; vol. XXIV, 2° sem., p. 437.

Il composto fatto bollire per mezz'ora con HCl 2/N fornì acido metilparabanico (P. F. 149°.5), idrossilammina (riconosciuta dalla formazione di ossima con l'acetofenone [P. F. 59°]) e ammoniac.



Si riconferma quindi che la sostanza bianca precipitata è isonitroso-creatinina col gruppo ossimico unito al carbonio metilenico. Nelle condizioni di preparazione descritte il rendimento in isonitrosocreatinina si aggira sul 25 % rispetto al teorico; bisogna però tener conto della notevole solubilità del nitrosoderivato in acqua.

Al liquido intensamente bruno aranciato filtrato a freddo fu aggiunto un doppio volume di alcool etilico che determinò un'abbondante precipitazione di un olio rosso-bruno molto denso che non conteneva nè nitroprussiato nè acquoferripentacianuro. L'olio fu purificato nel miglior modo possibile dalle tracce di nitritoferropentacianuro (anch'esso precipitabile dall'alcool) che conteneva, sciogliendolo molte volte in poca acqua fredda e riprecipitandolo con alcool. La sostanza oleosa fu posta a seccare nel vuoto su acido solforico, dove rapidamente cristallizzò in scaglie rosso-brune — completamente solubili in acqua con color giallo-bruno — e vi fu mantenuta fino a peso costante (un giorno). Il rendimento rispetto al nitroprussiato impiegato oscillò intorno al 50 % del teorico nelle diverse preparazioni.

Analisi:

Calcolato per $\text{Na}_3[\text{Fe}''(\text{CN})_5\text{H}_2\text{O}] \cdot \text{H}_2\text{O}^{(1)}$:		Trovato:	
Na	23.71	23.28	23.17
Fe	19.19	19.23	19.52
N	24.07	23.95	24.00

Dopo essiccamento in stufa a 110° fino a peso costante:

Calcolato per $\text{Na}_3[\text{Fe}''(\text{CN})_5\text{H}_2\text{O}]$:		Trovato:
N	25.66	25.16

La sostanza dà tutte le reazioni caratteristiche e specifiche dell'acquoferropentacianuro⁽²⁾. Abbiamo notato sempre, anche usando quantità equimolecolari dei reagenti, formazione di tracce di nitritoferropentacianuro dovute all'azione dell'alcali sul nitroprussiato.

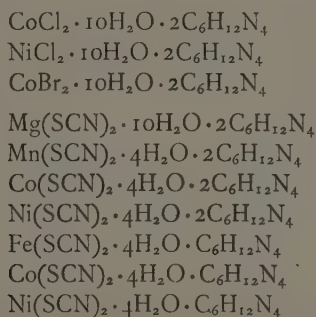
(1) L'acquoferropentacianuro cristallizza con 7H₂O; di queste ne perde sei mantenendolo nel vuoto su acido solforico, perde l'ultima scaldandolo a 110°. Cfr. HOFMANN, loc. cit.

(2) HOFMANN, loc. cit.

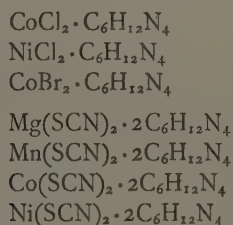
Chimica. — *Composti di addizione tra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche* ⁽¹⁾. Nota VII ⁽²⁾ di G. SCAGLIARINI e G. TARTARINI, presentata dal Socio G. BOERIS.

In alcune Note precedenti ⁽³⁾ mettemmo in evidenza una serie di sali corrispondenti a composti di addizione tra alogenuri o solfocianuri di metalli bivalenti e basi organiche ottenuti in soluzioni alcoliche, e ciò per dimostrare quale importanza abbia il solvente nella formazione dei composti di addizione.

Mentre da soluzioni acquose G. A. Barbieri e F. Calzolari avevano ottenuto i seguenti sali idrati ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾



noi invece da soluzioni in alcool etilico (95 %/o) ottenemmo rispettivamente i seguenti composti



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1929.

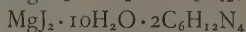
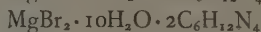
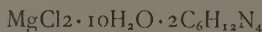
(3) Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. I (1925), p. 582; id., vol. II (1925), p. 269; id., vol. IV (1926), p. 210; id., vol. IV, p. 387; Accademia Scienze Mediche e Naturali di Ferrara, seduta 3 aprile 1927. Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. VII (1928), p. 411; id., vol. VII, p. 509.

(4) Questi « Rendiconti », serie 5^a, vol. XIX (1910), p. 382.

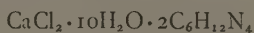
(5) Questi « Rendiconti », serie 5^a, vol. XX (1911), p. 119.

Proseguendo in tali ricerche ci siamo occupati dei composti che in soluzione di alcool etilico (95 %) gli alogenuri del magnesio e del calcio formano coll'esametilentetramina.

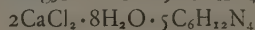
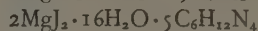
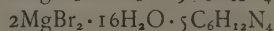
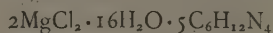
Da soluzioni acquose G. A. Barbieri e F. Calzolari⁽¹⁾ avevano ottenuto i seguenti composti



e successivamente F. Calzolari⁽²⁾ ottenne un composto analogo a questi facendo reagire cloruro di calcio ed esametilentetramina in soluzione acquosa



Dalle soluzioni alcooliche (alcool etilico al 95 %) degli alogenuri anidri (cloruro, bromuro, ioduro) del magnesio e del cloruro di calcio anidro per aggiunta di una soluzione pure in alcool etilico (al 95 %) di esametilentetramina abbiamo ottenuto composti di addizione corrispondenti alle seguenti formule:



A differenza dei composti di addizione sopraricordati e che corrispondono a sali anidri per quanto siano stati preparati in condizioni analoghe di esperienza in questo caso abbiamo invece ottenuti sali idrati.

Questi sali però come appare al confronto delle formule, differiscono notevolmente da quelli ottenuti da G. A. Barbieri e F. Calzolari. Anche per questi sali si verifica quindi che la variazione del solvente implica la variazione della composizione del composto di addizione: In questo caso è poi da rilevarsi il fatto che, pur operando in ambiente prevalentemente alcoolico (alcool etilico a 95 %) si formino sali idrati. Sarà interessante esaminare che cosa avvenga con soluzioni in alcool assoluto.

PARTE SPERIMENTALE.

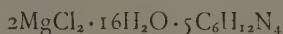
I sali sono stati ottenuti tutti in modo analogo trattando cioè le soluzioni in alcool etilico (95 %) sature a freddo degli alogenuri anidri del metallo con soluzione pure in alcool etilico sature a freddo di esametilen-

(1) Questi « Rendiconti », serie 5^a, vol. XIX (1910), p. 384.

(2) Questi « Rendiconti », serie 5^a, vol. XXI (1912), p. 560.

tetramina. I precipitati, filtrati alla pompa e lavati con alcool etilico, vennero ripetutamente cristallizzati dall'alcool e finalmente asciugati fra carta da filtro. Per il composto di addizione tra cloruro di magnesio e esametilentetrammina fu fatta la determinazione di carbonio e idrogeno per decidere se la molecola contenesse acqua o alcool di cristallizzazione.

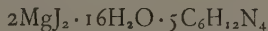
Composto di addizione



cristalli incolori tabulari; per $2\text{MgCl}_2 \cdot 16\text{H}_2\text{O} \cdot 5\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$

	Calc. %	Trov. %
Mg	4,12	4,08
Cl	12,03	12,09
N	23,76	23,55
C	30,53	29,78
H	7,86	7,84
H ₂ O	24,44	24,78

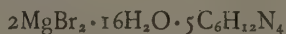
Composto di addizione



cristalli incolori tabulari; per $2\text{MgJ}_2 \cdot 16\text{H}_2\text{O} \cdot 5\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$

	Calc. %	Trov. %
Mg	3,14	3,22
J	32,86	33,20
N	18,13	18,07
H ₂ O	18,65	18,86

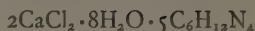
Composto di addizione



cristalli incolori tabulari; per $2\text{MgBr}_2 \cdot 16\text{H}_2\text{O} \cdot 5\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$

	Calc. %	Trov. %
Mg	3,58	3,61
Br	23,55	23,82
N	20,64	20,48
H ₂ O	21,23	21,06

Composto di addizione



cristalli; per $2\text{CaCl}_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O} \cdot 5\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$

	Calc. %	Trov. %
Ca	7,51	7,60
Cl	13,30	13,29
N	26,26	25,72
H ₂ O	13,51	13,00

Geologia. — *Appunti geologici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige)*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Proseguizione orientale della « zona del Piemonte », gli Alti Tauri offrono la più grandiosa, chiara ed inoppugnabile dimostrazione della struttura a ricoprimenti dell'intera catena alpina.

Già un quarto di secolo è trascorso dal giorno memorabile in cui P. Termier rivelava, con geniale quanto arditissima sintesi, la vera natura geologica degli Alti Tauri, dimostrando la loro perfetta corrispondenza, litologica e cronologica, con la zona interna delle Alpi occidentali (Pennidi). Non solo, ma constatando che a nord come a sud, ad est come ad ovest, i terreni mesozoici dei Tauri (costituiti da calcescisti [Lias *p. p.*] con ofioliti e da calcari, dolomie e quarziti del Trias) s'immergono ovunque sotto formazioni più antiche, l'illustre geologo francese andava oltre ed affermava che questa regione, come anche parte dell'Engadina, rappresenta un'enorme « finestra tettonica », attraverso la quale si possono vedere i terreni secondari delle Pennidi soggiacere alla coltre più antica dei ricoprimenti austroalpini. I risultati delle nuove e numerose ricerche che si sono via via sviluppate dimostrarono sempre più la fondatezza della nuova sintesi tettonica, che nell'opera dello Staub trovò il suo maggiore completamento in un quadro dettagliato ed esteso all'intera catena alpina.

Avendo avuto incarico dal R. Magistrato alle Acque di collaborare con il prof. A. Bianchi al rilevamento dei fogli Vetta d'Italia e Monguelfo della Carta Geologica delle Venezia, ebbi modo di percorrere a lungo la parte italiana dei Tauri, soprattutto la Valle Aurina e la zona di Riva di Tures,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico di Basilea, diretto dal prof. A. Buxtorf.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1929.

potendo così rendermi conto personalmente della complicata struttura di questa magnifica regione.

Il prof. Bianchi⁽¹⁾ ed il dott. Semerano⁽²⁾ ebbero già occasione di pubblicare in proposito delle notizie di carattere chimico-petrografico, alle quali le presenti Note si ricollegano per ciò che riguarda i riferimenti litologici.

La Valle Aurina, per il tratto a monte di Luttago, è ancor oggi quasi del tutto sconosciuta dal punto di vista geologico, essendo finora rappresentata soltanto da carte vecchie e schematiche alla scala 1 : 500.000 (Blaas, Beck, Löwl). In tesi generale la zona posta a nord dell'Aurino è costituita nella sua quasi totalità dall'« ortogneiss dei Tauri »; succede, verso sud, la serie mesozoica dei calcescisti con ofioliti, eccetto che nella parte più orientale del versante di sinistra, ove compaiono i gneiss ed i micascisti del Picco dei Tre Signori, e nelle parti alte di talune valli secondarie sud-occidentali, come Val delle Lepri, Val Chiusa Grande, Val Chiusetta ecc., nelle quali affiorano numerose scaglie di calcari, parascisti e quarziti del Trias ecc. (zona di Matrei), e, più a sud, estesi lembi di terreni cristallini pretriasici (Grissonidi).

Tutte queste diverse formazioni sono generalmente orientate ENE-WSW, salvo leggere deviazioni locali. I banchi rocciosi sono quasi sempre in piedi, con pendenza esitante attorno alla verticale, più spesso di settanta-ottanta gradi verso sud. L'asse tettonico medio della regione va gradatamente rialzandosi verso oriente, in modo da far comparire in questa direzione elementi strutturali sempre più profondi.

L'« ortogneiss dei Tauri » appartiene al complesso del Gran Veneziano, ossia alla più bassa unità tettonica delle Alpi orientali. Nel suo insieme si accosta alle corrispondenti rocce del ricoprimento V (M. Rosa-Gr. Paradiso-Dora Maira), per quanto la facies occhiadina vi sia poco rappresentata. Spesso l'ortogneiss presenta una tessitura compatta e per nulla scistosa, ma al microscopio offre sempre una chiara struttura cristalloblastica. Alla periferia del massiccio esso diventa estremamente laminato, ricco di clorite secondaria, suddiviso in banchi ed intersecato da strette sinclinali di scisti filladici, di quarziti sericitiche (Permo-Eotrias), di calcari e dolomie (Trias) e di calcescisti (Lias *p. p.*). Fenomeni di questa natura si possono constatare presso lo sbocco di Rio Franco, Rio del Conio, alla Forcella del Picco ecc. Talvolta si osservano inoltre, in piena massa dell'ortogneiss, dei cunei sinclinali di parascisti molto scistosi, come, per esempio, i micascisti a cianite del Sasso Nero, senza che si accompagnino ad essi sedimenti del Secondario. Tutte queste sinclinali sono di solito estremamente tettonicizzate,

(1) BIANCHI A., *Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige)*. Parte I e II, « Rend. R. Acc. Lincei », 1929, p. 1145 ecc.

(2) SEMERANO G., *Sulla natura di alcuni gneiss della regione fra Alpi Aurine e Vedrette Giganti*. « Atti Acc. Sc. Veneto Trentino ecc. », Padova 1929, vol. XX.

onde non è affatto improbabile che talune di esse siano state, in conseguenza dell'enorme pressione, private dei loro termini mesozoici e talvolta addirittura di tutto il loro contenuto sedimentario, nel qual caso solo la straordinaria laminazione dell'ortogneiss può farne sospettare l'eventuale preesistenza. Al contrario, a sud della Forcella del Picco esistono dei lembi di ortogneiss pizzicati fra i parascisti. Questi rapporti di giacitura indicano chiaramente che ci troviamo di fronte ad un fenomeno di ripetizione tettonica, ciò che risponde d'altro canto ai caratteri generali di una zona intensamente pressata e suddivisa in scaglie.

Purtroppo la milonitizzazione dei vari terreni non permette di constatare in modo sicuro se esistevano o meno rapporti di contatto magmatico fra ortogneiss e parascisti paleozoici. Ad ogni modo ciò che per ora importa specialmente di rilevare si è che l'ortogneiss è sicuramente premesozoico (forse di età carbonifera come opinano taluni autori), perchè non si presenta mai iniettato, nè qui nè in qualsiasi altra parte dei Tauri, attraverso il Trias, oppure attraverso la formazione ofiolitico-calcescistosa. Dove l'ortogneiss, originariamente intrusivo, si trova in contatto con terreni mesozoici, si tratta sempre di un fenomeno puramente tettonico, come si può osservare anche per la serie del Picco nella zona intensamente scagliata di Val della Rossa, la quale mostra lame sottili di ortogneiss intercalate nella serie dei calcescisti con pietre verdi. L'idea che l'«ortogneiss dei Tauri» sia più giovane dei terreni mesozoici e che alla sua azione di contatto sia da imputare il profondo metamorfismo subito da questi terreni, è quindi da rigettare senz'altro come assurda e priva di fondamento. (Si consulti al proposito i lavori di P. Termier, Staub, Kober ecc.).

Nella regione di S. Pietro, dove il complesso del Gran Veneziano viene a contatto con la serie dei calcescisti e delle ofioliti, si nota l'interposizione di alcune sottili zone, enormemente laminate e spesso milonitizzate, di calcari triasici, gneiss e micascisti, le quali si insinuano entro i sedimenti orogeni del Lias presso il limite meridionale dell'ortogneiss. Ma di questa interessantissima zona verrà trattato con maggior ampiezza in seguito.

Il complesso del Picco dei Tre Signori, tettonicamente superiore all'unità precedente, è costituito da paragneiss micacei, in genere tormaliniferi e spesso granatiferi, da micascisti muscovitici, da filladi, da scisti grafici, da ofioliti (p. p. mesozoiche?) e da limitatissimi affioramenti di un ortogneiss occhiadino. A questi termini, riferibili al Paleozoico, si accompagnano infine lembi irregolari di quarziti (Permo-Eotrias) e di calcari e dolomie (Trias). La zona di contatto fra il complesso del Picco e quello del Gran Veneziano risulta energicamente laminata con frequente soppressione di cospicui termini mesozoici e forsanco pretriasici. Presso la Forcella del Picco, vicino il Rifugio omonimo, si possono osservare però ancora parecchie scaglie di calcari dolomitici e lembi di rocce verdi, verosimilmente

mesozoiche, ed alla Malga di Lana le due unità tettoniche predette sono separate da una poderosa lama di Trias neritico. In vicinanza di S. Spirito di Casere, il complesso paleozoico-triasico del Picco scompare sotto la coltre mesozoica dei calcescisti con pietre verdi; il limite fra le due serie si continua in Val del Vento, passa in prossimità del Rifugio Giogo Lungo e varca il confine politico ad ovest di Punta della Rossa. La zona presso il Giogo Lungo è straordinariamente scagliata; in essa ho potuto riconoscere una successione di oltre 50 lame tettoniche. Alla Forcella del Vento di Dentro la serie del Picco è intersecata da un lembo di calcari, evidentemente triasici, accompagnati da ofioliti, ed un'altra lama parallela di Trias s'incontra sulla parete nord della Muswand, in Val d'Umbal. Il complesso del Picco dei Tre Signori manda nella formazione dei calcescisti con ofioliti parecchie digitazioni, talune delle quali vennero forse strappate e portate lontano dalla massa originaria. Oltre a quelli già ricordati di Val della Rossa, vanno menzionati i lembi di gneiss compresi nel mesozoico sopra Predoi, sul crinale fra Val Lunga e Val d'Alprè, sulla giogaia Punta di Merbe-Pizzo Cucchiaio, ove affiorano anche ripetute lame di calcari, dolomie e quarziti ecc.

I calcescisti (Lias orogeno p. p.) sono rappresentati oltrechè da una facies normale, la più diffusa, da una facies riccamente calcarifera e da una facies filladica, pressochè priva di carbonati. Siccome questi diversi tipi litologici sembrano distribuiti in zone parallele alla direzione tettonica media, si potrebbe pensare che la loro genesi stia in rapporto con preesistenti ondulazioni del fondo della Tetide, dirette nello stesso senso dell'asse della geosinclinale, per quanto non è da escludersi che anche questa complessa alternanza di facies possa essere in buona parte imputata a fenomeni di ripetizione tettonica. È degna di nota in fine la circostanza che i calcescisti sono in genere ricchi di tormalina, presumibilmente detritica; ciò depone a favore della loro derivazione da materiali sul tipo di quelli della serie del Picco, piuttostochè da quelli della serie del Gran Veneziano; il fatto viene ad assumere un notevole significato per il riferimento del mesozoico post-triasico all'una piuttostochè all'altra unità strutturale.

Biologia. — Il ciclo biologico di « *Diptherostomum brusinae* Stossich » (*Trematode digenetic*: fam. « *Zoogonidae* Odhner »)⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. PALOMBI, presentata dal Corrisp. U. PIERANTONI.

Nell'intestino terminale di *Blennius gattorugine* « Brün. », di *Sargus vulgaris* « Geoffr. », *Gobius jozo* « L. » e *Crenilabrus pavo* « Cuv. » del Golfo di Napoli, io ho trovato l'adulto di *Diptherostomum brusinae* « Stoss. », trematode digenetic, già precedentemente noto quale parassita intestinale di *Oblata melanura* « L. » [Stossich]⁽³⁾; di *Chrysophrys aurata* « L. », *Blennius ocellaris* « L. » [Odhner]⁽⁴⁾ e di *Labrus merula* « L. », *L. maculatus* « Bloch », *Crenilabrus pavo* « Cuv. », *Cr. griseus* « Günth. », *Cr. quinquemaculatus* « Risso » [Looss]⁽⁵⁾; tutti dell'Adriatico (Trieste).

Durante le mie ricerche sulle cercarie parassite dei molluschi marini, ho avuto inoltre l'opportunità di riscontrare, nei mesi primaverili, in *Nassa mutabilis* « L. » le sporocisti che molto verosimilmente debbono riferirsi a quelle della *Cercaria crispata* « Pelseneer » rinvenute da questo autore⁽⁶⁾ in *Natica alderi* a Boulogne-sur-Mer.

Nella « *Nassa* », il fegato è particolarmente infestato; se però l'infezione è grave, tutta la massa viscerale del mollusco viene occupata dal parassita che, colle sue numerosissime sporocisti, infarcisce completamente tali organi i quali assumono perciò un colorito rosso arancione.

Per rottura della parete delle sporocisti le cercarie, in numero vario, in generale una dozzina circa per ciascuna sporocisti, fuoriescono ed iniziano, colla parte anteriore del corpo assottigliata, movimenti di esplorazione all'intorno. Le cercarie hanno la superficie del corpo fornita di minutissimi aculei e sono completamente sprovviste di coda.

Quando per la prima volta osservai tale cercaria, fui colpito moltissimo dal loro aspetto; soprattutto però la mia attenzione fu richiamata dalla presenza di due rilievi della ventosa ventrale che ricordavano molto da vicino le duplicature o « labbra » della ventosa ventrale di *Diptherostomum*

(1) Dalla Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1929.

(3) STOSSICH. M., *I distomi dei pesci marini e d'acqua dolce*. Appendice. Progr. Ginnasio Com. Sup. Trieste, anno 25, 1888. (Estratto p. 8).

(4) ODHNER T., *Zum natürlichen System der digenen Trematoden*. II. « Zool. Anz. », Bd. 37, p. 242, Leipzig, 1911.

(5) LOOSS A., *Ueber einige Distomen der Labriden des Triester Haßens*. « Centrob. Bakter. Parasitenk. ». Bd. 29, p. 399, fig. 1, Jena 1901.

(6) PELSENEER P., *Trematodes parasites de mollusques marins*. « Bull. Sc. France et Belgique », t. 40, p. 171, pl. 11, figg. 39, 40.

brusinae « Stoss. » che io ⁽¹⁾ avevo avuto modo di osservare spessissimo nell'intestino terminale di *Blennius gattorugine* « Brün. » e negli altri pesci precedentemente citati.

A tal proposito volli istituire ricerche sperimentali le quali mi venivano consigliate oltre che dai fatti su esposti a proposito dell'aspetto della cercaria, anche dall'habitat identico della *Nassa mutabilis* e delle specie di pesci su menzionati.

Cogli organi infetti della *Nassa mutabilis* « L. » ho nutrito i seguenti pesci: *Blennius gattorugine* « Brün. », *Crenilabrus pavo* « Cuv. », *Cr. roissali* « Risso » [= *Cr. quinquemaculatus* « Risso »], *Cr. mediterraneus* « Cuv. », *Scyllium canicula* « L. ».

Nel primo dei suddetti pesci ho potuto seguire completamente lo sviluppo del parassita che mi ha luminosamente dimostrato come la cercaria della *Nassa mutabilis* « L. » debba essere riguardata come uno stadio di sviluppo del *Diptherostomum brusinae* « Stossich ». Il suo ciclo evolutivo si inizia perciò nella *Nassa mutabilis* « L. » che rappresenta il primo ospitatore e si completa nel *Blennius gattorugine* « Brün. » e negli altri pesci già citati che rappresentano gli ospitatori definitivi.

Ho potuto osservare e raccogliere esemplari di *Diptherostomum brusinae* « Stoss. » in *Blennius gattorugine* « Brün. » in vari stadi di sviluppo: dopo un giorno dall'infezione e successivamente in epoche varie fino a 45 giorni dall'ingestione da parte dei *Blennius* dei pezzi degli organi infetti della *Nassa mutabilis*.

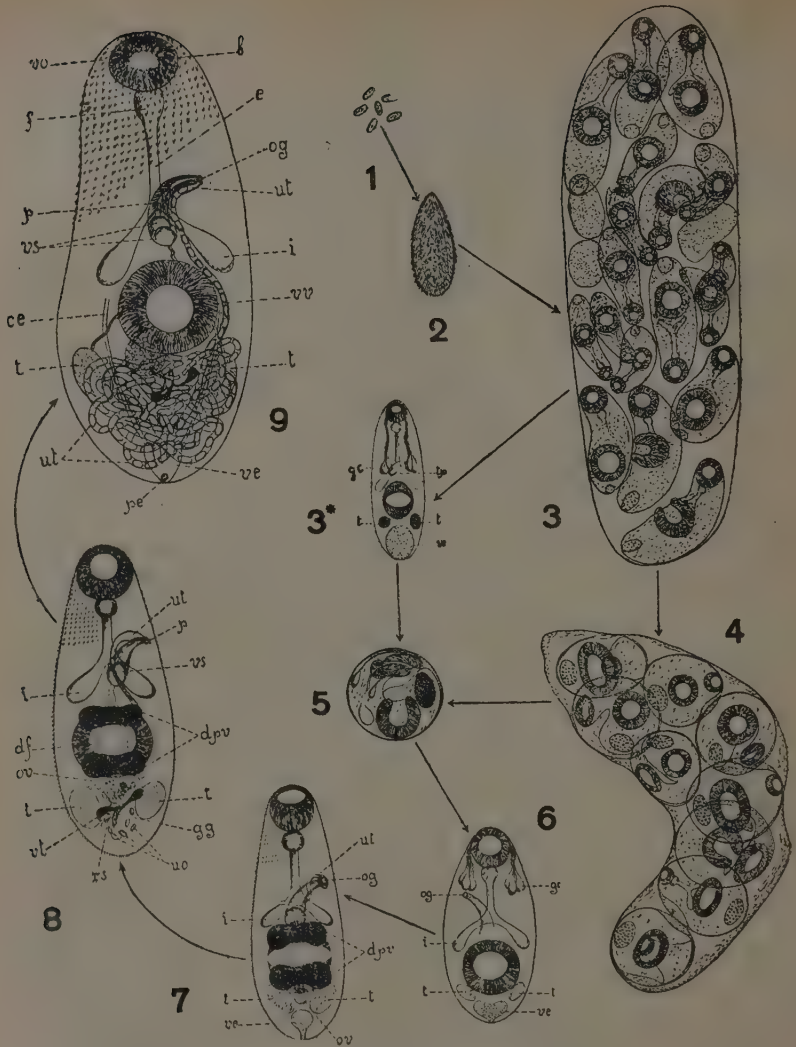
Nei *Crenilabrus* (*Cr. pavo*, *roissali*, *mediterraneus*), invece l'esito delle infezioni è stato negativo ⁽²⁾, altrettanto devo dire per quelle eseguite in *Scyllium canicula*. Che l'esito sia stato tale, non v'è da meravigliarsi affatto: nelle mie infezioni io ho dovuto spessissimo servirmi di cercarie non sempre completamente sviluppate, e perciò in condizioni tali da non poter continuare il loro sviluppo nei pesci citati.

Continuando infatti le ricerche nella *Nassa*, io ho avuto l'opportunità di trovare, nei mesi estivi, sporocisti contenenti cercarie già incistate o in via di incistamento. È chiaro perciò che solo in tali condizioni è possibile ottenere lo sviluppo completo e sicuro del trematode, sviluppo che non potevo in tutti i casi attendermi quando le cercarie non avevano ancora raggiunto tale stadio.

La presenza delle cercarie incistate nelle sporocisti, mentre da un lato definisce completamente il ciclo biologico di *Diptherostomum brusinae*

(1) PALOMBI A., *Ricerche sul ciclo evolutivo di « Helicometra fasciata (Rud.) »*. Revisione delle specie del genere « *Helicometra* Odhner ». « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. IX, p. 239, 1929.

(2) Successive infezioni sperimentali, come avrò modo di esporre nello studio definitivo sull'argomento, mi hanno permesso di raccogliere anche nell'intestino di *Crenilabrus pavo* « Cuv. » e di *Sargus vulgaris* « Geoffr. » il *Diptherostomum brusinae* « Stoss. » in via di sviluppo. (Nota aggiunta).



Diphllostomum brusinae STROSSICH. Ciclo evolutivo.

Figg. 1 nova; 2 miracidio; 3 sporocisti; 3° cercaria; 4 sporocisti con metacercarie; 5 metacercaria; 6, 7, 8 stadi di sviluppo del trematode in *Blennius gattorugine* Brün. Infettato sperimentalmente; 9 adulto. Tutte le figure sono state ingrandite 106 volte.

Lettere comuni a tutte le figure: b bocca; ce condotti escretori; df deferenti; dpr duplicature ventosa ventrale, e esofago; f faringe; i intestino; gc glandole cistogene; gg glandole del guscio; og orificio genitale; ov ovario; p pene; pe poro escretore; rs ricettacolo seminale; t testicoli; tp tasca del pene; uo nova; ut utero; ve vescicola escrettrice; vo ventosa orale; vs vescicola seminale; vt vitelligeni; vv ventosa ventrale.

« *Stoss* », dall'altro elimina ogni congettura sull'eventuale ospitatore intermedio. Infatti prima ancora che determinassi quest'ultima parte del problema, in base alla conoscenza delle condizioni ecologiche dei *Blennius* e delle *Nassa*, io ho creduto che lo stadio di cercaria incistata (metacercaria « *Dollfus* ») dovesse trovarsi nei *Carcinus* o nei *Portunus* anche perchè il « *Mac-Intosh* »⁽¹⁾ aveva rinvenuta una cercaria incistata che il « *Pelse-neer* »⁽²⁾ non era alieno dal riguardare come lo stadio successivo di sviluppo della *Cercaria crispata* e il « *van Beneden* »⁽³⁾ pensava che potesse essere riferita a *Distomum luteum* = *Diphtherostomum betencourti* « *Monticelli* »⁽⁴⁾ parassita degli *Scyllium* (*Sc. stellare* « *L.* », *Sc. canicula* « *L.* »).

Tuttavia tanto le ricerche eseguite nei *Carcinus* e nei *Portunus* esaminati appena pescati, che quelle compiute in tali crostacei ed anche in *Inacus scorpio* « *Fabr.* » infettati sperimentalmente, mi hanno dato esito negativo. Sono indotto perciò a ritenere che lo stadio intermedio, ormai noto, debba trovarsi tra la fauna che aderisce alla scogliera litorale sommersa: alghe, idrozoi, spugne, serpule, balani su cui le cercarie incistate cadono allorchè, uscite fuori dalle sporocisti vengono disperse dal mollusco che vi striscia sopra.

A questa logica conclusione io sono condotto sia dalla presenza delle cercarie incistate nelle sporocisti delle *Nassa*, sia dal fatto da me più volte constatato che le cercarie, anche fuori dalle sporocisti, hanno la possibilità di incistarsi, sia infine dall'esame del contenuto intestinale di *Blennius gattorugine* e dei pesci citati che è costituito in gran parte appunto dalla fauna che aderisce alla scogliera litorale sommersa.

(1) MAC-INTOSH, W. C., *The Trematode larva and « Ascaris » of the « Carcinus moenas »*. « *Quart. Journ. Micr. Sc.* », vol. V, p. 201, tav. 8, figg. 1-5.

(2) Loc. cit., p. 172.

(3) VAN BENEDEN P. J., *Les poissons des côtes de Belgique, leurs parasites et leurs commensaux*. « *Mem. Ac. R. Belg.* », p. 54, tav. 4, fig. 9, Bruxelles 1871.

(4) MONTICELLI, FR. SAV., *Studi sui Trematodi endoparassiti*. « *Zool. Jahrb. (Syst.)* », vol. VII, suppl. 3, p. 190, Jena 1893.

Anatomia comparata. — *Sbocco di tubi malpighiani nel mesointestino* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. TIRELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

È cospicua, ma assai frammentaria, la letteratura sullo sbocco dei tubi malpighiani negli insetti; perchè gli autori non si sono in genere occupati direttamente di questo problema, non solo indirettamente studiando l'istologia e la morfologia dei malpighiani stessi, od occupandosi della morfologia generale dell'apparato digerente e dei suoi annessi.

Ricorderò semplicemente come i più autorevoli trattati di entomologia siano concordi ⁽³⁾ nell'indicare lo sbocco dei malpighiani nella regione pilorica, talvolta anzi decisamente nell'intestino posteriore.

I malpighiani nell'embrione si sviluppano da un cercine cellulare che si differenzia all'estremità prossimale della primitiva invaginazione proctodeale; in alcune larve di insetti, nelle quali permane la parete che occlude il piloro nell'embrione, separando meso- da postintestino; i malpighiani sboccano nel postintestino che è ben distinto dall'intestino medio, quindi appaiono come diretti diverticoli proctodeali.

Durante i processi metamorfici delle crisalidi i malpighiani vengono distrutti completamente, e si rigenerano con un processo simile al processo della loro formazione embrionale ⁽⁴⁾.

In pochissimi casi si è accennato appena ad uno sbocco verso l'estremità posteriore del mesointestino, ma si tratta di cenni molto brevi ed incerti ⁽⁵⁾; gli autori non sembra che abbiano prestato attenzione al fatto, mancano quindi figure che contribuiscano a definire chiaramente la modalità di sbocco. Le figure di dissezioni macroscopiche non hanno valore,

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia Comparata della R. Università di Genova, diretto dal prof. L. Cognetti de Martiis.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1929.

(3) COMSTOK F. H. A., *Man. for the Study of Ins.*, 1895; LEYDIG, *Zum feiner. bau d. Arthrop.* Müller's Arch., 1855; BERLESE, *Gli insetti*, 1909; JORDAN, *Vergleichend physiologie Wirbel. Tiere*, 1913; PAKCARD, *Textb. Entomol.*, 1903; SCHRÖDER, *Handb. d. Entom.*, 1924.

(4) CHOLODKOWSKY (1884), *Sur les vaisseaux de Malpighi chez les Lépidoptères*. « C.R. Ac. Sc. », 99-816; ITO (1921), *On the metamorphosis of the malpighian tubes of « Bombyx mori »*, « Journ. Morphol. », 35-195.

(5) SCHRÖDER, op. cit., p. 300, nota; BATELLI, *Contr. all'anat. e alla fis. d. larva di « Eristalis tenax »*. « Bull. Soc. Entom. It. », 1879; KOLBE, *Einführung in die Kenntnis der Insekten*, 1889; TEODORO, *Sui T. malpigh. d. Lecanini*. Redia, 10-15, 1915.

perchè è stato dimostrato⁽¹⁾ che l'inserzione esterna dei tubi malpighiani sulla parete del tubo dirigente può non corrispondere affatto al loro sbocco interno.

In larve di *Cloëon*, quasi sicuramente di *Cloëon dipteron*, i malpighiani sboccano invece direttamente nell'intestino medio.

Le cellule dell'epitelio mesointestinale sono alte e strette: dimensioni da $25 \text{ a } 35 \mu \times 5 \text{ a } 10 \mu$. Nuclei nettamente basali nella porzione cefalica, più centrali invece nella regione caudale, dove anche le cellule appaiono generalmente più basse. Nuclei in ogni caso ovoidi od elissoidali, con un piccolo nucleolo o senza, e con reticolo di cromatina molto denso.

Cellule postintestinali più tozze, alte da $25 \text{ a } 30 \mu$; larghe da $15 \text{ a } 20 \mu$. Nuclei sempre centrali, talvolta anzi spostati apicalmente, più grossi di quelli delle cellule mesointestinali e sempre tondeggianti, a reticolo cromatinico

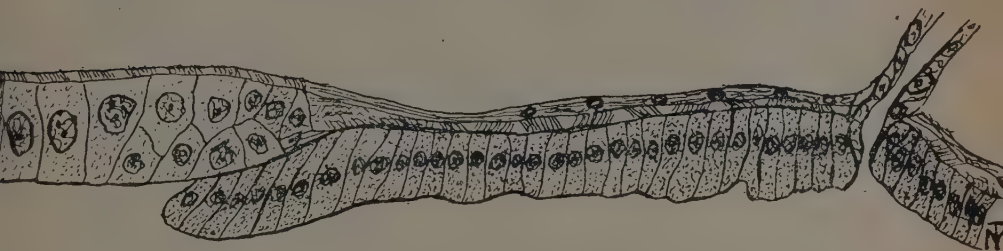


Fig. -I. - Sbocco di un malpighiano nell'intestino medio di *Cloëon*.

con maglie larghe, provvisti di nucleolo. Il margine libero dell'epitelio è rivestito da una sottile cuticola chitinosa.

La valvola pilorica è costituita da un ripiegamento circolare dell'epitelio mesointestinale che sporge nel primo tratto dell'intestino posteriore.

Le cellule mesointestinali che la costituiscono sono molto lunghe e strette, con piccoli nuclei. Nella concavità della piega valvolare è contenuto un anello di muscoli circolari (sfintere pilorico).

I malpighiani delle *Ephemerae*, larve e adulti, secondo S. Hilaire si distinguono⁽²⁾: in una porzione distale⁽³⁾ stretta ed a pareti sottili, separata mediante una strozzatura da una porzione prossimale a pareti spesse. Quest'ultima si distingue ancora in tre parti. Una prossimale a cellule di media grandezza, trasparenti; una media con cellule infarcite di corpiccioli; una dilatata, distale, avvolta a spirale, con cellule di nuovo trasparenti. L'autore non parla dello sbocco dei malpighiani.

(1) BORDAS L., *Insertion d. t. de Malpighi chez les Gryllidae*. «Bull. Soc. Ent. Fr.», 1901, p. 227.

(2) SAINT-HILAIRE, *Vergleichende histologische Untersuchungen der Malpighischen Gefäße bei Insekten*. Zool. Anz., 73, 218; 1927.

(3) Distale intendo la regione dello sbocco.

Nelle larve di *Cloëon*, da sezioni fissate e colorate, i malpighiani appaiono distinti in una parte prossimale con cellule grosse, sporgenti verso il lume, in modo che questo viene obliterato quasi nella prima porzione, e successivamente si mostra tortuoso, poichè le sporgenze delle cellule opposte sono alternate. Procedendo distalmente le cellule si appiattiscono e il canale diviene più largo e diritto. Verso lo sbocco i malpighiani si assottigliano.

I malpighiani si inseriscono perpendicolarmente alla parete del tubo digerente, e traversano l'epitelio mesointestinale conservando la struttura istologica propria. Lo sbocco avviene circa 300 μ prima della valvola pilorica.

Con questo mio sicuro reperto resta quindi stabilito che: nella massima parte dei casi lo sbocco dei malpighiani avviene esattamente al limite fra meso- e postintestino; molto spesso esso è spostato caudalmente sì da essere nettamente postintestinale; talvolta è anche spostato cranialmente sì da essere nettamente mesointestinale. In altre parole lo sbocco dei malpighiani non avviene in un punto fisso; ma oscilla intorno alla regione pilorica.

Dato il particolare processo di formazione dei vasi malpighiani (non da una invaginazione dell'epitelio del tubo digerente, invaginazione che potrebbe spostarsi lungo il tubo stesso) ma dalla proliferazione di un cercine cellulare che si differenzia sulla parete intestinale, lo sbocco dei malpighiani corrisponde esattamente al punto in cui il cercine si è differenziato. Scartata inoltre, da tutti gli embriologi ormai, l'ipotesi di Grassi sulle analogie fra origine dei malpighiani e degli stigmi; dobbiamo ritenere per certo che: uno sbocco mesointestinale significhi quindi origine entodermica, mentre sinora si è concordemente ammessa una origine ectodermica dei vasi malpighiani.

Lo sviluppo embrionale degli animali avviene con perfetta corrispondenza, e segue le medesime fasi, in ogni gruppo tassonomicamente definito ed omogeneo. Non solo: ma il piano di struttura degli adulti è tale che permette, sino a un certo punto, di stabilire l'origine embrionale dei singoli organi ed apparati. Non si può ammettere che organi così importanti, come i vasi malpighiani, provengano anarchicamente ora dall'ento-, ora dell'ectoderma. Bisogna trovare un'altra spiegazione dei fatti osservati.

Si può supporre che ento- ed ectoderma abbiano il significato di centri di organizzazione. Tale concetto che per la prima volta è stato emesso da Spemann, è stato successivamente sviluppato da Brachet il quale ha cercato di dare ad esso forma più concreta affermando l'esistenza di sostanze specifiche proprie dei centri di organizzazione stessi, le quali, diffondendo da essi, suscitano lo sviluppo degli organi dipendenti.

L'idea di una sostanza, o in ogni modo, di un *quid* che diffonde, è preziosa.

Entoderma ed ectoderma producono ciascuno una sostanza specifica, caratteristica. È tale sostanza che suscita lo sviluppo degli organi specificamente ento- ed entodermici. Ma al margine dei due foglietti, alla soglia dove

ecto ed— entoderma vengono a contatto, la sostanza specifica dell'ectoderma diffonde verso l'entoderma, e viceversa; da questa doppia reciproca diffusione si ottiene una zona di neutralizzazione; una zona che potremmo chiamare di sfumatura fra ecto— ed entoderma.

Non è da credere che tutte le particolarità strutturali debbano rispecchiare l'esistenza di questa zona; che le cellule dell'epitelio del tubo digerente debbano ad esempio presentare tutti i gradi morfologici di passaggio da cellule mesointestinali a postintestinali.

Il limite fra ento— ed ectoderma è netto per ciò che riguarda la struttura delle cellule dell'epitelio del canale digerente; per evidenti ragioni meccaniche strettamente connesse con la normale fisiologia della digestione. Non si potrebbe formare valvola pilorica, se le cellule intestinali subissero morfologicamente un lento passaggio dalla struttura meso— alla postintestinale.

Ma l'esistenza di questa zona neutra, alla soglia fra ecto— ed entoderma, è dimostrata chiaramente dalla presenza di organi la cui origine può apparentemente oscillare dall'uno all'altro foglietto, come avviene per i malpighiani.

Altra spiegazione per il fatto osservato non credo si possa trovare.

Biologia. — *Azione dei raggi di Wood sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e di E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

È noto da tempo come le radiazioni luminose, e soprattutto quelle ultraviolette, possiedono delle proprietà fisiologiche e biologiche ben definite che sono suscettibili di diverse applicazioni.

Noi ci siamo proposti di riferire in questa Nota i primi risultati ottenuti sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante sotto l'azione dei raggi ultravioletti, ed in modo particolare di quella regione dell'ultravioletto che va sotto il nome di *raggi di Wood* ($\lambda = 3300 \text{ \AA} - 3900 \text{ \AA}$).

Abbiamo potuto constatare nelle nostre prime esperienze come le diverse regioni dell'ultravioletto non abbiano identica azione, così i raggi ultravioletti brevi, i raggi ultravioletti lunghi, i raggi ultravioletti totali emessi dalla lampada di quarzo esercitano in grado diverso un'azione ritardante sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante; anche esposizioni molto brevi di 5-10-15 m. al giorno e a 50 cm. o ad un metro di distanza, arrestano lo sviluppo e uccidono le piante. Si osserva invece che

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1929.

una irradiazione minima (1 minuto al giorno) con la luce ultravioletta totale emessa dalla lampada di quarzo, stimola l'accrescimento delle piante quando venga data in direzione, e a distanza adatta.

Ci riserviamo di dare in altra Nota una relazione estesa su questo argomento.

La luce di Wood invece esercita un'azione stimolante sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante. Nei primi giorni di germinazione, l'azione esercitata dai raggi di Wood non si manifesta in modo molto sensibile, i campioni irradiati si mantengono di poco superiori a quelli testimoni. L'azione più spiccatamente favorevole si ha durante i primi giorni dello sviluppo della piantina, dopo il decimo giorno circa, l'azione favorevole torna a diminuire.

Noi abbiamo eseguito numerosissime esperienze sottoponendo semi di piante diverse all'azione dei raggi di Wood, a distanza diversa della sorgente luminosa e per una durata di tempo diversa.

I raggi di Wood agiscono favorevolmente sullo sviluppo delle piantine quando queste vengano irradiate per un tempo variabile da 15 minuti a qualche ora, a distanza uguale o superiore a 50 cm. ed in linea obliqua (notiamo però come i risultati raggiunti non sieno proporzionali alla durata dell'esposizione).

Se si sottopongono invece i semi in germinazione, all'azione della luce di Wood a breve distanza, dalla sorgente luminosa ed in modo che i raggi vengano a colpire i semi perpendicolarmente o quasi, si osserva per durata di irradiazioni superiori ai 15 minuti un notevole ritardo sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.

Noi ci siamo fermati nelle nostre esperienze ad irradiazioni di 15 minuti 30 minuti alla distanza di 50 cm., in linea obliqua, ottenendo risultati soddisfacenti; questa durata di irradiazione non altera per nulla la vita normale della pianta, essa cresce solo più rapidamente e si presenta più robusta delle piante testimoni.

Una irradiazione di 30 minuti al giorno è suscettibile, di applicazione pratica (soprattutto per i fioricultori).

Tecnica.

La lampada usata nelle nostre esperienze è una lampada a mercurio « Original Hanau » munita del comune filtro di Wood.

I germinatoi contenenti i semi da irradiare venivano posti a distanza di 50 cm. in linea obliqua (diagonale di 50 cm. di un quadrato) dalla sorgente luminosa; *durata dell'esposizione*: 30 minuti al giorno.

Le esperienze furono eseguite su semi di piante diverse: semi di orzo, di grano, di granoturco, di fagioli, di piselli, di ceci, di senapa e su glomeruli di barbabietola. I semi venivano posti in germinatoi su substrato di

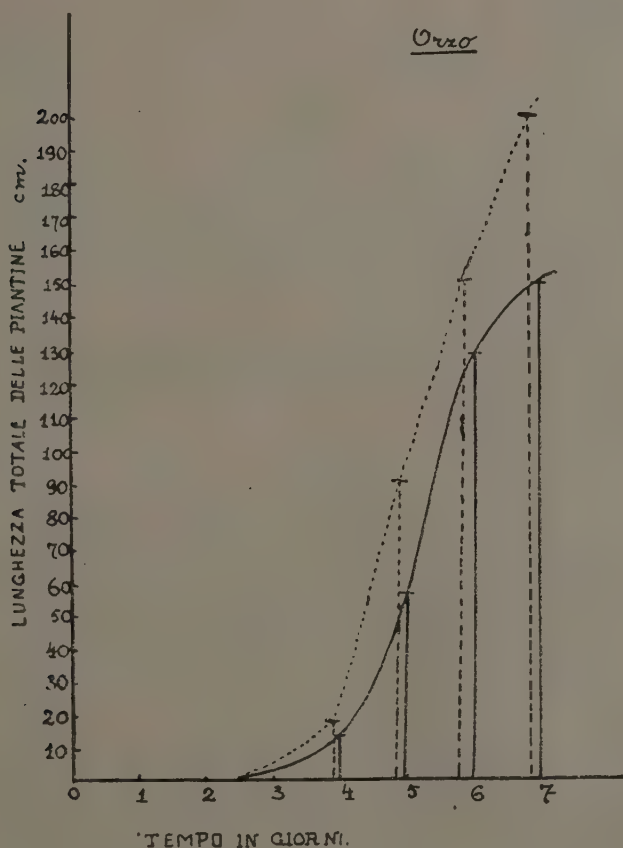
cotone idrofilo inumidito, al settimo giorno circa si aggiungeva in tutti della terra onde poter continuare a seguire l'ulteriore sviluppo delle piante.

L'azione esercitata dalla luce di Wood veniva seguita, osservando nei primi giorni il numero dei semi germinati, poi lo sviluppo aereo totale delle piantine, infine la differenza di peso delle piantine stesse.

Riportiamo in tabella tutti questi dati, che ci sembra possano dare forse meglio delle fotografie da noi fatte, una visione completa di quanto abbiamo osservato.

Riportiamo le esperienze relative alle seguenti piante: orzo, fagiolo, pisello, mais.

N. 1



Esperienza n. 1.

ORZO.

100 semi di orzo su substrato di cotone idrofilo inumidito
(t. media 18° C).

100 semi di orzo seminati al giorno 0	Prova di confronto		Luce di Wood	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine
1° giorno	—	—	—	—
2° »	4	—	6	—
3° »	9	—	11	—
4° »	31	13 cm.	40	18 cm.
5° »	—	55 »	—	90 »
6° »	—	129 »	—	152.5 »
7° »	—	150 »	—	200 »

Al settimo giorno, abbiamo aggiunto della terra, ed abbiamo continuato il trattamento, l'orzo irradiato continua a mantenere la distanza acquistata rispetto alla prova di confronto. Dopo 12 giorni le piantine vennero tagliate rasente terra e pesate:

peso totale delle piantine di orzo della prova di confronto . . . gr. 5
 » » » » » irradiato con luce di Wood . . » 6.5

Esperienza n. 2.

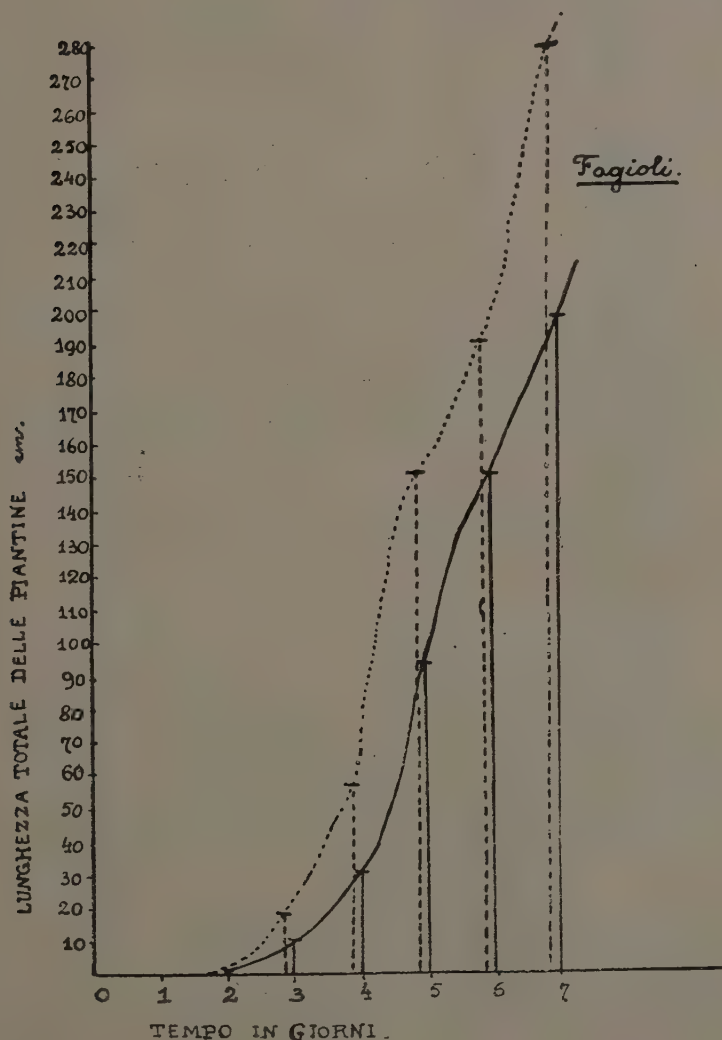
FAGIOLI.

50 semi di fagiolo seminati al giorno 0	Prova di confronto		Luce di Wood	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine
1° giorno	4	—	7	—
2° »	10	—	17	—
3° »	17	10 cm.	21	18 cm.
4° »	25	30 »	30	56 »
5° »	—	94 »	—	150 »
6° »	—	150 »	—	190 »
7° »	—	200 »	—	280 »

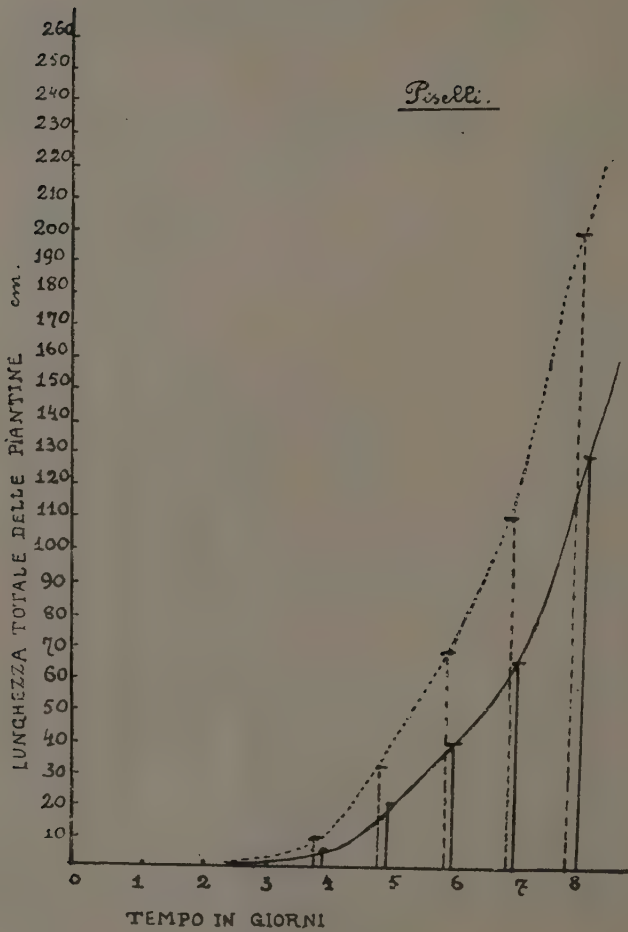
Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento, i fagioli irradiati continuano a mantenere la distanza acquistata rispetto alla prova di confronto. Dopo 12 giorni le piantine vennero tagliate rasente terra e pesate.

peso totale delle piantine di fagiolo della prova di confronto . . gr. 12.4
 » » » » » » irradiate con luce di Wood . » 14

N. 2



N. 3



Esperienza n. 3.

PISELLI.

25 semi di piselli seminati al giorno 0	Prova di confronto		Luce di Wood	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine
1° giorno	9	—	12	—
2° »	17	—	23	—
3° »	19	1 cm.	23	3 cm.
4° »	—	4 »	—	7 »
5° »	—	20 »	—	32 »
6° »	—	39 »	—	68 »
7° »	—	65 »	—	110 »
8° »	—	130 »	—	200 »
9° »	—	240 »	—	360 »

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento, i piselli irradiati continuano a crescere mantenendo la distanza rispetto alla prova di confronto. Dopo 12 giorni le piantine vennero tagliate rasente terra e pesate:

peso totale delle piantine di pisello della prova di confronto . . gr. 9
 » » » » » » irradiate con luce di Wood . » 10.8

Esperienza n. 4.

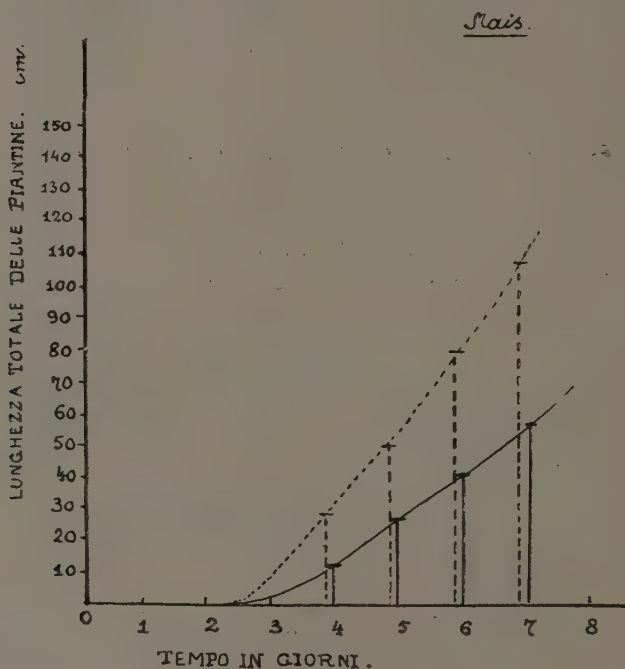
MAIS.

25 semi di mais seminati al giorno 0	Prova di confronto		Luce di Wood	
	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine	Numero di semi germinati	Lunghezza totale delle piantine
1° giorno	—	—	—	—
2° »	4	—	9	—
3° »	8	—	13	—
4° »	10	13 cm.	13	27 cm.
5° »	—	26 »	—	50 »
6° »	—	40 »	—	80 »
7° »	—	56 »	—	104 »

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il trattamento, le piantine di mais irradiate crescono più rapidamente. Dopo 12 giorni le piantine vennero tagliate rasente terra e pesate:

peso totale delle piantine di mais della prova di confronto . . .	gr. 9
» » » » » irradiate coi raggi di Wood . . .	11

N. 4



Conclusioni:

La luce di Wood esercita un'azione favorevole sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante quando si procede ad una irradiazione variabile da 15 minuti a qualche ora al giorno.

Buoni risultati si ottengono esponendo i semi in germinazione e le piantine, ad una irradiazione di 30 minuti al giorno, alla distanza di 50 cm. dalla lampada, in senso obliquo (diagonale di un quadrato).

L'azione della luce di Wood è particolarmente efficace, nel primo periodo di crescita delle piantine.

Le piantine crescono più numerose, più robuste e sono più alte di quelle delle prove non irradiate e raggiungono un peso maggiore.

Biologia. — *Prove di confronto fra l'azione esercitata dalle onde elettro-magnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) e dal circuito oscillante Lakhovsky, sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

In due Note precedenti ⁽²⁾ abbiamo posto in evidenza, come il circuito oscillante Lakhovsky eserciti un'azione favorevole sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.

Questa interessante constatazione, ci ha spinto a rivolgere il nostro studio, sull'azione che possono esercitare in questo senso le onde elettromagnetiche ultracorte, e precisamente di lunghezza d'onda $\lambda = 2-3$ m., questa lunghezza d'onda è quella fondamentale propria del circuito oscillante Lakhovsky ⁽³⁾.

Abbiamo potuto osservare così, in base ad una serie di esperienze di cui diamo relazione in questa Nota, come tali onde elettromagnetiche esercitino effettivamente un'azione molto favorevole sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.

Vi è analogia fra l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche $\lambda = 2-3$ m., e quella esercitata dal circuito oscillante Lakhovsky, l'azione delle prime, è però superiore all'azione del circuito oscillante Lakhovsky, anche con esposizione molto breve, e la differenza aumenta sempre più per durate di esposizione crescenti.

Così le piante sottoposte per una diversa durata di tempo alla influenza delle onde elettromagnetiche ultracorte mostrano una maggiore rapidità di sviluppo e questo aumento con l'aumentare del tempo di esposizione.

Noi abbiamo fatto variare la durata delle esposizioni, durante le prove preliminari da 30 minuti a 120 minuti giornalieri (120 minuti di esposizione giornaliera venivano suddivisi in quattro tempi di 30 minuti ciascuno distribuiti ad intervalli nel periodo di 24 ore).

La posizione e la distanza dei semi e delle piante, rispetto al Radio-oscillatore ha pure una influenza notevole, così il Radio-oscillatore esercita un'azione diffusa efficace entro un raggio di 10 metri e nella stessa zona, l'azione non decresce proporzionalmente con l'aumentare della distanza dell'oscillatore, l'effetto è maggiore nelle regioni dei ventri minore nelle

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1929.

(2) G. MEZZADROLI-E. VARETON, *Azione esercitata da un circuito metallico oscillante sulla germinazione dei semi.* « Rendic. Acc. dei Lincei », 1929, vol. IX, serie 6^a, fasc. 4; Id., *Ulteriori ricerche sull'azione esercitata dal circuito oscillante Lakhovsky sulla germinazione dei semi e sul loro potere catalasico.*

(3) G. LAKHOVSKY, *L'origine de la vie. La radiation et les êtres vivants.* Ed. Nilson, Paris.

regioni dei nodi. L'azione più forte si ha nella vicinanza immediata dell'oscillatore.

In generale abbiamo sempre osservato, nelle nostre condizioni di esperienza, che l'effetto migliore viene ottenuto nei punti di maggior intensità delle onde elettromagnetiche.

Tecnica.

Il Radio-oscillatore usato nelle nostre esperienze era un oscillatore di Mesney, modificato ⁽¹⁾.

I germinatoi e le piantine venivano poste semplicemente vicino all'oscillatore, la durata di esposizione veniva mantenuta a 90 minuti al giorno suddivisi in 3 tempi di 30 minuti ciascuno e così distribuiti: 1° tempo: 9-9.30; 2° tempo: 15-15.30; 3° tempo: 19-19.30.

Le prove di confronto venivano sempre allontanate quando il Radio-oscillatore entrava in azione, in modo che non risentissero l'influenza delle onde.

Riportiamo nelle tabelle unite i risultati ottenuti in queste esperienze eseguite su semi di orzo, di fagiolo, di pisello, di granoturco, ponendo contemporaneamente in evidenza l'azione esercitata dal circuito oscillante Lakhovsky, sui semi e sulle piante poste nelle medesime condizioni. (Prove contemporanee che furono eseguite durante i mesi di maggio e giugno). (Riportiamo la media dei dati di numerose esperienze).

Per porre chiaramente in evidenza l'azione risentita dai semi e dalle piante abbiamo contato il numero dei semi germinati durante i primi giorni, poi misurata la lunghezza totale dello sviluppo aereo delle piantine, ed infine il peso totale delle piante stesse.

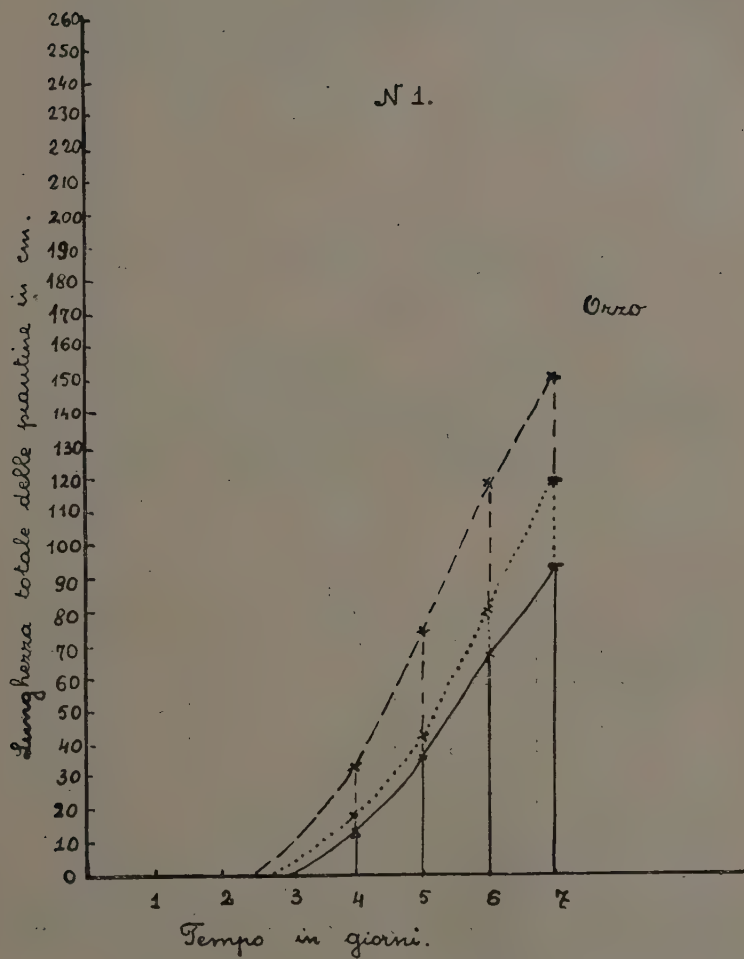
Esperienza n. 1.

ORZO.

50 semi di orzo seminati su cotone idrofilo inumidito (t. m. = 21° C.).

50 semi di orzo seminati al giorno 0	Confronto		Circuito oscillante Lakhovsky		Oscillatore $\lambda = 2.8$ m.	
	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno . . .	—	—	—	—	—	—
2° » . . .	—	—	—	—	—	—
3° » . . .	4	—	6	—	10	—
4° » . . .	10	13 cm.	13	18 cm.	15	34 cm.
5° » . . .	15	32.5 »	17	40 »	23	71.5 »
6° » . . .	20	67.5 »	21	80 »	27	118 »
7° » . . .	24	104 »	26	120 »	30	152.5 »

(1) G. MONTÙ, *Radiotelegrafia e Radiotelefonía*. Ed. Hoepli, Milano.



Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il diverso trattamento delle piantine, che crescono continuando a mantenere la distanza.

Dopo 7 giorni le piantine furono tagliate rasente a terra e pesate.
 Peso totale delle piantine di orzo della prova di confronto . gr. 3.6
 » » » » » sotto l'azione del circuito
 oscillante Lakhovsky . » 3.9
 » » » » » sotto l'azione dell'oscilla-
 tore » 5.1

Esperienza n. 2.

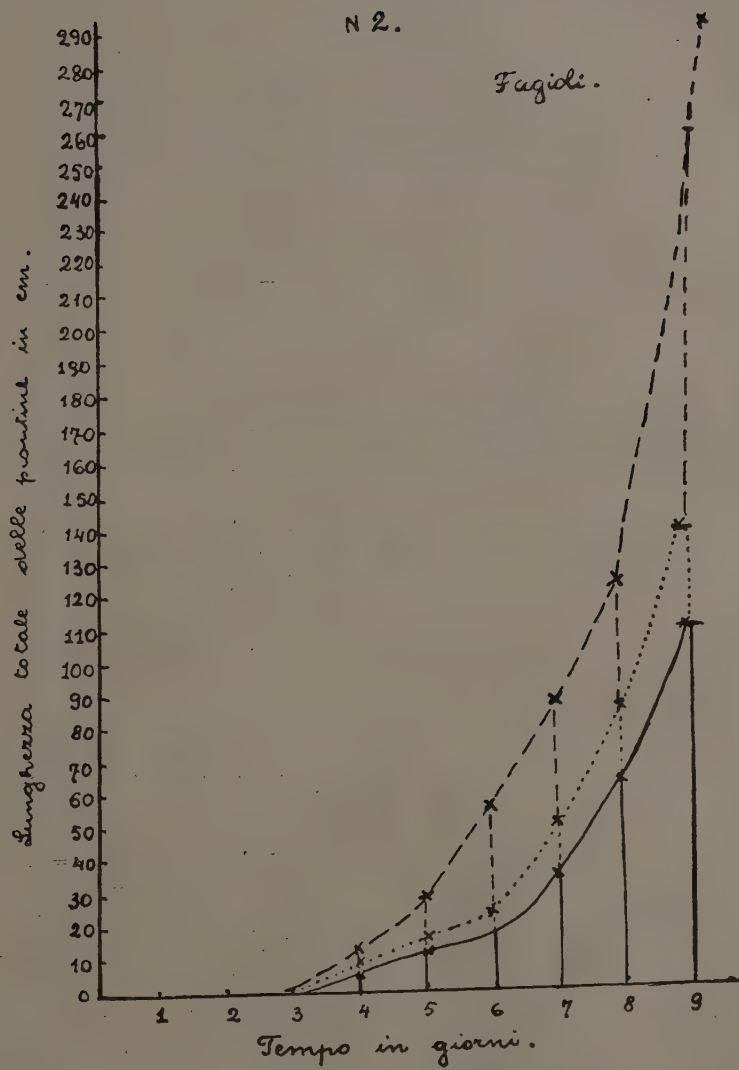
FAGIOLI.

25 semi di fagiolo seminati su substrato di cotone idrofilo inumidito
 (t. m. = 21° C.).

25 semi di fagiolo seminati al giorno 0	Confronto		Circuito oscillante Lakhovsky		Oscillatore $\lambda = 2.8$ m.	
	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno . . .	—	—	—	—	—	—
2° » . . .	4	—	4	—	5	—
3° » . . .	7	—	8	—	9	—
4° » . . .	9	4 cm.	9	5 cm.	10	7.5 cm.
5° » . . .	10	12 »	12	16 »	16	25 »
6° » . . .	17	16 »	19	24 »	22	46 »
7° » . . .	—	32 »	—	48 »	—	88 »
8° » . . .	—	64 »	—	85 »	—	122 »
9° » . . .	—	110 »	—	150 »	—	300 »

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il diverso trattamento delle piantine, che crescono continuando a mantenere la distanza.

Dopo 7 giorni le piantine furono tagliate rasente a terra e pesate.
 Peso totale delle piantine di fagiolo della prova di confronto gr. 5
 » » » » » sotto l'azione del circuito
 oscillante Lakhovsky . » 6.5
 » » » » » sotto l'azione dell'oscilla-
 tore » 9.4



Esperienza n. 3.

PISELLI.

25 semi di pisello seminati su substrato di cotone idrofilo inumidito
(t. m. = 21° C.).

25 semi di pisello seminati al giorno 0	Confronto		Circuito oscillante Lakhovsky		Oscillatore $\lambda = 2.8$ m.	
	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno . . .	—	—	—	—	—	—
2° » . . .	6	—	7	—	9	—
3° » . . .	9	—	11	—	12	—
4° » . . .	10	2 cm.	12	6 cm.	13	12 cm.
5° » . . .	14	6 »	18	14 »	20	29 »
6° » . . .	—	50 »	—	74 »	—	113 »
7° » . . .	—	110 »	—	150 »	—	210 »

Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il diverso trattamento delle piantine, che crescono continuando a mantenere la distanza.

Dopo 7 giorni le piantine furono tagliate rasente a terra e pesate.

Peso totale delle piantine di pisello della prova di confronto gr. 4

» » » » » » sotto l'azione del circuito
oscillante Lakhovsky. » 4.9

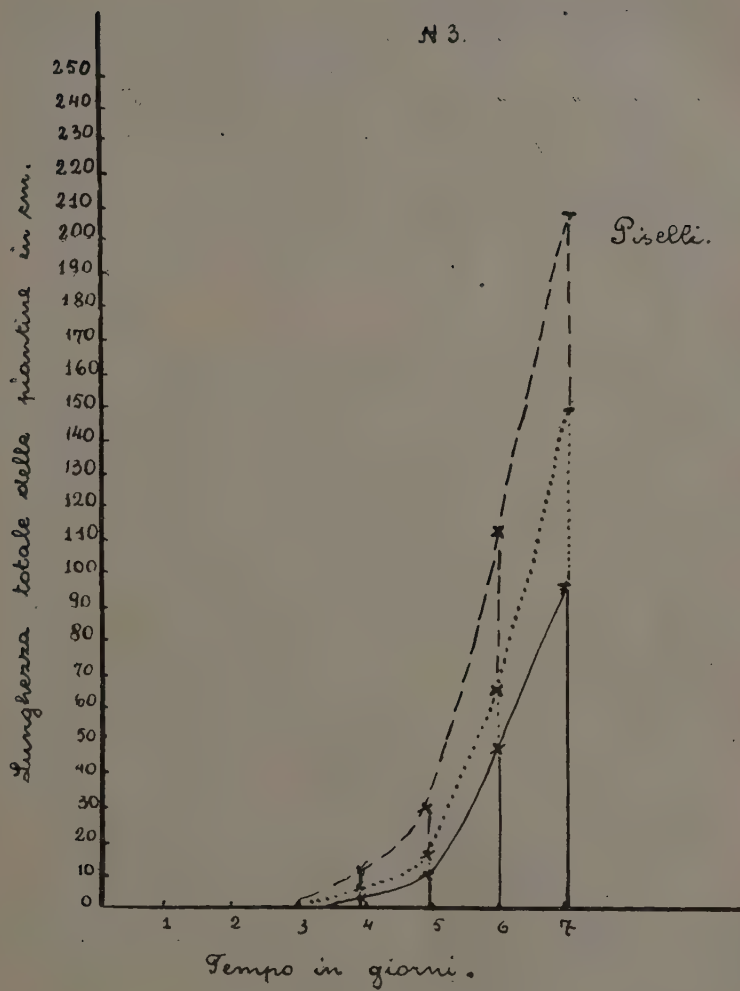
» » » » » » sotto l'azione dell'oscil-
latore. » 6.8

Esperienza n. 4.

MAIS.

50 semi di mais seminati su substrato di cotone idrofilo inumidito
(t. m. = 21° C.).

50 semi di mais seminati al giorno 0	Confronto		Circuito oscillante Lakhovsky		Oscillatore $\lambda = 2.8$ m.	
	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.	Num. di semi germi- nati	Lunghezza totale delle piantine in cm.
1° giorno . . .	—	—	—	—	—	—
2° » . . .	8	—	10	—	15	—
3° » . . .	16	—	20	—	23	—
4° » . . .	23	28 cm.	27	30 cm.	30	37 cm.
5° » . . .	—	44 »	—	50 »	—	56 »
6° » . . .	—	60 »	—	68 »	—	90 »
7° » . . .	—	119 »	—	130 »	—	165 »



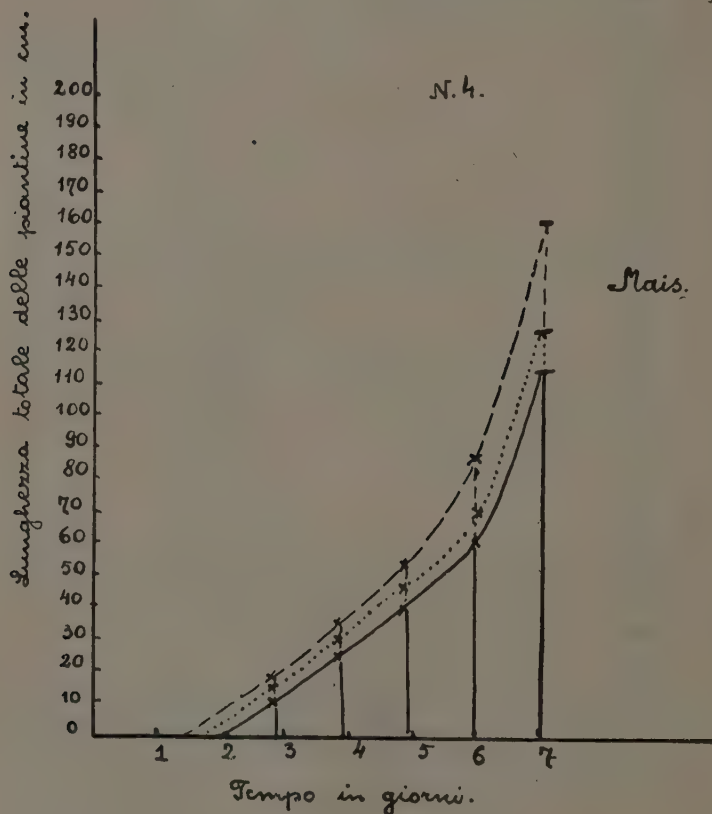
Al settimo giorno abbiamo aggiunto della terra ed abbiamo continuato il diverso trattamento delle piantine, che crescono continuando a mantenere la distanza.

Dopo 7 giorni le piantine furono tagliate resente a terra e pesate.

Peso totale delle piantine di mais della prova di confronto. gr. 9

» » » » » » sotto l'azione del circuito
oscillante Lakhovsky „ 9.8

» » » » » » sotto l'azione del Radio-
oscillatore » 12.5



Osservazioni:

Tutti i dati riportati e le fotografie unite, pongono in evidenza l'azione favorevole esercitata, sia dal circuito oscillante Lakhovsky, che dalle onde ultracorte del Radio-oscillatore, sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante,

Si osserva così un aumento nelle germinabilità dei semi, le piantine crescono più rapidamente e più numerose, e si mostrano più vigorose (stelo più grosso e turgido, foglie più grandi) la crescita è del tutto normale.

L'azione esercitata in questo senso dal circuito oscillante Lakhovsky è come abbiamo ricordato inferiore di quella del Radio-oscillatore; sotto l'influenza di questo le piantine arrivano spesso, nelle condizioni di esperienza citate, ad uno sviluppo doppio di quello delle piantine di confronto.

Abbiamo potuto osservare inoltre durante le nostre esperienze, che mentre il Radio-oscillatore esercita un'azione costante e proporzionatamente efficace, l'azione esercitata dal circuito oscillante Lakhovsky è variabile e l'effetto favorevole che esso esercita nelle diverse esperienze, oscilla entro determinati limiti, pur mantenendosi sempre favorevole.

Conclusioni.

Abbiamo voluto osservare l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche a $\lambda = 2-3$ m. sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante, e siamo arrivati alle seguenti conclusioni:

1. Le onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda $\lambda = 2-3$ m. esercitano un'azione favorevole sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.

2. Vi è analogia fra l'azione esercitata da queste onde e quella del circuito oscillante Lakhovsky.

3. L'azione delle onde ultracorte $\lambda = 2-3$ m. è però superiore a quella del circuito oscillante, l'effetto favorevole esercitato è in funzione dell'intensità delle onde stesse.

4. L'azione del Radio-oscillatore ($\lambda = 2-3$ m.) è più costante di quella del circuito oscillante Lakhovsky.

Embriologia sperimentale. — *Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi.* — I. *Radiosuscetibilità differenziale dei vari stadi embrionali (Anuri)*⁽¹⁾ Nota⁽²⁾ di P. PASQUINI e G. MELDOLESI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sull'azione biologica delle radiazioni, la legge di Bergonié e Tribondeau (1906) riassume, tuttora, quel che si sa di certo sulle modificazioni subite dagli elementi cellulari animali e vegetali, in seguito all'azione dei raggi Röntgen e del radio. Tali modificazioni sono in stretta relazione con l'intensità della radiazione, con la durata di essa, con la temperatura, la fase del metabolismo cellulare, la permeabilità delle cellule, ecc.

Varie teorie sono state emesse fin dal 1896, per spiegare gli effetti delle radiazioni Röntgen e radium sugli organismi, ma soltanto dopo le ricerche degli Hertwig (1910, 1913), si incominciò a porre lo studio dei fenomeni su severe basi sperimentali.

Per il problema da noi studiato ricordiamo (sebbene quest'ipotesi debba ormai essere scartata) come dalle ricerche di Schwarz (1903), sull'embrione di pollo e degli Anfibi, sembrasse che gli effetti delle radiazioni fossero dovuti alla loro azione sulle lecitine, che, modificandosi in prodotti di disintegrazione (*colina*), avrebbero avvelenato il plasma cellulare, alterando così il normale sviluppo. Nelle ova di *Rana*, infatti, le cellule vitelline sono le prime ad essere distrutte dalle radiazioni: così dalle ricerche di A. Schaper (1904).

Le ricerche degli Hertwig (O. e G., 1911), portarono i più notevoli contributi alla conoscenza della biologia delle radiazioni, dimostrando ch'esse agiscono selettivamente sulla sostanza nucleare, influenzando profondamente i cromosomi. Ed agli Hertwig, Oscar (1910, 1911, 1913), Gunther (1911, 1913, 1918) e Paula (1913, 1917, 1920), spettano le classiche esperienze sulla ginogenesi, sulla fecondazione parziale, sulla cosiddetta *radium-parthenogenesis* negli Anfibi, nei Pesci, negli Echinodermi, i cui risultati, ottenuti irradiando gli spermî e le ova e operando poi la fecondazione, misero in luce la suscettibilità particolare dei cromosomi dei nuclei ♂ e ♀, che si rivela specialmente durante la divisione cellulare.

Numerosi lavori, sui quali ci è qui impossibile riferire, seguirono quelli di O. Hertwig e dei suoi allievi e nuovi risultati furono aggiunti dalle ricerche di C. Packard (1914) sulla fecondazione di *Nereis* e di *Chaetopterus* (1918);

(1) Dall'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1929.

sulla suscettibilità delle cellule (*Paramecium*) alle radiazioni in relazione alle variazioni di temperatura e della permeabilità cellulare (1924); di O. L. Mohr (1919) sulla spermatogenesi di un ortottero; di Cesare Artom (1922, 1923) sulla spermatogenesi dimorfa di *Paludina vivipara*. Con queste ricerche l'autore dimostrava una suscettibilità differenziale dello spermatocito oligopirenico nelle varie fasi del metabolismo e nelle varie stagioni dell'anno; il comportamento diverso della spermatogenesi normale (eupirenica), che reagisce alle radiazioni soltanto sul finire della spermatogenesi nelle fasi di spermatidio. L'Artom giungeva così, a risultati di dominio più generale dimostrando come nel complesso cromosomico del nucleo degli spermatidi, soltanto alcuni cromosomi erano alterati dall'irradiazione.

Premesse queste brevi notizie storiche, la legge di Bergonié e Tribondeau si può integrare in base alle nuove conoscenze acquisite per i recenti dati sperimentali; ed i fatti principali, sull'azione biologica delle radiazioni, si possono così riassumere:

Le radiazioni (*Röntgen* e *radium*) rappresentano stimoli altamente specializzati per la crescita dei tessuti fra i quali risentono particolarmente quelli a rapido accrescimento. I tessuti notevolmente specializzati e differenziati in alto grado, come il tessuto nervoso e quello muscolare, non sono suscettibili alle radiazioni se non negli stadi precoci del loro differenziamento; a quest'azione reagiscono invece, modificandosi, gli epiteli germinativi e le cellule germinali. In altre parole, gli elementi cellulari sono tanto più radiosensibili, quanto meno sono differenziati, quanto più a lungo dura il processo di divisione cellulare, quanto più attivo è tale processo.

Nello sviluppo embrionale, gli stadi di precoce determinazione e di differenziamento primario sono quelli che più sono alterati dalle radiazioni: in questi stadi i territori presuntivi degli organi non sono ancora prelocalizzati.

Durante il differenziamento tardivo degli abbozzi degli organi, la radiosuscettibilità delle cellule dell'embrione diminuisce gradatamente.

Le esperienze di C. R. Bardeen ⁽¹⁾ e di W. Grasnik ⁽²⁾ sugli effetti delle radiazioni sulle ova e i primi stadi di sviluppo degli Anfibi debbono, a questo proposito, tenersi presenti: così le ricerche di Jan Tur ⁽³⁾ sulle ova di pollo e di *Scyllium* che, irradiate in stadi precedenti alla gastrulazione, producono blastodermi senza embrione o embrioni anidiani.

I fattori che causano queste alterazioni del normale sviluppo, erano ancora ignoti quando O. Hertwig ⁽⁴⁾ dimostrò che le stesse alterazioni della normale embriogenesi e morfogenesi si verificavano, negli Anfibi, non sol-

(1) C. R. BARDEEN in « Jour. Exper. Zool. », vol. IV, 1907; ed in « Anat. Rec. », vol. III, 1909.

(2) W. GRASNIK in « Arch. f. mikr. Anat. ». Bd. 85, 1914.

(3) JAN TUR in « Cpt. rend. des seances de la Soc. de Biol. », 1904 ed in « Arch. d. Zool. exp. et génér. », vol. V, 1906.

(4) O. HERTWIG in « Arch. f. mikr. Anat. ». Bd. 77, 1911.

tanto sottoponendo alle radiazioni i primi stadi di sviluppo, ma anche le ova insegmentate.

Anche in questo caso gli embrioni che si sviluppano presentano quelle tipiche disarmonie nel differenziamento dell'encefalo, del sistema nervoso in generale, della muscolatura, degli occhi ecc.; mentre i processi organogenetici e istogenetici per i quali si origina la corda, la vescicola otica, l'epidermide, presentano un decorso quasi normale.

Sulla base di questi reperti, si fonda la teoria di Gunther Hertwig (1911) sull'effetto tardivo del radio (*Radiumspäteffektes*)⁽¹⁾, secondo la quale all'azione nociva primaria che esercitano le radiazioni sul nucleo dell'ovo, segue un'alterazione secondaria del complesso nucleo-plasmatico così che nelle successive divisioni, le cellule risultano vieppiù alterate quanto più differenziate esse sono e quanto più specializzata diviene la loro funzione.

Questi fatti interessano principalmente il problema che ci siamo imposti pel nostro studio. E tale problema è stato così impostato:

Stabilire, in base alle inibizioni o alterazioni che si producono negli embrioni, irradiando le ova di *Rana* nei vari stadi, i limiti, precoci e tardivi, dei processi di determinazione.

Determinare, in fasi molto prossime dei diversi stadi embrionali, la variazione della radiosensibilità dalla fase iniziale dello stadio di blastula, a quella del sollevamento del bottone codale. Su questo lato del problema abbiamo rivolto la nostra attenzione tenendo presente che, con l'approssimarsi del termine della gastrulazione, si vanno perdendo, in alcuni territori del germe, quelle capacità organizzatrici (la cosiddetta *corrente di determinazione*) che risiedono, all'inizio, nel labbro dorsale del blastoporo. E ciò, in forza del fatto — che risalta ormai all'evidenza dalle esperienze di Spemann e della sua scuola sugli *organizzatori* — che il completamento della gastrulazione, segna il cessare dell'attività funzionale dell'*organizzatore del blastoporo*.

Nello studio del nostro problema ci siamo inoltre preoccupati, ciò sembrandoci di notevole importanza, di segnalare il comportamento dei vari stadi embrionali rispetto al momento nel quale si manifestano le alterazioni caratteristiche.

In ciascuno stadio, sottoposto all'esperimento, abbiamo infine cercato di graduare gli effetti delle diverse dosi d'irradiazione onde potere stabilire il *minimum* ed il *maximum* della radiosensibilità, in relazione alla possibile variazione dei gradienti assiali fisiologici nelle varie fasi dell'ontogenesi normale.

Nella scelta della tecnica d'irradiazione ci siamo prefissi lo scopo di ottenere: 1° una radiazione facilmente dosabile nella rigorosa ed esatta misura dei suoi fattori: sorgente irradiante, distanza, tempo, filtraggio; 2° una distribuzione dell'energia *perfettamente uniforme*, su tutto il campo da irra-

(1) G. HERTWIG in « Arch. f. mikr. Anat. ». Bd. 77, 1914 e in « Strahlentherapie », II, 1920.

diare; 3° un numero notevole di ova (scelte tutte accuratamente nello stesso stadio), per ciascun esperimento; 4° una temperatura ambiente costante; 5° posizione di tutte le ova, separate le une dalle altre, *costante*, per tutta la durata della irradiazione.

Come sorgente radiante si ricorse a una determinata quantità di *radon*, racchiusa in 12 tubetti capillari di vetro della lunghezza di 4 cm. ciascuno, fornita e misurata per ciascun esperimento, dal R. Laboratorio Fisico della Sanità pubblica. Questi tubetti, non filtrati, disposti a graticola su due file di 6 tubetti perpendicolari fra loro, venivano fissati con paraffina ad un cartoncino in quadrato di 4×4 ed a ugual distanza l'uno dall'altro. Disposte così le cose, venne calcolato sufficiente 1 cm. di aria per ottenere su tutta una superficie quadrata pure di 4×4 un'azione rigorosamente omogenea con l'incrocio delle radiazioni dirette ed incidenti. La distanza

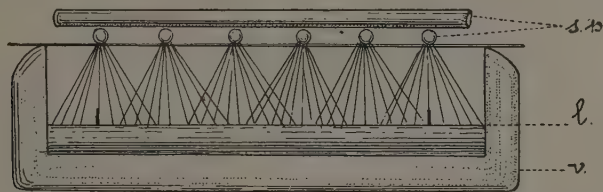


Fig. 1. - Schema della disposizione dei tubetti di *radon* (*s. p.*), sulla vaschetta (*v*) contenente le ova disposte al di sotto del pelo dell'acqua (*l*). La zona compresa fra i due trattolini neri verticali, è quella occupata dalle ova.

quindi: *sorgente radiante-ova*, venne sempre mantenuta di 1 cm., mentre lo spessore dell'acqua che permetteva il galleggiamento delle ova, orientate secondo l'asse polare, risultò pari a mm. 3,5 (vedi figura).

La quantità di *radon* ed il tempo d'esposizione variarono nei diversi esperimenti. Un'idea approssimativa delle dosi fatte agire sulle ova (esprese nel prodotto *intensità* \times *tempo*) può trarsi dall'esame della unita tabella:

Dose	1 ^a	da	2	a	3	millicurie	ora
»	2 ^a	»	6	»	8	»	»
»	3 ^a	»	11	»	13	»	»
»	4 ^a	»	15	»	17	»	»
»	5 ^a	»	19	»	20	»	»
»	6 ^a	»	23	»	24	»	»
»	7 ^a	»	27	»	28	»	»
»	8 ^a	»	35	»	37	»	»
»	9 ^a	»	40	»	42	»	»
»	10 ^a	»	55			»	»
»	11 ^a	»	80			»	»
»	12 ^a	»	108			»	»

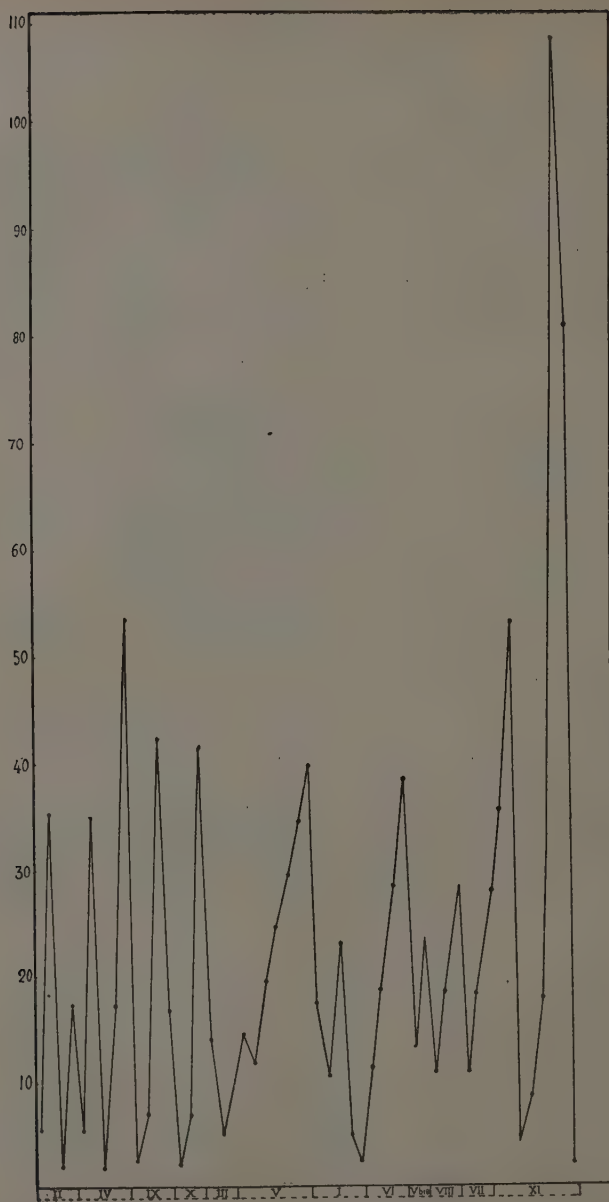


Fig. 2. - Rappresentazione grafica delle dosi di irradiazione, alle quali sono state sottoposte le ova di *Rana esculenta* nei diversi stadi (sulle ordinate i millicurie ora (mch.), sulle ascisse gli stadi).

Il numero delle ova in ciascuna esperienza era pari a 50, disposte in modo che fossero contenute, durante l'irradiazione, in un quadrato 4×4 e quindi tutte nelle stesse condizioni sperimentali. La temperatura, durante gli esperimenti, fu controllata e non variava intorno ai 27° : è noto quanto influisca questo fattore sulla radiosensibilità cellulare. Ciascun gruppo di ova dello stesso stadio è stato quindi sottoposto all'azione dei raggi di *radium* per tempo e con intensità variabili. La dose complessiva d'esposizione (prodotto *intensità* \times *tempo*) variò entro limiti assai estesi (da 2 a 108 mch.), ma tuttavia compresi nelle 12 categorie sopra stabilite (vedi grafico).

Le ova sottoposte alle radiazioni furono scelte in modo da raggrupparle in 11 gruppi corrispondenti alle fasi, più vicine fra loro, dei vari stadi di sviluppo:

I, fase di *morula* giovanissima (64 cellule); II, *morula* (128 cellule); III, *blastula* con emisfero pigmentato esteso poco al disotto dell'equatore; IV, *gastrula* all'inizio; V, *gastrula* alla formazione del solco falciforme dorsale; VI, fase di estensione del solco; VII, solco falciforme esteso interamente intorno al tappo; VIII, fase di riduzione e approfondimento del tappo vitellino; IX, tappo vitellino ridottissimo; X, fase d'insorgenza della piastra midollare, a rotazione avvenuta dell'ovo, al termine della gastrulazione; XI, stadio di bottone codale.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Sottoposte all'azione di 2-3 mch., gli stadi di sviluppo IX e X non risentono alcun effetto della irradiazione, al contrario degli stadi I e II che sono già radiosensibili, manifestando una tendenza al rallentamento del ritmo di sviluppo con una lieve inibizione del processo di gastrulazione. Gli embrioni manifestano alterazioni superficiali che conducono alla formazione di edemi diffusi.

Sottoposte all'azione di 6-8 mch., le ova sono radiosensibili assai precocemente negli stadi I e II, ma le alterazioni, a carattere esclusivamente superficiale, si producono, negli embrioni tardivamente, sebbene lo sviluppo di essi sia ritardato rispetto ai controlli normali. Le ova del III stadio ricevono dall'irradiazione un arresto nell'approfondimento del tappo vitellino che in parte si disfa, in parte viene poi riassorbito. Successivamente il blastoporo si chiude, ma gli embrioni risultano profondamente alterati per anomalie profonde che si localizzano alla regione cefalica. Sulla prima fase della gastrulazione (IV), la irradiazione provoca un momentaneo rallentamento del processo di gastrulazione, con una tendenza del tappo vitellino a non essere riassorbito, fino nella fase iniziale dello stadio di piastra midollare. Successivamente gli embrioni riacquistano il ritmo regolare di sviluppo e non palesano alcuna anomalia; la stessa irradiazione, negli stadi IX e X, non sembra avere alcun effetto.

Sottoposte all'azione di 11-13 mch., le ova del I stadio reagiscono assai precocemente e le anomalie si verificano intorno allo stadio di bottone

codale; divengono poi più evidenti negli stadi successivi, in corrispondenza dei quali gli embrioni vanno soggetti ad una forte mortalità. Le ova dello stadio III appaiono più sensibili a questa dose che quelle dello stadio I e le alterazioni sono assai precoci con fortissime inibizioni cefaliche e caudali degli embrioni. Di questi, moltissimi sono incapaci a proseguire nello sviluppo. Nello stadio V, irradiato, la gastrulazione viene rallentata, ma il processo si compie regolarmente seguito soltanto da alterazioni minime, negli stadi avanzati. Le ova dello stadio VI si comportano come le precedenti con alterazioni lievi negli stadi tardivi, ma forse più gravi che quelle del lotto precedente. L'azione di questa dose di radiazioni è nettamente più spiccata con l'approssimarsi del termine della gastrulazione (stadio VII), e le malformazioni si manifestano negli embrioni, quando insorge la pinna codale. Sugli stadi di tappo vitellino ridotto (VIII) l'irradiazione non produce effetti apprezzabili.

Sottoposte all'azione di 15-17 mch., le ova di tutti gli stadi considerati (I, II, IV, V, IX) reagiscono in modo caratteristico; le alterazioni presentate dagli embrioni, appaiono più precocemente e in maggior grado, quando l'irradiazione colpisce le ova negli stadi I e II, che in parte soccombono. Le anomalie degli embrioni sono localizzate specialmente alla regione cefalica e culminano con la riduzione del capo, l'anofthalmia, e di armonie nel territorio encefalico.

Sottoposte all'azione di 19-20 mch., le ova dello stadio V, non sembrano aver risentito dell'azione prima di raggiungere lo stadio di bottone codale, successivamente al quale, le alterazioni si manifestano sempre più notevoli. Nello stadio VI, durante la gastrulazione, la radiosensibilità diminuisce e gli embrioni si sviluppano normali con lievi alterazioni superficiali, con tendenza all'idrope, ma nessuna apparente inibizione cefalica. Nello stadio VII l'irradiazione provoca un rallentamento dello sviluppo nel periodo immediatamente ad essa successivo, e la formazione tardiva di anomalie non spiccate che si manifestano soltanto dopo la comparsa della pinna codale. Nello stadio VIII lo sviluppo procede regolarmente, ma ritardato, e soltanto; oltrepassato lo stadio di pinna codale, compaiono le malformazioni cefaliche già riferite, nel 50 % dei casi.

Sottoposte all'azione di 23-24 mch. le ova del I stadio seguono uno sviluppo spiccatamente anomalo dal termine della gastrulazione allo stadio di bottone codale, oltre il quale gli embrioni soccombono tutti. Nel V stadio si producono profonde alterazioni cefaliche che compaiono oltre lo stadio di bottone codale, ma senza mortalità sensibile degli embrioni. Le tipiche malformazioni si manifestano più tardivamente se la stessa dose si fa agire con intensità minore per un'esposizione di durata maggiore (V, *bis*).

Sottoposte all'azione di 27-28 mch., le ova di tutti gli stadi considerati (V, VI, VII, VIII) risentono delle radiazioni, notevolmente. L'irradiazione delle giovani gastrule è seguita da malformazioni generalizzate su tutto

il corpo e la maggioranza degli embrioni, tra l'insorgenza del bottone codale e la formazione della pinna, vanno presentando inibizioni di alto grado della regione cefalica che portano, in un'alta percentuale degli embrioni alla morte. Nello stadio VI l'irradiazione sembra essere risentita in minor grado e le anomalie che si riscontrano sono più limitate al capo. Nello stadio VII l'irradiazione arresta temporaneamente l'invaginazione del tappo vitellino e si ha un rallentamento generale dei processi di sviluppo. Le alterazioni cefaliche appaiono in prevalenza nelle fasi che precedono la formazione della pinna codale, oltre il quale stadio gli embrioni muoiono. Allo stadio di tappo vitellino l'irradiazione rallenta visibilmente lo sviluppo, ma le malformazioni, all'infuori di zone edematose sull'epidermide, non si palesano antecedentemente alla chiusura delle pieghe. Più tardi le larve divengono idropiche, presentano movimenti di maneggio, 6/50 muoiono, le altre manifestano alterazioni della coda e inibizioni cefaliche.

Riguardo all'azione della dose VIII (35-37 mch.) sulle ova, abbiamo osservato che essa è specialmente notevole durante la preparazione della gastrulazione. Le blastule oltrepassano stentatamente questa fase dello sviluppo e gli embrioni soccombono dopo la chiusura delle pieghe midollari. All'inizio della gastrulazione la radiosensibilità, per questa dose, si manifesta con inibizione generale dei processi di approfondamento del tappo vitellino, che conduce alla formazione di embrioni anulari, a casi di asintaxia blastoporale e alla permanenza del tappo, talora oltre la fusione delle pieghe midollari. In questo stadio gli embrioni soccombono senza che abbiano avuto luogo i processi di cefalogenesi. Allo stadio di solco falciforme dorsale le ova irradiate giungono a gastrulare e a produrre regolarmente il bottone codale, ma lo sviluppo del capo è notevolmente alterato. Le ova dello stadio VI risentono dell'irradiazione e le malformazioni e le inibizioni cefaliche insorgono oltre il bottone codale. Un alta mortalità si verifica nelle larve oltre lo stadio di pinna codale.

Sottoposte all'azione di 40-42 mch. le ova all'inizio del gastrulazione, subiscono un arresto di sviluppo e le inibizioni appaiono con lo stadio di bottone codale. Le inibizioni si accentuano fino alla morte degli individui. Nello stadio IX, viene arrestata la scomparsa del residuo del tappo vitellino che viene espulso invariabilmente con l'insorgenza delle pieghe midollari. Appaiono assai precocemente le anomalie della regione cefalica e sono frequenti i casi di spina bifida. Sulle piastre midollari l'azione non è mortale, ma le malformazioni sono diffuse al capo, al tronco e alla coda. Le inibizioni del capo sono tuttavia non classificabili fra quelle di alto grado.

La radiazione corrispondente a 55 mch. sulle gastrule giovani, dà invariabilmente il mancato approfondamento del tappo vitellino; anomalie diffuse nella formazione della piastra midollare e nello stadio di *neurula* gli embrioni soccombono. L'arresto di sviluppo accade con la chiusura del blastoporo.

Dall'esame dei risultati sopra trascritti riesce evidente la sensibilità differenziale delle diverse fasi dello sviluppo alle varie dosi di irradiazione.

Ci proponiamo in una Nota successiva di esaminare gli altri lati del nostro problema e il comportamento di questi stadi sottoposti per lungo periodo alle radiazioni di minor intensità, segnalando in pari tempo, il momento dello sviluppo, corrispondente all'insorgere delle alterazioni.

Patologia vegetale. — *Una nuova grave malattia del granturco.* Nota ⁽¹⁾ di M. CURZI, presentata dal Corrisp. L. PETRI.

Una nuova grave infezione è comparsa nel giugno del corrente anno in una cultura di granturco, nei pressi di Pavia, con danni rilevanti, corrispondenti alla perdita di circa l'80 % delle piante.

La malattia si è manifestata con macchie scure alla base del fusto che ben presto si estendevano a tutta la circonferenza, formando, a livello del terreno, una zona necrosata più o meno estesa, non interessante mai il sistema radicale nè la porzione interrata del fusto, aumentata questa da una sensibile rincalzatura delle piante, e nemmeno la parte aerea superiore.

Le piante colpite cadevano facilmente a terra e in tale stato continuavano a vegetare e a conservarsi verdi senza alcun segno di appassimento, malgrado il marciume profondo di una parte del fusto. Ciò è dovuto al fatto che le comunicazioni linfatiche, fra gli organi aerei e i sotterranei, non vengono interrotte dall'infezione, che distrugge il parenchima fondamentale, risparmiando i fasci fibro-vascolari.

Questo modo particolare di presentarsi della malattia, che dipende fra l'altro, dalla struttura delle monocotiledoni, fa rimanere sorpreso il profano, abituato a vedere morire le comuni piante dicotiledoni per una semplice necrosi limitata a un anello di corteccia. Sotto una tale impressione, un arguto agricoltore mi additava le piante malate, dicendomi di essere state colpite da una *morte-viva*; nome che ben si presta a indicare la natura della malattia che atterra la pianta, ma le consente di conservarsi ancora vegeta per un periodo di tempo piuttosto lungo.

Il fusto, nel punto necrosato, presentava il tessuto fondamentale del cilindro centrale disorganizzato, umido, esalante un odore putrido con i fasci ammassati nel mezzo, o quasi liberi, contornati da un micelio bianco sericeo, sovente molto abbondante, di un oomicete, il quale presentava spesso anche gli organi di riproduzione sessuale con oogoni globosi, lisci, forniti di una parete sottile e fecondati da un solo anteridio terminale o intercalare

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1929.

portato da un'ifa diversa da quella dell'organo femminile. Le oospore erano rotonde, di 20-25 μ di diametro, aventi la parete liscia piuttosto spessa e un contenuto protoplasmatico granuloso con una grande guttula oleosa per lo più eccentrica.

Tale parassita è un oomicete terricolo, di rapido sviluppo tanto nelle colture come nell'ospite, quando viene inoculato artificialmente, con un accrescimento in lunghezza delle ife, di circa 2-3 millimetri per ora, alla temperatura ambiente di 20°-25° C. Nelle colture pure produce un micelio aereo abbondante che trasportato, appena sviluppato, nel filtrato acquoso del terreno, dà luogo a una gran quantità di oospore, mentre in acqua distillata o in acqua di fonte sterile, dopo qualche giorno di immersione, dà luogo agli organi di riproduzione agamica.

Le ife zoosporangifere non sono differenziate dalle ife ordinarie del fungo, anzi spesso sono le più semplici, a calibro uniforme e mediocre come nel genere *Aphanomyces* De By, nel quale però non può rientrare per la differenziazione delle zoospore, non interna come in questi oomiceti, ma esterna, in una vescicola che rapidamente si produce all'apice dell'ifa, dietro la pressione esercitata dal protoplasma uscente dallo sporangio. Dopo 10-15 minuti dalla formazione della vescicola si ha la liberazione delle zoospore globulose, biciliate, di 10-14 μ di diametro.

Per i caratteri degli zoosporangi, non differenziati dalle ife ordinarie, il fungo rientra nel genere *Pythium* Pringh. del gruppo *P. gracile* De By. Della sua identificazione riferirò particolarmente in seguito. Per ora mi limito a segnalare la malattia, del tutto nuova per il mais; essa infatti, non si può confondere col marciume radicale del granturco prodotto dal *Pythium arrhenomanes* Drech., descritto in questi ultimi anni negli Stati Uniti d'America ⁽¹⁾, ⁽²⁾. Il parassita da me isolato non ha nulla a che vedere con quello di Drechsler: i soli caratteri degli organi sessuali bastano a differenziarli, senza notare la grande diversità esistente negli organi di riproduzione agamica e nell'azione parassitaria. Infatti, mentre quest'ultimo attacca le radici delle giovani piante di mais, l'altro invece attacca la base del fusto di piante in pieno sviluppo, senza infettare gli organi sotterranei.

Per quest'ultimo fatto, più al *Pythium arrhenomanes* che al mio fungo debbono probabilmente riferirsi le infezioni oomicetiche, non ben definite, segnalate nelle radici del granturco da altri autori ⁽³⁾, ⁽⁴⁾.

(1) DRECHSLER Ch., *Pythium arrhenomanes* n. sp., a Parasite causing Maize Root Rot. « Phytopathology », V. 18, n. 10. pp. 873-875, 1928.

(2) JOHANN H., HOLBERT J. B. and DICKSON J. G., *A Pythium Seedling Blight and Root Rot of Dent Corn*. « Journ. Agric. Res. », V. 37, n. 8, pp. 443-464, 9 fig., 1928.

(3) CLINTON G. P., *New or unusual plant injuries and diseases found in Connecticut, 1916-1919*. « Conn. Agr. Exper. Stat. », Bull. 222, pp. 397-482, 1920.

(4) VALLEAU W. D., KARRAKER P. E. and JOHNSON E. M., *Corn Root Rot a soilborne Disease*. « Journ. Agric. Res. », V. 33, pp. 453-476, 1926.

*
* *

Dato che la malattia non è identificabile con nessun'altra infezione riportata sul mais, come essa ha potuto svilupparsi e da dove proviene il parassita?

Per ora non ho dati sufficienti per rispondere esaurientemente a questa domanda; ma, alcune constatazioni mi hanno portato a stabilire, in modo quasi certo, che l'infezione proveniva da un'altra pianta coltivata l'anno precedente su lo stesso appezzamento di terreno, e precisamente dalla barbabietola, la quale andò soggetta a un grave marciume del fittone, probabilmente riferibile a una di quelle malattie riportate in Germania fin dal 1906 come dovute a ficomiceti dei generi *Pythium* e *Aphanomyces* ⁽¹⁾.

Infatti, l'oomicete da me isolato, nelle inoculazioni artificiali sulla barbabietola, produce un marciume che, in condizioni favorevoli d'ambiente, in meno di due giorni può estendersi a tutta la parte superiore del fittone. Inoltre poi, la manifestazione della malattia solo in quest'anno e dopo la rincalzatura, dopo cioè che il contatto del fusto con la terra era stato esteso anche al disopra del colletto a porzioni tenere e meglio penetrabili dal parassita, prova che l'infezione esistesse già nel terreno e soltanto da qualche anno, altrimenti anche le colture precedenti di granturco che si sono susseguite sul medesimo terreno ogni due anni, sarebbero state danneggiate dalla malattia.

L'infezione non è stata quindi trasmessa al granturco dall'acqua proveniente da probabili campi sconosciuti — come di solito avviene in questi ficomiceti —, perchè il terreno, abbastanza profondo e fresco, non era stato nemmeno irrigato; ma, dal suolo, infettato dalla coltura di barbabietola che ha preceduto il granturco, per quanto finora non mi si sia offerta l'occasione di riscontrare su tale pianta, nelle infezioni naturali, il medesimo parassita.

Sulla barbabietola non sono mai state finora riscontrate in Italia tali infezioni oomicetiche ed è perciò molto probabile che il parassita, che si è sviluppato sul mais, sia stato importato dalla Germania con i semi della pianta.

Il trasporto di questi parassiti — a diffusione terrestre e acquatica — a mezzo dei semi, teoricamente è quasi impossibile; ma non si può ammettere un'origine diversa dell'infezione, quando si pensi che il campo di barbabietola colpito dal marciume derivava appunto da semi provenienti direttamente dalla Germania.

(1) PETERS L., *Zur Kenntnis des Wurzelbrandes der Zuckerrube*. «Berich. Deutsch. Botan. Gesell.», Band XXIV, pp. 323-329, 1906.

Batteriologia industriale. — *I fermenti acidoproteolitici in conceria.* Nota di COSTANTINO GORINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio P. R. PIROTTA.

Già in precedenti lavori ho dimostrato che i fermenti misti « Acido-proteoliti Gorini » offrono non solamente un interesse scientifico ma altresì una portata pratica.

Dal punto di vista scientifico essi hanno, fra l'altro, rivelato due fatti nuovi nel metabolismo batterico: 1° La capacità di attaccare *simultaneamente* gli idrati di carbonio e gli albuminoidi, contrariamente al concetto dominante che la saccarolisi e la proteolisi siano processi antitetici; 2° La capacità di produrre enzimi proteolitici funzionanti, come la pepsina, in reazione acida, contrariamente all'opinione dominante che i batteri siano capaci di digerire gli albuminoidi solamente in reazione alcalina o neutra come la tripsina o l'erepsina.

Nei riguardi pratici io ho già dimostrato l'importanza che i fermenti acidoproteolitici hanno nella maturazione del formaggio e nella conservazione dei foraggi nei silos.

Ora io vado estendendo le mie ricerche ad altri processi fermentativi in cui si compia una proteolisi in reazione acida, vale a dire una digestione anzichè una putrefazione: un caso simile si ha nella fase di macerazione delle pelli in conceria, che va sotto il nome di *purga* o *confit* ⁽²⁾.

La *purga* è un'operazione interposta fra la depilazione e la concia propriamente detta. Per essa le pelli subiscono una serie di processi che si possono riassumere in due: un processo di depurazione dalle sostanze estranee di cui si sono impregnate durante la depilazione, e un processo di parziale solubilizzazione delle sostanze organiche e segnatamente delle materie proteiche, per cui le pelli acquistano una morbidezza particolare; questa solubilizzazione però non deve essere troppo profonda, come succede colla putrefazione, non deve mai intaccare la membrana ialina sottostante allo strato di Malpighi, affine di non alterare il cosiddetto *fiore* della pelle.

Da tempo immemorabile per la *purga* l'empirismo era ricorso all'immersione delle pelli in un'infusione o *confit* di sterco di animali, e in

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

(2) V. le opere di A. MEUNIER, *La tannerie*, Parigi, 1903; J. T. WOOD, *The puering and bathing of the Skins* London, 1912; O. RÖHM, *Beizen in der Gerberei*. « Collegium », 1915, n. 539; W. MOELLER, *Peptisation und Gerbprozess*. « Collegium », 1915, n. 541; G. HUGONIN, « Journal of the Int. Soc. of Leather Trades Chemistry », 1927, nn. 1 e 2; G. ABR, *Ibidem*, 1927, n. 12.

ispecie di cani; questo trattamento però offre molteplici inconvenienti, non solo di indole igienica, ma altresì di indole tecnica, in causa dell'incostanza e della irregolarità della sua azione; tuttocìo per ragioni ovvie ed evidenti. Per cui, tostochè la scienza fece la sua penetrazione nell'industria conciaria, si è pensato di sostituire il trattamento allo sterco con trattamenti razionali. Furono all'uopo proposti trattamenti molto semplici, consistenti in lavaggi addizionati di acidi vari (acidi lattico, butirrico, fosforico, formico ecc.); ma essi, se possono bastare agli effetti della depurazione, non servono agli effetti dell'ammorbidimento delle pelli, per il quale è necessario il soccorso di agenti fermentativi quali sono per l'appunto contenuti nello sterco. Questi agenti sono di due ordini: alcuni sono rappresentati da enzimi ghiandolari di origine intestinale e specialmente pancreatici, altri sono di natura microbica. Entrambi questi agenti formarono oggetto di studio da parte degli autori, che proposero parecchi trattamenti fondati o sull'impiego di estratti ghiandolari o sull'impiego di culture microbiche; sebbene nessun trattamento sia finora riuscito ad uguagliare l'azione complessa dello sterco di cane, tuttavia i trattamenti a base di estratti ghiandolari sono oggi ampiamente adoperati, mentre i trattamenti microbici sono ancora di uso limitato ad alcuni Stabilimenti, specialmente all'estero.

Questa limitazione dei processi microbici trova la sua ragion d'essere nel fatto che per la loro applicazione occorre un personale abbastanza addestrato nella tecnica batteriologica, il che manca nella maggioranza delle Concerie, massime nelle nostrane. Ma detta limitazione appare ancor più giustificata quando si consideri che non si è peranco identificato quale specie e nemmeno quale tipo di batteri convenga adoperare, cosicchè tutto dipende dall'avere la mano felice nella scelta e nella cultura del germe; in altri termini il caso vi giuoca una gran parte.

A dir vero non mancano autori che si siano occupati di isolare e di descrivere batteri adatti alla purga; senonchè nessuno dei germi proposti mostrò di corrispondere alle aspettative, vuoi perchè la loro azione era troppo debole vuoi perchè essa era troppo energica. Ciò deriva, a mio avviso, dal fatto che gli autori si sono fermati ai fermenti semplici, servendosi ora di fermenti semplicemente saccarolitici come i fermenti lattici, ora di fermenti semplicemente proteolitici come i fermenti alcalinoproteolitici o putridogeni, e non hanno pensato di sperimentare i fermenti misti o acidoproteolitici da me svelati nel 1892-94.

Infatti fra i batteri prescelti dai vari autori (Eitner, Wirbel, Popp e Becker, Nördlinger, Villon e soprattutto Wood che isolò ben 90 specie microbiche dallo sterco canino), alcuni funzionano da fermenti lattici (*Bacterium furfuris* α e β , *B. Coli*), altri da alcalino-peptonizzanti se non addirittura da putrescenti (*B. mesentericus*, *B. subtilis*, *B. megatherium*, *B. erodians*). Ora mentre i primi si sono rivelati insufficienti perchè non agiscono sulla sostanza dermica, i secondi si sono rivelati iperattivi perchè intaccano pro-

fondamente la pelle fino a perforarla. E invece, come dicemmo, nella purga deve compiersi bensì una proteolisi, ma questa deve essere debole, disciplinabile, come quella che si verifica per opera di Acidoproteoliti in reazione acida. Ho interrogato in proposito anche molti conciatori e tutti mi affermarono che la miglior purga si ottiene in ambiente leggermente acido, o perlomeno non alcalino.

Di fronte agli insuccessi nell'impiego di singole specie batteriche, gli autori conclusero che nessuna specie basti da sola e che occorra una mescolanza di specie. Ma pur qui sorsero dispareri; alcuni sostenevano che i batteri utili sono i peptonizzanti che si trovano nello sterco fresco (Eitner); altri ritenevano che i batteri utili si formavano nella infusione fecale dopo un mese di fermentazione (Wood), ma che bisogna difendersi dai peptonizzanti, soffocandoli coll'aggiunta di acido solforico o di solfuro di carbonio, prima che subentri la fermentazione putrida. Infine, per eliminare ogni pericolo, si passò a opinare che la presenza di batteri viventi non sia necessaria, e che bastino i loro enzimi; onde si propose di allestire culture greggie di sterco in brodi o in gelatine nutritive e di essiccarle poi nel vuoto in guisa da ottenere polveri contenenti solamente i corpi batterici coi loro prodotti di ricambio, in ogni caso prive di organismi attivi di putrefazione. Al momento dell'uso, queste polveri vengono stemperate in acqua e danno un bagno o *confit* artificiale bell'e pronto, che non richiede una fase di previa maturazione come per il *confit* naturale di sterco; in esso le pelli possono essere lasciate impunemente senza timore di alterazioni del fiore nè di perforazioni. In altri termini il *confit* a base di enzimi microbici si potrebbe usare al pari del *confit* a base di enzimi ghiandolari, sul quale presenterebbe il vantaggio di un'azione più delicata, più squisita, più confacente agli scopi della purga. Senonchè detto *confit* ha ancora gli inconvenienti del *confit* naturale di sterco, relativamente all'incostanza e irregolarità di azione; il che ben si comprende, quando si pensi alla diversità della microflora fecale a seconda dell'alimentazione degli animali e persino a seconda della razza loro (alcuni autori, ad es., preferiscono lo sterco di cane bianco!), nonchè a seconda delle condizioni ambientali in cui la cultura greggia è stata eseguita. Sono i soliti difetti di siffatte culture empiriche, non selezionate, per cui esse devono essere sostituite al possibile con culture pure o perlomeno con culture a contenuto microbico determinato, selezionato.

In conclusione lo stato odierno delle cose è, come sopra dicemmo, che i *confit* a base di enzimi ghiandolari, a malgrado delle loro deficienze, sono preferiti ai *confit* microbici.

Con tutto ciò io non credo si debba rinunciare all'utilizzazione del lavoro batterico, qualora le ricerche siano indirizzate verso i fermenti misti o acidoproteolitici, mercè i quali si possono dissipare tanto le insufficienze

dei fermenti semplicemente acidificanti quanto i pericoli dei fermenti semplicemente peptonizzanti o putrescenti.

A questa illazione io sono condotto non soltanto da considerazioni teoriche, ma altresì da osservazioni pratiche fondate sull'esame di un metodo batterico di purga, che ho visto adottato in una importante Conceria-Scuola estera. Di questo metodo ho potuto analizzare il *confit* e studiarne sopra-luogo l'applicazione.

Il *confit* è una polvere che all'esame batteriologico si è dimostrata contenere in cultura quasi pura un cocco appartenente al gruppo dei miei cocchi acidoproteolitici, che coagulano il latte per produzione contemporanea di acidità e di chimasi e ridisciogliono poi il coagulo sempre in reazione acida.

Il modo di applicazione sta a dinotare nettamente che il metodo non si basa sopra l'azione di enzimi batterici sterilizzati, sibbene sopra l'attività di un lievito vivente, il quale viene preparato come segue: 12 kili di *confit* in polvere vengono stemperati in 200 litri di acqua a 25-30° C. entro recipiente sterilizzato e ricoperto; si lascia l'infusione per 4 a 5 giorni; già in capo a 12 ore si verifica una notevole fermentazione; più il contatto è prolungato e migliore è il risultato; l'infusione viene poi filtrata; il residuo può servire per una nuova preparazione, aggiungendovi solamente alquanto polvere fresca e ripetendo l'operazione. Il filtrato serve per preparare il solito bagno di purga, impiegandone 50 litri per 100 kili di pelli. Il risultato è tanto migliore quanto più invecchiata è l'infusione, perchè questa non contiene enzimi profondamente proteolitici e quindi non causa perdita di sostanza coriacea.

Per mio conto ho ripetuto la prova dell'infusione in Laboratorio con un campione del *confit* e vi ho constatato lo sviluppo rigoglioso e predominante del cocco acidoproteolitico suddescritto; evidentemente la polvere contiene un materiale nutritivo per il batterio, ma non sono riuscito a conoscerne la composizione. Ho provato a coltivare il germe in latte e a fare con latte-culture qualche esperimento presso una Conceria italiana. Un primo esperimento eseguito su piccola scala sotto la mia sorveglianza ha dato esito lusinghiero; ma i tentativi fatti di applicazione su scala normale mi hanno persuaso della necessità di un personale e di condizioni ambientali diverse da quelle dei nostri Stabilimenti. Sono le stesse difficoltà che intralciano la diffusione del metodo dei fermenti selezionati nel caseificio nostrano.

Mi riserbo di ritornare sull'argomento; ad ogni modo ho creduto prezzo dell'opera segnalare fin d'ora l'importanza che i miei fermenti acidoproteolitici offrono anche per l'industria conciaria, che è pur una delle più fiorenti nel nostro Paese, e dare un'altra prova del notevole contributo che la batteriologia è chiamata a recare alla razionalizzazione del lavoro industriale.

N. P.

A. FERRARI e A. INGANNI - Sulla importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide. - VI. Analisi termica e röntgenografica dei sistemi $\text{CaCl}_2 - \text{CoCl}_2$, $\text{CaCl}_2 - \text{FeCl}_2$, $\text{CaCl}_2 - \text{MnCl}_2$, $\text{CaCl}_2 - \text{CdCl}_2$ anidri.

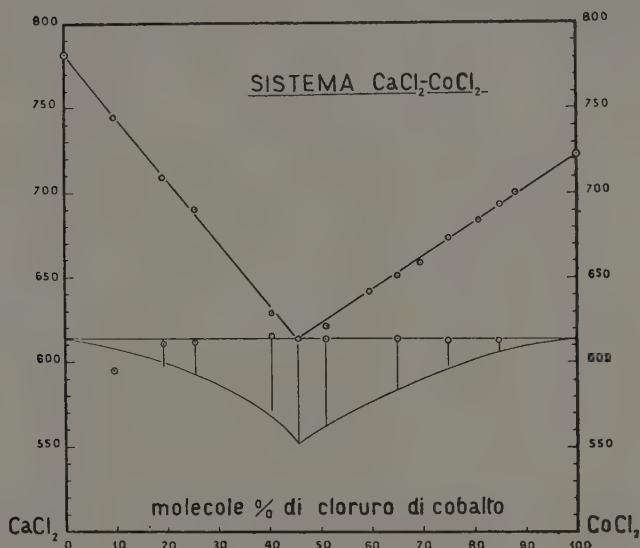


fig. 1

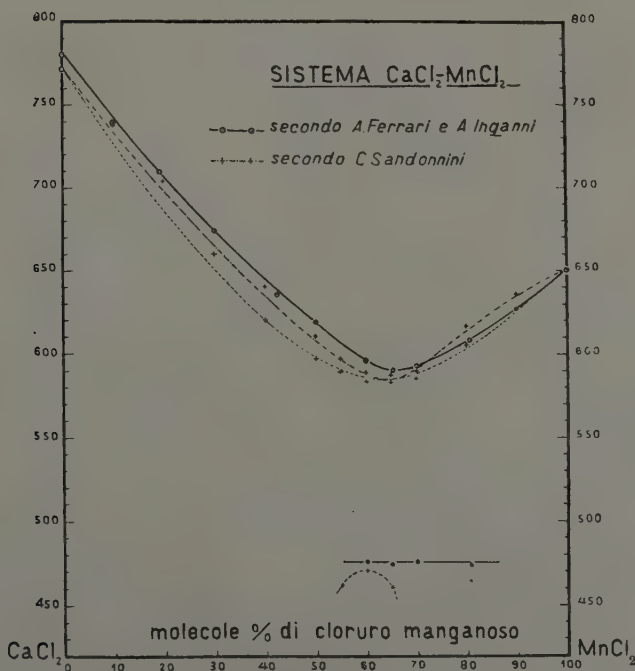


fig. 2

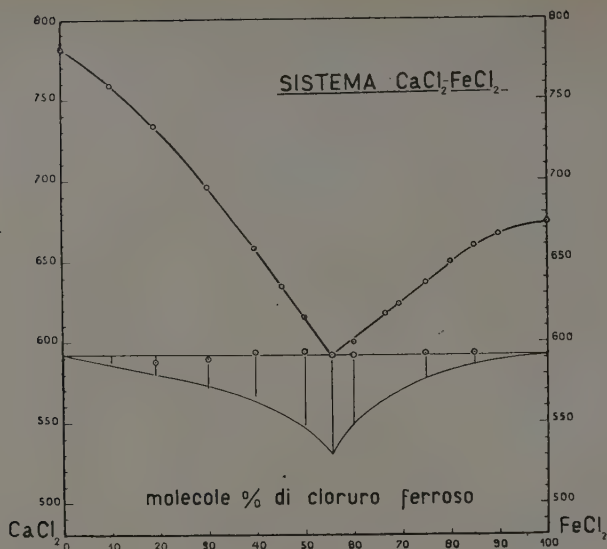


fig. 3

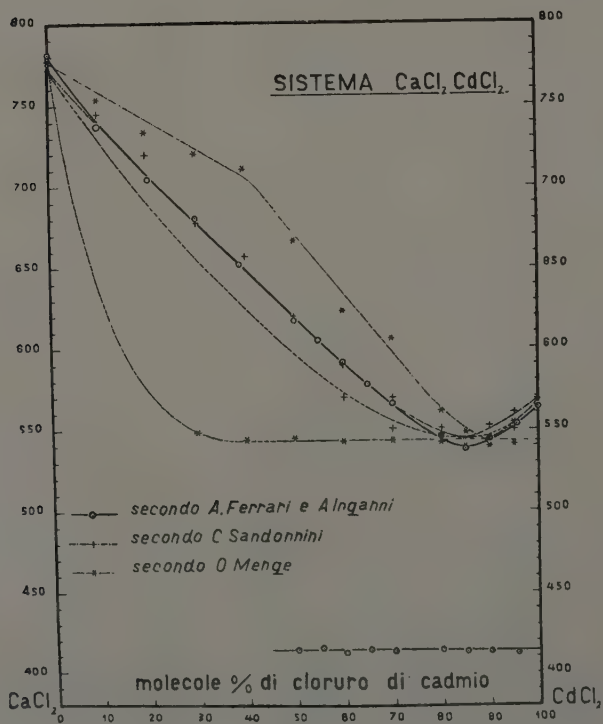


fig. 4

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1929 (Anno VII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Fisica. — *Sul funzionamento del Triodo con forte accoppiamento magnetico a nucleo di ferro fra circuito di placca e circuito di Griglia.* Nota⁽¹⁾ del Socio O. M. CORBINO.

I. — Un piccolo trasformatore a nucleo di ferro rettilineo costituito da fili molto sottili, e avente il primario A_1 e il secondario A_2 formati da piccole sezioni alternate, così da rendere quasi nulle le perdite di flusso, ha un capo del secondario alla griglia e uno del primario alla placca di una valvola A 415 Philips, con interposta una pila di circa 90 Volt (fig. 1). Gli altri capi del primario e del secondario sono uniti tra loro, attraverso a due resistenze r_1 e r_2 , di cui il capo comune F è poi rilegato al filamento della valvola. Il senso delle connessioni fra il trasformatore e la valvola è quello proprio per favorire le oscillazioni. Un oscillografo elettronico Western permette di esaminare l'andamento delle correnti e delle rispettive tensioni. A tal fine l'anodo A_n dell'oscillografo è rilegato a F, e le due placche P_x , P_y destinate a produrre la deviazione elettrostatica del fascetto catodico possono rilegarsi agli estremi delle resistenze r_1 , r_2 o a un punto intermedio di una grandissima resistenza R, partente da F e connessa poi o alla placca, come nella figura, o alla griglia. L'oscillografo permette, con la disposizione adottata, di combinare tra loro, ortogonalmente, due qualunque degli spostamenti dovuti alle correnti o alle tensioni. Nel caso della figura, la corrente primaria e una frazione della tensione di placca.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1929.

Le oscillazioni che si originano nelle condizioni indicate sono quelle di frequenza musicale studiate dal prof. Mazzotto e delle quali io diedi una spiegazione di massima. Come ebbi allora ad osservare il regime è caratterizzato da rotture brusche della corrente di placca, e da conseguenti sovratensioni notevoli, di alcune migliaia di volt. Ad attenuare quest'ultime, che conturbano la regolarità del processo, è opportuno inserire una resistenza di circa un megaohm in parallelo sull'avvolgimento A_1 del trasformatore. Nelle presenti esperienze questo aveva in A_1 , cioè sulla placca, un numero di spire quadruplo che in A_2 . Le tensioni oscillanti più elevate sono perciò sul ramo di placca. Tutto il trasformatore, per eliminare l'azione perturbatrice di eventuali scintilline fra i circuiti, era tenuto immerso in un vaso con olio di vasellina, e sottoposto precedentemente per qualche tempo all'azione del vuoto pneumatico.

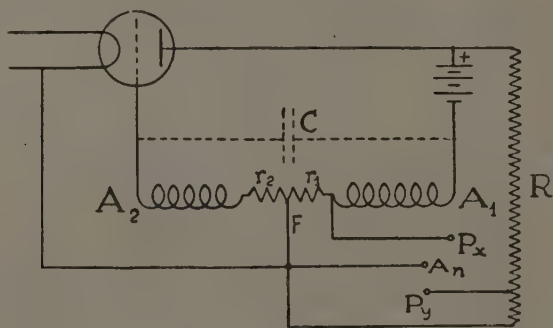


Fig. 1.

2. — Per la stretta vicinanza degli avvolgimenti primario e secondario va considerata come non trascurabile la loro mutua capacità elettrostatica; di molto superiore a quella propria del sistema griglia-placca. Pertanto le correnti esplorate attraverso r_1 ed r_2 non sono le vere correnti di placca e di griglia, dovendosi pensare come esistente una capacità C derivata fra i capi degli avvolgimenti, capacità che è stata segnata nella figura in linee tratteggiate. Effettivamente nelle esperienze fu aggiunto, al posto segnato, un condensatore di capacità variabile fino a zero, che servì per riconoscere più facilmente gli effetti della capacità mutua degli avvolgimenti e stabilire la continuità fra il regime studiato e quello ordinario degli oscillatori, con accoppiamento misto di induzione e di capacità.

Finchè si trattava dello studio di una sola corrente si poteva del resto esaminare la forma della vera corrente di placca o di griglia, intercalando la resistenza r corrispondente non in F, ma immediatamente prima della placca o della griglia. Esaminando in quest'ultimo modo la corrente di

placca i_p essa risultò analoga alla corrente primaria di un rocchetto di Ruhmkorff; e cioè (fig. 2) raggiunge bruscamente un piccolo valore, prosegue con lenta salita fino a un valore massimo, che è seguito da una brusca caduta a zero e da una brevissima pausa. Se invece si osserva la

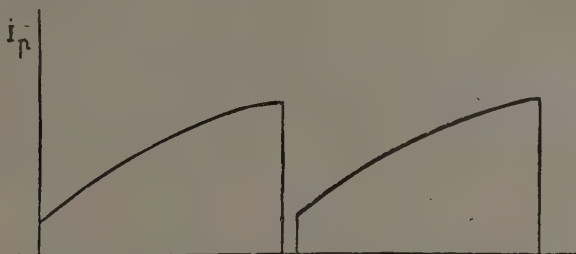


Fig. 2.

curva della tensione di placca essa risulta (fig. 3) piccolissima e quasi nulla per tutta la durata della lenta salita della corrente; solo alla rottura di questa si manifesta una violenta tensione di rottura, che si inverte rapida-

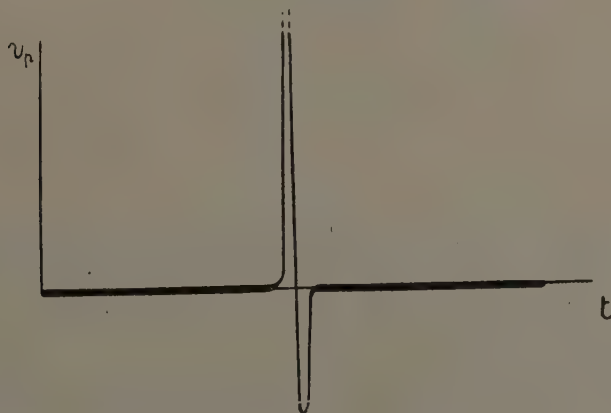


Fig. 3.

mente e torna a zero alla ripresa della corrente primaria. Si può dire cioè che la tensione di placca è attiva solo durante la piccolissima parte del periodo (forse un ventesimo) costituito dalla rottura e dalla brevissima pausa della corrente di placca; in tutto il resto del periodo è piccolissima: sale cioè lentamente fino a un paio di volt, mentre la tensione della batteria è di circa 90 volt.

3. - L'osservazione della corrente di griglia dà la spiegazione di questo piccolo valore della tensione di placca per così lunga parte del periodo. Si trova invero (fig. 4) che la corrente di griglie, che è dello stesso ordine di grandezza di quella di placca, si stabilisce di colpo all'inizio della salita della corrente primaria, e poi decresce lentamente, fino ad annullarsi poco prima che abbia luogo la rottura della corrente di placca.

Risulta allora manifesta la natura del processo, in stretta analogia col funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff in regime di rapide e frequenti interruzioni. Allo stabilirsi della corrente primaria si destano sui due avvolgimenti due tensioni induttive, positiva sulla griglia, negativa sull'avvolgimento primario; quest'ultima è eguale, e compensa la tensione della batteria, cosicchè sulla placca la tensione iniziale è quasi nulla. Si stabiliscono insieme, e improvvisamente, due correnti, di griglia e di placca, capaci di annullare all'inizio l'azione magnetizzante complessiva sul nucleo; e

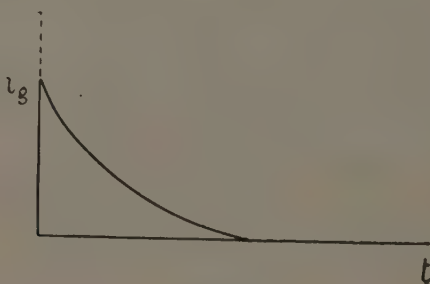


Fig. 4.

perciò piccola quella di placca, a molte spire, grande quella di griglia, a poche spire. Poscia il ferro si va magnetizzando. perchè comincia a decrescere la corrente secondaria (griglia) e continua a crescere quella primaria (placca). Ne risulta sul primario una tensione negativa, dovuta alla progressiva magnetizzazione del nucleo; essa, sommata con la crescente perdita di tensione ohmica nell'avvolgimento A_2 e nella resistenza r_2 (necessaria per l'esplorazione oscillografica), compensa quasi totalmente la tensione della pila, e lascia sussistere sulla placca una piccola tensione per tutta la parte lenta del periodo.

Quando tensione e corrente di griglia si sono annullate, la corrente primaria ha già raggiunto, perchè favorita dalla tensione positiva di griglia, un valore superiore a quello normale, e quindi tende a decrescere, con che induce una tensione negativa di griglia che violentemente porta a zero la corrente primaria; invero più rapidamente questa decresce, più elevata è la tensione negativa di griglia indotta dalla diminuzione. È il meccanismo ideale di rottura della corrente primaria in un rocchetto di induzione. La

parte più lunga del processo, che gli dà la frequenza musicale, è dunque caratterizzata da una tensione di placca minore di quella di griglia; e poichè le correnti si svolgono con processo lento, le capacità distribuite nel sistema non hanno praticamente alcuna influenza su tale parte del periodo. Invece nella parte breve che si svolge con una oscillazione violenta della tensione di placca, e della tensione di griglia, quasi contrapposte, le correnti elettroniche di placca e di griglia sono nulle, e la oscillazione si svolge come carica e scarica delle capacità varie del sistema. Pertanto l'esplorazione delle correnti, se fatta al punto di collegamento F degli avvolgimenti A_1 , A_2 , come nella fig. 1, dà la vera corrente di placca o di griglia nella fase lenta, la corrente di capacità nella fase breve.

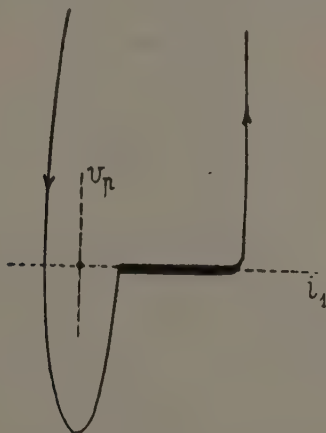


Fig. 5.

4. — L'andamento comune della corrente primaria e della tensione, composte ortogonalmente nell'oscillografo, è rappresentato nella fig. 5 che è ottenuta con lo schema della fig. 1. Il tratto molto nero è percorso lentamente ed è perciò molto luminoso; esso corrisponde alla salita lenta della corrente primaria *mentre la tensione di placca è quasi nulla*. Alla rottura la corrente si annulla rapidamente mentre la tensione sale oltre i limiti della figura. Si ritrova il punto luminoso durante la discesa della tensione di placca, mentre la corrente per la presenza della capacità si è invertita; poscia si inverte la tensione, fino a riprendersi il processo lento. Su questa parte percorsa rapidissimamente e perciò poco luminosa, ha influenza il valore della capacità naturale mutua degli avvolgimenti o di un condensatore inserito in C, il quale modifica il periodo totale solo per effetto della modificazione di questa parte del processo.

La fig. 6 dà invece la composizione ortogonale della corrente primaria con la tensione di griglia. Essa si interpreta facilmente; da notare che

durante il processo lento dello stabilirsi della corrente primaria la tensione di griglia è positiva, fino alla fase della brusca rottura.

5. - Una teoria della fase lenta del processo è facile a stabilire poichè allora sono trascurabili le correnti di capacità. Dato l'accoppiamento completo fra primario e secondario si può porre, detto M il coefficiente di mutua

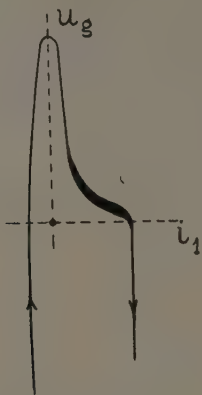


Fig. 6.

induzione, L_1 e L_2 le self primaria e secondaria, e m il rapporto dei numeri di spire (nel nostro caso 4),

$$(1) \quad M^2 = L_1 L_2 \quad ; \quad M = m L_2 \quad ; \quad L_1 = m^2 L_2$$

Le equazioni generali, dette v, u le tensioni di placca e di griglia; i_1, i_2 le corrispondenti correnti, E la f. e. m. della pila ed r_1, r_2 le resistenze degli avvolgimenti, sono

$$u + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = E$$

$$v + r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0.$$

Si ha poi nella valvola

$$i_2 = f(u, v)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} = a \frac{dv}{dt} + b \frac{du}{dt}$$

dove però a e b non sono da considerare costanti: il rapporto $\frac{b}{a}$ è il coef-

ficiente di moltiplicazione della valvola, anche esso da considerare nel senso differenziale, come variabile durante il processo.

Trascurando le perdite di tensione ohmiche di fronte a quelle induttive, ponendo cioè eguali a zero r_1 ed r_2 , ed eseguendo i calcoli, in base all'(1) dopo aver posto $\frac{b}{a} = k$ si ottiene:

$$\frac{m}{a} \frac{di_1}{dt} = (m - k) \frac{dv}{dt}$$

Nella fase lenta di cui ci occupiamo $\frac{di_1}{dt}$ è positiva; e v è crescente col tempo, cosicchè anche $\frac{dv}{dt}$ è positiva; dev'essere quindi positivo $m - k$, o anche

$$k < m$$

Perciò nel processo lento il coefficiente variabile di moltiplicazione della valvola dev'essere, nel nostro caso, inferiore a 4; quando raggiunge questo valore 4 ha luogo la rottura. Che se fosse in tutti i punti della caratteristica $k < m$, si raggiungerebbe asintoticamente un regime di corrente stabile, e il processo non sarebbe più periodico.

Ora, come abbiamo visto sperimentalmente, nel processo lento la tensione di griglia è costantemente superiore a quella di placca; in tali condizioni per tensioni basse la valvola rivela effettivamente un coefficiente differenziale k molto più piccolo del valore normale che è 15. Così per 5 volt di placca contro 10 di griglia risultò $k = 0.16$; e ancora per 11 volt di placca e 10 di griglia si ha $k = 0.4$.

Si deduce da tutto ciò che la parte lenta e predominante del processo periodico, la quale dà al processo la frequenza musicale, si svolge in condizioni anormali di funzionamento della valvola, quelle per le quali il coefficiente differenziale k di moltiplicazione della valvola è inferiore al rapporto fra il numero delle spire primarie (placca) e quelle secondarie (griglia). E perciò nessuna teoria e nessuna formola semplice possono dare il valore del periodo di queste singolari oscillazioni, le quali non rientrano nelle note ricerche di van der Pol⁽¹⁾ sulle oscillazioni di rilassamento. Solo la parte breve del periodo, quella di rottura, è determinata dalle costanti del circuito, self e capacità; essa diventa la parte predominante solo quando la capacità è molto elevata, con che ci si avvicina alle condizioni ordinarie di accoppiamento misto d'induzione e di capacità.

6. - I diagrammi riportati e la discussione esposta, riguardano, come si è detto, il caso che sul circuito di placca il numero di spire sia maggiore, precisamente quadruplo, di quello sul circuito di griglia.

(1) VAN DER POL, « Phil. Pag. », 2, p. 978, 1926.

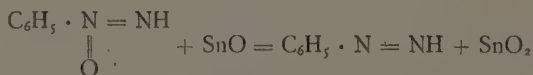
Se si scambiano i due avvolgimenti disponendo quello di maggior numero di spire sul circuito di griglia, si modifica sostanzialmente l'andamento della corrente di placca, pur conservandosi il regime periodico a bassa frequenza. Precisamente la corrente sale bruscamente a un alto valore, poi discende lentamente e infine si interrompe bruscamente.

Invece con numeri di spire eguali nei due avvolgimenti la corrente di placca sale bruscamente fin quasi al valore normale, prosegue crescendo lievemente e poscia s'interrompe in modo brusco.

La interpretazione di questo andamento della corrente non presenta difficoltà, sulla base di quanto è stato esposto più sopra. Anche qui la corrente variabile di griglia va tenuta presente per la interpretazione dei particolari osservabili, che sono del resto di scarso interesse.

Chimica. — *Sopra alcuni processi di ossidazione determinati dai diazoidrati normali*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Socio A. ANGELI e di ZVI JOLLES.

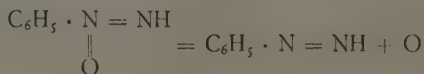
In un lavoro pubblicato recentemente⁽³⁾ noi abbiamo dimostrato che l'idrato di diazobenzolo normale, per azione dell'idrato stannoso, può perdere nettamente il suo atomo di ossigeno per dare origine ad un termine labilissimo:



il quale precettivamente subisce una serie di trasformazioni, una delle quali conduce al benzolo. Gli isodiazoidrati invece non fanno nulla di tutto questo.

D'altra parte era noto da lungo tempo che i diazocomposti per trattamento con alcool possono del pari venire trasformati nei corrispondenti idrocarburi aromatici e contemporaneamente l'alcool passa ad aldeide.

Basandoci sopra questi fatti ci si è subito affacciata alla mente l'idea che i diazoidrati normali sieno dotati di proprietà ossidanti:



(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1929.

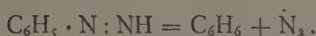
(3) «Berliner Berichte», 62 (1929), p. 2099.

e perciò abbiamo senz'altro iniziate alcune esperienze, che hanno confermato l'esattezza della nostra supposizione, e delle quali in questa Nota preliminare diamo una breve comunicazione allo scopo di riservarci il nuovo campo di studio.

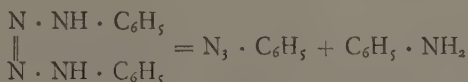
Itrato ferroso. — Ad una soluzione di cloruro di fenildiazonio (1 Mol.), raffreddata con ghiaccio e resa alcalina con eccesso di idrato sodico, si aggiunge una soluzione acquosa e concentrata di solfato ferroso (2 Mol.). Immediatamente si ha fortissimo sviluppo gassoso (azoto) e si separa idrato ferrico.

Distillando in corrente di vapore passano i termini che finora siamo riusciti ad identificare: benzolo, azobenzolo, fenilazide.

Il benzolo, senza dubbio, deriva dal primo termine della riduzione, la fenildiimmide:



Ma questo primo termine, come fanno il nitrossile e la diimmide, ha grande tendenza a polimerizzarsi e si comprende subito come da tale polimero possano prendere origine fenilazide ed anilina:



assieme ad azobenzolo.

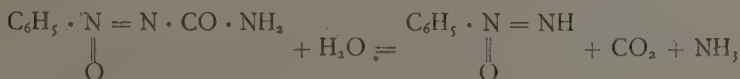
Acqua ossigenata. — Si ha vivace sviluppo gassoso costituito da un miscuglio di azoto ed ossigeno.

Idrossilammina. — Sviluppo di gas costituito quasi esclusivamente di azoto. Questa reazione verrà sottoposta ad uno studio più approfondito.

Ferrocianuro di potassio. — Viene subito ossidato a ferricianuro.

Solfuro ammonico. — La soluzione diluitissima di questo reattivo, per aggiunta di piccole quantità di soluzione alcalina di diazoidrato, intorbida rapidamente per separazione di zolfo.

Faremo infine osservare che quando si tratta di esperienze sopra piccole quantità di prodotti, allora torna molto più comodo, invece di partire dal sale di diazonio, di impiegare la soluzione acquosa di fenilazossicarbonammide la quale, per azione degli alcali subito si scinde:



con formazione di idrato normale.

Tale comportamento ossidante non era fino ad ora stato rilevato e costituisce una nuova conferma alla struttura dei diazoidrati normali che noi abbiamo proposta.

Invece le soluzioni di acetossima, a parità di condizioni, non determinano nessun processo di ossidazione.

L'idrossilammina, che in generale agisce da riducente, in mezzo alcalino può determinare delle ossidazioni perchè, come risulta dalle interessanti ricerche di F. Haber, è in grado di cedere il suo atomo di ossigeno; in questo caso, come anche nell'azione dei ioduri alcoolici, conformemente a quanto ha trovato Bewad, l'idrossilammina assume la forma di ossido e viene così a rassomigliare all'acido ipocloroso ed all'acqua ossigenata:

(HCl)O acido ipocloroso

(H₂O)O acqua ossigenata

(NH₂)O idrossilammina.

Anche questa analogia porta a concludere che nei diazoidrati normali l'ossigeno sia contenuto sotto forma di ossido, vale a dire congiunto ad un atomo di azoto pentavalente (nitrico). Solamente in tal modo si possono spiegare le reazioni cui abbiamo accennato in questa breve comunicazione.

Proseguiremo le nostre esperienze estendendole anche ai nitroni.

Biologia. — *Sul significato biologico degli alcaloidi nelle piante.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio B. LONGO e di C. PADERI.

Da parecchio tempo ci stiamo occupando di ricerche di fisiologia vegetale e nella presente Nota pubblichiamo i risultati di alcuni esperimenti che ci sono sembrati interessanti sulla questione, da tempo in discussione e non ancora chiarita, riguardante il significato biologico degli alcaloidi nelle piante.

Alcuni considerano gli alcaloidi come semplici sostanze di rifiuto che si accumulano nelle piante, mancando in queste, a causa della loro speciale organizzazione, la possibilità di poterle eliminare. L'ipotesi non trova base in dati di fatto e nemmeno in considerazioni teoriche. Se gli alcaloidi rappresentassero semplici sostanze di rifiuto — le scorie, cioè, non più usufruibili risultanti dal ricambio materiale delle piante — producendosi continuamente e non venendo eliminati nè distrutti, si dovrebbero trovare accumulati in quantità maggiore di quel che realmente si trovano. Anche le parti stesse delle piante in cui questi alcaloidi si localizzano fanno pensare che essi rappresentino qualche cosa di più di semplici sostanze di rifiuto. Sarebbe strano che la natura, sempre provvida nelle sue cose, fosse venuta meno a se stessa facendo accumulare sostanze inutili in quelle parti delle piante

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1929.

dove più ferve l'attività funzionale anzichè nelle parti morte o meno funzionanti. Incomprensibile apparirebbe poi la localizzazione nei semi, dove dovrebbero essere concentrate solamente le sostanze di riserva necessarie allo sviluppo dell'embrione.

Anche l'altra ipotesi secondo la quale gli alcaloidi rappresenterebbero un mezzo di difesa delle piante contro gli animali fitofagi non è soddisfacente: l'osservazione quotidiana dimostra che se la presenza di alcaloidi preserva le piante da certi animali, non le preserva però da altri. Le foglie dell'*Atropa Belladonna* L., per es., che pure contengono alcaloidi dotati di estrema tossicità, possono venire mangiate impunemente da molluschi.

In una terza ipotesi si attribuisce agli alcaloidi localizzati nei semi il valore di sostanze di riserva che l'embrione utilizzerebbe durante il periodo del suo sviluppo. Gli alcaloidi sono corpi azotati, potrebbe essere giustificata la supposizione quindi che, come tali, potessero costituire delle sostanze nutritive ed essere usufruiti dall'embrione in via di sviluppo. Se però si considera da una parte la quantità relativamente piccola di alcaloidi in rapporto alle altre sostanze azotate di riserva contenute nei semi e dall'altra che gli alcaloidi sono sostanze a molecola complessa di alto peso con contenuto in azoto limitato, appare molto dubbio che essi possano avere importanza come sostanze nutritive dell'embrione.

Un'altra ipotesi è quella emessa da Ciamician e Ravenna secondo la quale gli alcaloidi rappresenterebbero nelle piante sostanze eccitatrici e regolatrici corrispondenti agli ormoni dell'organismo animale. Le piante sono organismi nei quali è eminentemente sviluppata la funzione chimica, che vivono per processi chimici assai più che gli animali. Partendo dal concetto che le piante per la loro stessa costituzione abbiano bisogno di più svariati stimoli chimici degli animali, gli autori sono indotti a supporre che siano appunto gli alcaloidi e le altre sostanze accessorie i regolatori del chimismo vegetale.

Questo concetto degli autori sulla funzione degli alcaloidi nelle piante ha a suo favore anche dati sperimentali. Con una serie di ricerche sul contegno di alcune sostanze organiche nei vegetali hanno potuto stabilire che sotto l'azione di alcuni alcaloidi la germinazione dei semi viene accelerata. Gli autori hanno invece ottenuto risultati negativi per quanto riguarda l'azione eccitatrice degli alcaloidi sulle piantine, che venivano più o meno danneggiate.

Noi abbiamo ripreso questo studio, ma mentre gli autori sperimentarono l'influenza degli alcaloidi su semi di piante non alcaloidiche, a noi è sembrato specialmente interessante sperimentare l'influenza di un alcaloide sullo stesso seme nel quale è contenuto.

Lo studio da noi eseguito riguarda la conina, l'atropina e la caffeina che abbiamo saggiato rispettivamente con i semi di *Conium maculatum* L., *Datura Stramonium* L. e *Coffea arabica* L.

In tutte e tre le specie di semi abbiamo ottenuto risultati dimostrativi dell'influenza dell'alcaloide sulla germinazione, ma soprattutto brillanti sono stati i risultati ottenuti sperimentando la caffeina su semi di caffè provenienti da frutti di piante coltivate nel R. Orto Botanico di Pisa e sottoposti all'esperienza appena raccolti.

I numerosi esperimenti da noi eseguiti hanno permesso di constatare che per effetto del proprio alcaloide, somministrato in dose adeguata⁽¹⁾, la germinazione dei semi avviene più rapidamente e che maggiore è il numero di semi germinati. Inoltre dai nostri esperimenti risulta anche un altro fatto, cioè che, continuando il trattamento con l'alcaloide proprio, le piantine non solo non vengono danneggiate ma risentono anch'esse un beneficio che si manifesta con un maggiore sviluppo in altezza e robustezza.

I risultati così ottenuti provano che gli alcaloidi agiscono, sia sui semi sia sulle piantine dei vegetali in cui essi sono contenuti, come veri eccitatori. Sui semi la loro azione eccitante non è specifica, avendo infatti le ricerche di Ciamician e Ravenna dimostrato che questa azione si manifesta anche su semi di piante non alcaloidiche. L'azione degli alcaloidi si mostra invece specifica per quanto riguarda le piantine; mentre infatti Ciamician e Ravenna ottenevano risultati negativi facendo agire gli alcaloidi su piantine non alcaloidiche, noi abbiamo ottenuto risultati positivi trattando le piantine col proprio alcaloide.

In ogni modo i risultati sperimentali concordano col significato attribuito agli alcaloidi dai due autori e l'ipotesi degli ormoni vegetali è sempre, oltre che la più soddisfacente, anche la più seducente dal punto di vista della Biologia generale come la più consona a quella corrente, che il moltiplicarsi delle indagini delinea sempre più e che tende a stabilire analogie fra animali e vegetali anche riguardo a quei fenomeni, che venivano considerati come esclusiva proprietà di uno dei due regni degli esseri organizzati.

(1) Per la caffeina ad es. abbiamo trovato che l'ottimo va dal $\frac{1}{2}$ all'1 ‰, che soluzioni più forti, 2 ‰, sono dannose e che più forti ancora, 1 ‰, sono letali.

Questo concorda col fatto che in natura gli alcaloidi sono contenuti in piccole dosi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Calcolo delle probabilità. — *Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori.* Nota ⁽¹⁾ di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Intendiamo per *valori eccezionali* di una legge di probabilità i punti in cui la funzione di ripartizione è discontinua; se X è un'ordinaria variabile casuale, ξ è un valore eccezionale della sua legge di probabilità se l'ipotesi che X sia compresa fra $\xi - \varepsilon$ e $\xi + \varepsilon$ ha una probabilità che non tende a zero quando si fa tendere a zero ε . Rappresentando al solito la legge di probabilità con una distribuzione di masse, di somma = 1, sull'asse ξ , in modo che la massa compresa in un generico intervallo misuri la probabilità che la variabile casuale X vi appartenga, possiamo dire che i valori eccezionali sono i punti in cui è concentrata una massa finita. È noto che tali punti possono essere al più un'infinità numerabile.

Ci proponiamo di dimostrare che se X è una grandezza soggetta durante il tempo a variare con continuità per cause almeno in parte accidentali (che supporremo però invariabili), non può aversi per nessun istante λ un valore eccezionale per la legge di probabilità della variabile casuale $X(\lambda)$.

Secondo la definizione che ne ho recentemente data ⁽²⁾, la $X(\lambda)$ è cioè una funzione continua a incremento aleatorio a legge fissa: ciò significa — per richiamare il concetto nella forma forse più facile — che gli incrementi di X in n intervalli uguali successivi sono variabili casuali indipendenti soggette a una medesima legge, e quindi (supposto $X(0) = 0$), la legge di probabilità $\Phi_\lambda(\xi)$ di $X(\lambda)$ si ottiene componendo n volte $\Phi_{\frac{\lambda}{n}}(\xi)$,

legge di probabilità di $X\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. E, più in generale, risulta che componendo $\Phi_{\lambda_1}(\xi)$ e $\Phi_{\lambda_2}(\xi)$ si ottiene $\Phi_{\lambda_1 + \lambda_2}(\xi)$, perchè l'incremento $X(\lambda_1 + \lambda_2) - X(0) = X(\lambda_1 + \lambda_2)$ ottenuto nell'intervallo $(0, \lambda_1 + \lambda_2)$ si può considerare come somma degli incrementi ottenuti in due intervalli di lunghezza λ_1 e λ_2 .

Ciò che ci proponiamo di dimostrare è allora: che se $X(\lambda)$ è una funzione a incremento aleatorio a legge fissa, capace di variare soltanto con continuità, la funzione di ripartizione $\Phi_\lambda(\xi)$ non può essere funzione discontinua di ξ per nessun valore del parametro λ .

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1929.

(2) V. *Sulle funzioni a incremento aleatorio*, «Rend. Acc. dei Lincei», 1929, 2° sem.

Un tale risultato appare intuitivamente assai verosimile, se si pensa che $X(\lambda)$ si può scomporre nella somma di un numero grande *quanto si vuole* di incrementi, indipendenti tra loro, ottenuti in altrettanti intervalli piccolissimi di tempo, e che hanno essi pure un ordine di grandezza probabile estremamente piccolo. E sembrerebbe strano che un insieme così complesso di cause avesse per effetto di favorire in modo eccezionale dei valori particolari ben determinati.

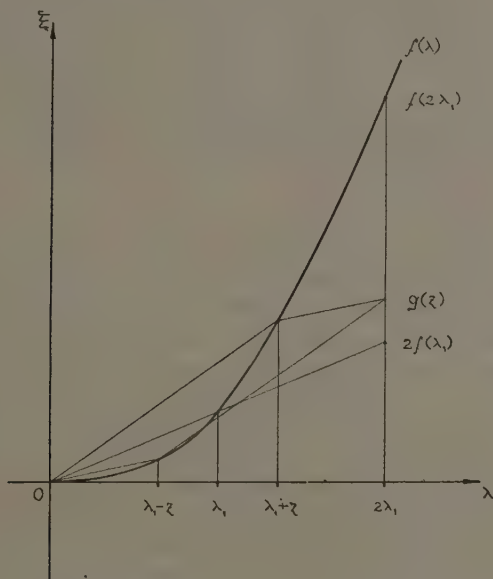
Un facile lemma ci permette di ricondurre il caso più generale di una legge mista (masse in parte concentrate e in parte diffuse) a quello più semplice in cui si hanno soltanto masse concentrate. Siano X e Y due variabili casuali indipendenti, e consideriamo la loro somma $Z = X + Y$: è ovvio che se ξ ed η sono valori eccezionali rispettivamente per X e Y con probabilità (massa concentrata) p, q , $\zeta = \xi + \eta$ è un valore eccezionale per Z con probabilità almeno uguale a pq ; inversamente, se ζ è un valore eccezionale per Z , esiste almeno una coppia di numeri ξ_i, η_i tali che $\xi_i + \eta_i = \zeta$, ξ_i è valore eccezionale per X , η_i è valore eccezionale per Y , e si ha inoltre che la probabilità di ζ è $\sum_i p_i q_i$, ove con p_i, q_i si indichino rispettivamente le probabilità di ξ_i ed η_i . Le masse concentrate relative alla legge di $X + Y$ provengono cioè unicamente, e nel modo specificato, dalle masse concentrate relative alle leggi di X e di Y .

Ciò basta a provare che se $\Phi_\lambda(\xi)$ rappresenta una legge fissa d'incremento aleatorio che ammette valori eccezionali (per uno almeno, e quindi, per quanto sopra, per tutti i valori di λ), e con $\Phi_\lambda(\xi)$ indichiamo la legge che se ne ricava considerando soltanto le masse concentrate (divise per $e^{-p\lambda}$, ove $-p$ è il logaritmo della somma delle masse concentrate relative alla legge $\Phi_1(\xi)$, in modo da renderne la somma $= 1$), $\Phi_\lambda(\xi)$ è una legge fissa di incremento aleatorio, e, per qualunque λ , non esistono che masse concentrate. Anzi, subordinatamente all'ipotesi che in un dato istante λ_1 la X cada in uno dei valori eccezionali, la variabile a incremento aleatorio X segue la legge $\Phi_\lambda(\xi)$ in tutto l'intervallo $\lambda \leq \lambda_1$.

Una variabile a incremento aleatorio con masse tutte concentrate non può (o può con probabilità nulla) assumere in ogni istante λ altri valori che i corrispondenti valori eccezionali dei quali considereremo l'aggregato sul piano (λ, ξ) ; se d'altronde X non può variare se non con continuità, è necessario che ogni punto eccezionale (λ_1, ξ_1) sia collegato all'origine $(0, 0)$ ⁽¹⁾ mediante almeno una linea continua ($\xi = f(\lambda)$, f continua) di punti eccezionali. Dimostriamo che tale linea non può essere che una retta. Per la proprietà sopra ricordata, l'aggregato dei punti eccezionali gode evidentemente della proprietà che se vi appartengono (λ_1, ξ_1) e (λ_2, ξ_2) vi appartiene necessariamente anche $(\lambda_1 + \lambda_2, \xi_1 + \xi_2)$, punto ottenuto, come mostra la figura, colla regola del parallelogrammo. Supposto che $f(\lambda)$

(1) Assumendo al solito $X(0) = 0$.

non sia lineare, potremo fissare λ_1 tale che $f(2\lambda_1) \neq 2f(\lambda_1)$. Qualunque sia z ($0 \leq z \leq \lambda_1$) è chiaro che $g(z) = f(\lambda_1 - z) + f(\lambda_1 + z)$ è valore eccezionale per $\lambda = 2\lambda_1$, dato che i due addendi sono per ipotesi valori eccezionali per $\lambda = \lambda_1 - z$ e $\lambda = \lambda_1 + z$, e che si ha $(\lambda_1 - z) + (\lambda_1 + z) = 2\lambda_1$. Ma $g(z)$ è funzione continua di z , $g(0) = 2f(\lambda_1) \neq f(2\lambda_1) = g(\lambda_1)$, e quindi al variare di z si ottengono certamente tutti i valori compresi fra $2f(\lambda_1)$ e $f(2\lambda_1)$, che dovrebbero tutti essere valori eccezionali per $\lambda = 2\lambda_1$. Ciò è assurdo, non potendo i valori eccezionali essere che al più numerabili.



Ciò prova che l'aggregato dei punti eccezionali è costituito di rette uscenti dall'origine; allo stesso modo si vede subito che di tali rette non ve ne può essere più d'una, altrimenti sarebbero punti eccezionali anche tutti quelli compresi fra due rette distinte.

Il caso in cui esista una retta di punti eccezionali è effettivamente realizzabile. Basti pensare a una variabile X che in un intervallo di tempo λ ha (con certezza assoluta o con certezza pratica: probabilità = 1) un incremento uguale a $k\lambda$. Allora $\Phi_\lambda(\xi) = 0$ od 1 a seconda che $\xi < k\lambda$ o $\xi > k\lambda$; $\psi_\lambda(t) = e^{ik\lambda t}$. Dimostriamo che l'unico caso in cui valori eccezionali sono possibili, compatibilmente colla condizione di continuità, è quello ora considerato di una funzione certamente lineare, per il quale del resto l'introduzione dei concetti di probabilità è quasi pleonastica.

Supponiamo infatti che esista una retta $\xi = k\lambda$ di punti eccezionali; se $-p$ è il logaritmo della massa concentrata nel punto $\xi = k$ per $\lambda = 1$, $e^{-p\lambda}$

è la probabilità che sia $X(\lambda) = k\lambda$ (vedi sopra). Sia λ un istante determinato, fissiamo comunque ε , e supponiamo sia q la probabilità che $X(\lambda) > k\lambda + \varepsilon$. Ciò implica, per la continuità, che esista almeno un istante λ' ($0 < \lambda' < \lambda$) tale che $X(\lambda') = k\lambda' + \varepsilon$, ma se è $X(\lambda') = k\lambda' + \varepsilon$ si ha una probabilità $e^{-p(\lambda - \lambda')} > e^{-p\lambda}$ che, l'ulteriore incremento da λ' a λ avvenendo secondo il valore eccezionale, risulti $X(\lambda) - X(\lambda') = k(\lambda - \lambda')$, e quindi $X(\lambda) = k\lambda + \varepsilon$.

Si concluderebbe che il valore $k\lambda + \varepsilon$ ha probabilità $> qe^{-p\lambda} > 0$, contro il teorema precedente che esclude la possibilità di altri valori eccezionali. Dev'essere dunque $q = 0$: dev'essere cioè nulla la probabilità che si abbia $X(\lambda) > k\lambda + \varepsilon$, e analogamente dev'essere nulla la probabilità che si abbia $X(\lambda) < k\lambda - \varepsilon$. Ciò comunque piccolo si fissi ε , e quindi $\Phi_\lambda(\xi) = 0$ od 1 a seconda che $\xi < k\lambda$ o $\xi > k\lambda$; siamo dunque nel caso precedentemente considerato di una variabile certamente lineare.

* *

L'ipotesi che la X sia capace di variare soltanto con continuità è essenziale per le precedenti dimostrazioni. È facile infatti immaginare, per il caso di variabili discontinue, delle leggi particolarmente interessanti di incrementi aleatori con infiniti valori eccezionali, oppure aventi un unico valore eccezionale ma con probabilità minore di uno ⁽¹⁾.

Basta pensare ad esempio che il numero dei nati, o dei morti, in un dato intervallo di tempo, dei *goals* segnati da una data squadra nel corso di una partita di calcio, e in genere il numero $X(\lambda)$ delle ripetizioni, fino all'istante λ , di un dato fenomeno, che può verificarsi con una data probabilità ad ogni istante, è una funzione a incremento aleatorio capace di variare assumendo soltanto valori interi, e aumentando di uno ad ogni punto di discontinuità. Tutti i valori interi (≥ 0) sono quindi valori eccezionali della sua legge di probabilità, per qualunque istante λ . Se supponiamo la legge fissa, è costante il numero (positivo) p tale che $p d\lambda$ è la probabilità che $X(\lambda)$ sia discontinua in un intervallo $d\lambda$, e la probabilità $p_n(\lambda)$ che sia $X(\lambda) = n$ risulta

$$p_n(\lambda) = \frac{p^n \lambda^n}{n!} e^{-p\lambda}.$$

(1) Si vede facilmente che se $\Phi_\lambda(\xi)$ ha più di un valore eccezionale ne ha infiniti e non racchiudibili in un intervallo finito. Infatti anche $\Phi_\lambda(\xi)$ ne ha allora almeno due,

e quindi $\Phi_\lambda(\xi)$ ne ha almeno $n + 1$ (qualunque sia n) e dunque infiniti; se poi fossero racchiudibili in un intervallo finito, lo scostamento quadratico medio dei valori eccezionali di $\Phi_\lambda(\xi)$ al variare di λ , tenderebbe a zero almeno come λ , anziché come $\sqrt{\lambda}$, quando $\lambda \rightarrow 0$.

È data cioè dalla formula di POISSON nota sotto il nome di *legge degli eventi rari*.

Un caso molto più generale e interessante si ha analogamente supponendo che la X sia suscettibile soltanto di variazioni brusche, istantanee, la cui ampiezza sia però a sua volta aleatoria. Consideriamo ad esempio, durante una pioggia di cui supponiamo costante l'intensità, la massa dell'acqua caduta in un pluviometro. Essa aumenta con discontinuità (una goccia per volta), e, se le gocce avessero tutte la stessa massa, basterebbe contare il loro numero, e si ricadrebbe nel caso trattato precedentemente. Tenuto conto che la massa di ogni goccia sarà accidentalmente diversa dalle altre, la massa dell'acqua del pluviometro cresce invece secondo una legge più complicata, che si può però determinare completamente quando sia nota la probabilità che la massa di una singola goccia sia compresa fra dati valori. Molte altre variabili fisiche e statistiche fornirebbero esempi perfettamente analoghi. Così, se oltre al numero delle morti in un dato periodo di tempo (caso che già abbiamo considerato) interessa studiare l'ammontare totale delle eredità lasciate, abbiamo un esempio dell'identico tipo ⁽¹⁾.

Matematicamente. Sia X una variabile suscettibile di sole variazioni discontinue, sia $p d\lambda$ la probabilità che in un intervallo $d\lambda$ essa abbia un istante di discontinuità, sia $\Phi(\xi)$ la legge di probabilità del salto che in un tale punto essa deve fare, e $\psi(t) = \int e^{it\xi} d\Phi(\xi)$ la corrispondente funzione caratteristica. Si trova — e per lo scopo che qui interessa basta accennarlo — che $\psi_\lambda(t)$, funzione caratteristica di $X(\lambda)$, è

$$\psi_\lambda(t) = e^{p\lambda[\psi(t) - 1]}$$

e i valori eccezionali per $X(\lambda)$ sono tutti e soli quelli esprimibili mediante una somma di valori eccezionali della $\Phi(\xi)$, uguali o distinti, in numero finito. Ciò che era del resto una conseguenza intuitiva dei soliti lemmi e dell'interpretazione esplicita.

In particolare, se $\Phi(\xi)$ è continua, l'unico valore eccezionale della legge di $X(\lambda)$ è lo zero. Si ha cioè una certa probabilità che *nessun* incremento sia avvenuto in tutto l'intervallo $(0, \lambda)$. Scegliendo opportunamente $\Phi(\xi)$ si possono costruire infiniti esempi di casi svariatiissimi, più o meno interessanti.

(1) Un esempio assai più interessante è dato dalla teoria cinetica dei gas: la velocità $X(\lambda)$ di una data molecola all'istante λ è infatti una funzione a incremento aleatorio capace soltanto di variazioni discontinue (un incremento finito ad ogni urto). La probabilità di un urto in un dato intervallo $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, e i suoi effetti, dipendono però dalla velocità nell'istante λ ; la $X(\lambda)$ è quindi una *funzione a incremento aleatorio a legge differenziale* (loc. cit.) e non rientra nel caso che ora ci interessa.

Per la via indicata si potrebbe tentare una nuova dimostrazione della legge di MAXWELL.

Meccanica. — *Sulle alterazioni del regime elastico di un arco incastrato che si possono determinare con l'aggiunta di una catena.*
Nota ⁽¹⁾ di G. COLONNETTI, presentata dal Corrisp. C. GUIDI.

Mi si è recentemente presentata la opportunità di studiare il comportamento elastico di un arco, incastrato agli estremi, al quale venga aggiunta una catena; e mi sembra non privo di interesse pei tecnici l'esporre qui brevemente quel tanto che c'è di nuovo e di notevole nel procedimento da me adottato, e che, all'atto pratico, si è rivelato fecondo di interessanti applicazioni.

S'intende che l'aggiunta della catena era stata suggerita, nel caso di cui io ebbi ad occuparmi, dalla opportunità di correggere un poco soddisfacente andamento della curva delle pressioni per le condizioni normali di carico dell'arco; e v'è da credere che ragioni analoghe sussisteranno nella maggior parte dei casi consimili che possono presentarsi al tecnico.

La posizione della catena e lo stato di tensione che in essa si determina all'atto del montaggio andranno perciò, in ciascun caso concreto, messe in relazione col sistema dei carichi che l'arco è destinato a portare. Ma il far ciò rientra notoriamente nell'ambito degli ordinari calcoli della scienza delle costruzioni, quando sia noto il regime delle tensioni interne che la catena sarebbe capace di determinare nell'arco se operasse da sola, in assenza di ogni qualsiasi forza esterna.

È dunque soltanto della risoluzione di questo particolare problema di coazioni che io mi occuperò nelle pagine che seguono.

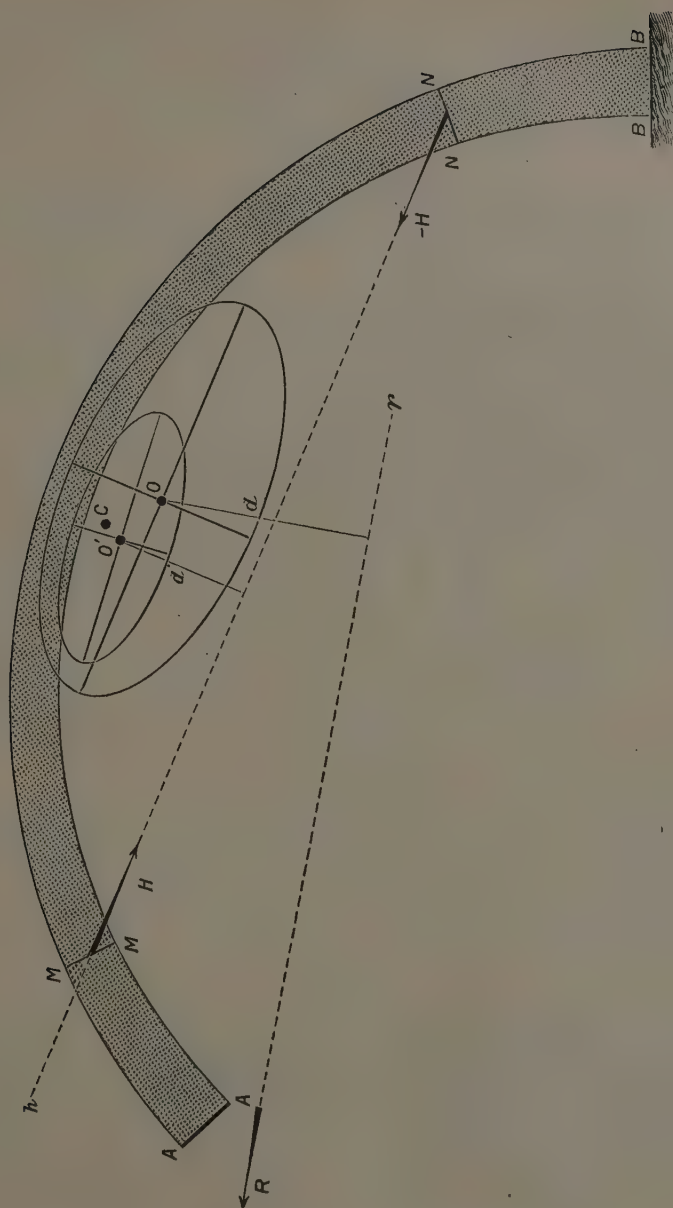
■
* *

Premetto che supporrò il sistema tutto contenuto in un piano (verticale) e che sottintenderò ad esso applicabili tutte le ipotesi e le convenzioni in uso nella teoria generale degli archi ⁽²⁾; con ciò le incognite iperstatiche del problema si riducono notoriamente a quattro sole.

Il sistema si può infatti rendere staticamente determinato mediante la soppressione di uno degli incastri e della catena. Naturalmente se si vuole che, operata una tale soppressione, il regime statico dell'arco non resti alterato, bisogna immaginare applicate all'arco stesso delle forze equipollenti alle reazioni dei vincoli soppressi.

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1929.

(2) G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, Torino, UTET, 1928, cfr. p. 218 e segg.



Tali forze possono nel caso concreto ridursi a tre: due di esse, destinate a rappresentare l'azione della catena, dovranno pensarsi applicate alle due sezioni MM ed NN dell'arco originariamente collegate da questa; esse avranno per comune linea d'azione h l'asse stesso della catena: dovranno inoltre necessariamente essere eguali e contrarie; le indicheremo con H e con $-H$.

La terza forza invece, che deve rappresentare la reazione dell'incastro soppresso, dovrà intendersi applicata alla faccia terminale AA resa libera dell'arco; di essa ci è incognita non soltanto la grandezza R ma anche la linea d'azione r .

Sta di fatto però che, sotto l'azione simultanea delle tre forze H , $-H$ ed R , le deformazioni dell'arco debbono essere quelle stesse che si verificavano quando tutti i vincoli erano in efficienza; la faccia terminale, ormai resa libera, deve in particolare comportarsi come se fosse tuttora incastrata, deve cioè rimanere perfettamente immobile nello spazio.

È questa condizione che determina la soluzione del problema.

Immaginiamo infatti per un momento che sull'arco agiscano le sole due forze H e $-H$ rappresentanti la tensione della catena. Una sola porzione dell'arco si deforma, quella compresa fra le due sezioni fra cui è tesa la catena (o, come diremo più brevemente, quella sottesa dalla catena). Per effetto di questa deformazione la faccia terminale libera subirà una rotazione attorno all'antipolo C della linea d'azione h della tensione H per rapporto all'ellisse di elasticità della predetta porzione di arco; rotazione il cui senso assumeremo per convenzione come senso delle rotazioni positive, e la cui grandezza sarà misurata dal prodotto della intensità H della tensione della catena per il momento statico del peso elastico W' della solita porzione di arco per rapporto alla retta h ⁽¹⁾.

Se si designa con O' il baricentro elastico della porzione di arco sottesa dalla catena — vale a dire il punto del piano in cui può intendersi concentrato il peso elastico W' — e si indica con d' la distanza di tale punto dalla retta h , la grandezza della rotazione si potrà molto semplicemente esprimere col prodotto

$$H \cdot W' \cdot d'.$$

D'altra parte immaginiamo che sull'arco agisca invece la sola reazione R . Per effetto della deformazione elastica che ne consegue — e che interessa evidentemente l'intero arco — la stessa faccia terminale libera subirà una rotazione attorno all'antipolo della retta r , linea d'azione di R , per rapporto all'ellisse di elasticità dell'intero arco; rotazione la cui grandezza sarà, per ragioni analoghe a quelle esposte poc'anzi, misurata dal prodotto della in-

(1) G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, Torino, UTET, 1928, cfr. p. 270 e segg.

tensità R della reazione per il momento statico del peso elastico W dell'intero arco per rapporto alla retta r .

Detto O il baricentro elastico dell'arco — punto di applicazione del peso elastico W — e d la sua distanza da r , la grandezza di questa nuova rotazione si potrà senz'altro scrivere sotto la forma

$$R \cdot W \cdot d.$$

Ciò posto, imporre che — in assenza di forze esterne — la faccia terminale libera resti immobile sotto l'azione simultanea delle tre forze H , — H ed R , equivale ad imporre:

1° che le due rotazioni sopra considerate abbiano il medesimo centro; che cioè lo stesso punto C che abbiamo definito come l'antipolo della retta b per rapporto all'ellisse di elasticità della porzione di arco sottesa dalla catena, sia anche l'antipolo della retta r per rapporto all'ellisse di elasticità dell'intero arco. Il che vuol dire che questa retta r , linea di azione fin qui incognita della reazione d'incastro, si può immediatamente costruire come antipolare del punto C (ormai noto) per rapporto all'ellisse di elasticità dell'intero arco.

2° che quelle rotazioni siano eguali in ampiezza e di sensi contrari: che cioè sussista la reazione

$$H \cdot W' \cdot d' + R \cdot W \cdot d = 0$$

dalla quale si ricava subito la grandezza della reazione d'incastro

$$R = - \frac{W' \cdot d'}{W \cdot d} H$$

che corrisponde ad un dato valore della tensione della catena. In questa espressione W e W' sono da considerarsi come dati (insieme colle rispettive ellissi di elasticità) quando è dato l'arco; d' è la distanza del centro O' della seconda di quelle ellissi dalla retta b asse della catena; d poi è la distanza del centro O della prima ellissi dalla retta r costruita nel modo dianzi indicato; quanto al segno negativo esso sta semplicemente ad indicare che la reazione R deve aver senso tale da tendere a far ruotare la faccia terminale (supposta libera) dell'arco attorno al centro C nel senso contrario a quello che verrebbe determinato dalla tensione H della catena.

Così lo stato di coazione elastica che nasce nell'arco per l'aggiunta della catena riesce completamente determinato in funzione della tensione H di questa.

Idromeccanica. — *Osservazione sul moto stazionario di liquidi viscosi.* Nota ⁽¹⁾ di B. FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. — Consideriamo un liquido viscoso la cui velocità sia caratterizzata da un vettore \mathbf{v} funzione regolare, con le sue derivate, del tempo e dei punti di uno spazio finito τ limitato da una superficie σ . Se ρ è la densità del liquido, β l'omografia degli sforzi, U il potenziale delle forze esterne, l'equazione indefinita di moto si scriverà così ⁽²⁾:

$$(1) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad}(\beta - U).$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (1) scalarmente per \mathbf{v} ed integriamo in τ . Il primo membro darà la potenza P del liquido; il secondo — supponendo il liquido completamente aderente al contorno — diverrà:

$$-\mu \int (\text{rot } \mathbf{v})^2 d\tau^{(3)},^{(4)}$$

essendo μ il coefficiente di viscosità. Dunque

$$(2) \quad P = -\mu \int (\text{rot } \mathbf{v})^2 d\tau^{(5)}.$$

2. — Supponiamo ora che il moto sia stazionario. In questa ipotesi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 \times \mathbf{v}.$$

Dunque

$$P = \frac{\rho}{2} \int \text{grad } v^2 \times \mathbf{v} d\tau = \frac{\rho}{2} \int \text{div}(v^2 \mathbf{v}) d\tau - \frac{\rho}{2} \int v^2 \text{div } \mathbf{v} d\tau.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1929.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale*, II, Pavia, 1913, pp. 26, 61.

(3) BOBYLEW, *Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik*, « Math. Ann. », Bd. 6 (1873), p. 83. Cfr. anche A. PALOMBY, *Sulla funzione di dissipazione nel moto dei fluidi viscosi*, « Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli », fascicoli 5 e 6, 1912: form. seguente alla (16).-

(4) Quest'espressione rappresenta, nel caso in esame, la dissipazione di energia.

(5) Dalla (2) si trae il teorema di BOBYLEW (loc. cit.): Il moto vorticoso di un liquido viscoso, aderente al contorno, tende a spegnersi nella quiete.

Il primo integrale che compare nell'ultimo membro della relazione ora scritta è nullo in virtù delle condizioni al contorno, il secondo integrale è pure nullo per l'incompressibilità del fluido. Dunque

$$P = 0.$$

In virtù della (2) sarà allora

$$(3) \quad \mu \int (\text{rot } \mathbf{v})^2 d\tau = 0.$$

Affinchè la (3) sia verificata bisogna che sia o $\mu = 0$, oppure $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Nel primo caso il liquido è perfetto: Un liquido perfetto in moto stazionario può aderire completamente al contorno⁽¹⁾. Nel secondo caso, essendo al contorno $\mathbf{v} = 0$, sarà $\mathbf{v} = 0$ ovunque: Un liquido viscoso in moto stazionario regolare in uno spazio finito, non può, se soggetto a forze esterne conservative, aderire completamente al contorno. O, in altre parole: *è impossibile, in uno spazio finito, in presenza di forze esterne conservative, il moto stazionario regolare di un liquido viscoso aderente completamente al contorno.*

3. - Le considerazioni svolte sussisteranno anche nel caso in cui il liquido si estende indefinitamente, purchè all'infinito siano verificate tali condizioni da render possibili le trasformazioni di integrali utilizzate nella esposizione precedente. Così, se una corrente traslatoria investe un solido, sarà sufficiente che, se r è la distanza tra un punto O e un punto $R \rightarrow \infty$, sia $\lim_{R \rightarrow \infty} r^2 \frac{d\mathbf{v}}{dR} = 0$ perchè la funzione di dissipazione risulti uguale a zero⁽²⁾. Ma la funzione di dissipazione, se il liquido viscoso aderisce completamente al solido, è appunto data dal primo membro della (3). Dunque anche in questo caso il moto è impossibile⁽³⁾.

(1) Tale possibilità è esclusa per i moti irrotazionali, ma non per ogni classe di moti di liquidi perfetti.

(2) B. FINZI, *Constatation énergétique du paradoxe de d'Alembert dans les liquides visqueux*, «Comptes-rendus de l'Ac. des Sciences», t. 182, p. 1077 (1926). Cfr. anche B. FINZI, *Sulle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi*, comunicazione alla Sezione V del Congresso Int. dei Matematici, Bologna, 1928; in riassunto nel «Boll. dell'Unione Mat. Italiana», anno VII, n. 5 (1928).

(3) Questo risultato è la generalizzazione di quanto trovò Stokes per i moti «lenti» piani: *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, «Math. and Phys. Papers», t. III, Cambridge, 1901; cfr. anche G. PICCIATI, *Sul moto di un cilindro indefinito in un liquido viscoso*, «Rend. della R. Acc. dei Lincei», vol. XVI, 2° sem., 1907,

Meccanica. — *Sui moti elementari componenti del moto relativo baricentrico di un sistema materiale.* Nota ⁽¹⁾ di F. LAMBERTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Facendo seguito a due precedenti Note ⁽²⁾ che si riferiscono al sistema S di punti materiali $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$, trarrò alcune deduzioni riguardanti i moti elementari $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, componenti del moto relativo \mathfrak{M}_r di S rispetto al baricentro G, per i quali le velocità $\mathbf{v}_i^{(p)}, \mathbf{v}_i^{(\tau)}$, del generico punto P_i sono le componenti della relativa $\mathbf{v}_i^{(r)}$ secondo le direzioni di $\mathbf{GP}_i \equiv \mathbf{q}_i$ e normale a \mathbf{q}_i .

Osserverò anzitutto, circa la forza viva T_r di S nel moto \mathfrak{M}_r , che ad ogni istante si ha:

$$(1) \quad T_r = T_p + T_\tau,$$

ove T_p, T_τ , sono le forze vive di S nei moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, come facilmente si deduce, essendo $\mathbf{v}_i^{(r)^2} = \mathbf{v}_i^{(p)^2} + \mathbf{v}_i^{(\tau)^2}$. Se si ammette che la proprietà espressa dalla (1) debba considerarsi logico complemento di quella che corrisponde al teorema di König, si avrà in luogo dell'uguaglianza che traduce questo teorema la seguente (T, T_G , forze vive di S nei moti \mathfrak{M} , assoluto, e \mathfrak{M}_G , di traslazione solidale col baricentro):

$$(2) \quad T = T_G + T_p + T_\tau,$$

che è opportuno porre a lato delle (5), (6), (7), della prima Nota citata, dalle quali fu dedotta la distinta specie dei moti componenti elementari del sistema S.

Secondariamente rileverò tre speciali sistemi di componenti dell'accelerazione relativa $\mathbf{a}_i^{(r)}$ del generico punto P_i , in cui le componenti sono:

1° Le $\mathbf{a}_i^{(p)}, \mathbf{a}_i^{(\tau)}$, già considerate nella seconda Nota citata, aventi le direzioni di \mathbf{q}_i e ortogonale a \mathbf{q}_i , e per espressioni:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{a}_i^{(p)} = \ddot{\mathbf{q}}_i - \omega_i^2 \mathbf{q}_i \\ \mathbf{a}_i^{(\tau)} = \mathbf{q}_i \wedge \dot{\omega}_i + 2 \dot{\mathbf{q}}_i \wedge \omega_i. \end{cases}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1929.

(2) Su una terza equazione cardinale nella Dinamica dei sistemi materiali, «Rend. Accad. dei Lincei», vol. VIII, p. 679, e: Intorno a due particolari equazioni dinamiche di un sistema materiale vincolato, ibi, vol. IX, p. 395.

2° Le accelerazioni $\alpha_i^{(p)}$, $\alpha_i^{(\tau)}$, di P_i corrispondenti ai moti \mathfrak{M}_p , \mathfrak{M}_τ , essendo:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_i^{(p)} = \frac{d\mathbf{v}_i^{(p)}}{dt} = \ddot{\mathbf{e}}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i, \\ \alpha_i^{(\tau)} = \frac{d\mathbf{v}_i^{(\tau)}}{dt} = \mathbf{e}_i \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \omega_i^2 \mathbf{e}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i. \end{cases}$$

3° Le accelerazioni di Coriolis (α_i'' relativa, α_i''' di trascinamento, α_i'''' complementare) che risultano per P_i singolarmente considerato, se si intende come moto relativo quello in cui la velocità è $\mathbf{v}_i^{(p)}$ secondo la retta GP mobile attorno a G, e moto di trascinamento l'altro, pel quale la velocità è $\mathbf{v}_i^{(\tau)}$, solidale ad ogni istante con la stessa retta. Si ha:

$$(5) \quad \alpha_i' = \ddot{\mathbf{e}}_i, \quad \alpha_i'' = \mathbf{e}_i \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \omega_i^2 \mathbf{e}_i, \quad \alpha_i''' = \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i.$$

A riguardo di tali sistemi si osserverà che tutte le componenti sono formate in modo assai semplice con vettori presi fra i quattro seguenti, di ovvio significato, $\ddot{\mathbf{e}}_i$, $\omega_i^2 \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$, $\dot{\mathbf{e}}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i$, le cui speciali direzioni, coincidenti con quella di \mathbf{e}_i o normali ad essa, avranno parte fondamentale nei risultati che si dedurranno.

Ciò premesso, nel procedere alla ricerca delle equazioni dinamiche di P_i nei moti \mathfrak{M}_p , \mathfrak{M}_τ , indicherò con $\mathbf{F}_i^{(p)}$, $\mathbf{F}_i^{(\tau)}$, le componenti, rispettivamente nelle ovvie direzioni, della risultante $\mathbf{F}_i^{(r)}$ di tutte le forze agenti su P_i rispetto al moto relativo \mathfrak{M}_r . Sono ovvie le relazioni

$$\begin{aligned} m_i \alpha_i' &= \mathbf{F}_i^{(p)} + m_i \omega_i^2 \mathbf{e}_i, \\ m_i (\alpha_i^{(p)} + \alpha_i^{(\tau)}) &= \mathbf{F}_i^{(p)} + \mathbf{F}_i^{(\tau)}, \end{aligned}$$

dalle quali si deducono le seguenti:

$$(6) \quad \begin{cases} m_i \alpha_i^{(p)} = \mathbf{F}_i^{(p)} + m_i (\omega_i^2 \mathbf{e}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i), \\ m_i \alpha_i^{(\tau)} = \mathbf{F}_i^{(\tau)} - m_i (\omega_i^2 \mathbf{e}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i), \end{cases}$$

che sono le equazioni dinamiche cercate. Queste mostrano che allo scopo predetto si debbono, rispettivamente con $\mathbf{F}_i^{(p)}$, $\mathbf{F}_i^{(\tau)}$, considerare forze agenti su P_i quelle espresse dai termini in cui sono le parentesi, da qualificarsi come fittizie⁽¹⁾, le quali, notando in esse la singolare circostanza che agiscono sullo stesso punto, rispetto a due diversi moti, e non su distinti punti

(1) Se, astraendo dal segno, si paragona ognuna di dette forze con la forza fittizia \mathbf{F} che trovasi nella relazione (16) della prima Nota citata, si vede, rendendosene facilmente ragione, che soltanto il termine $\omega_i^2 \mathbf{e}_i$ è comune, per cui le forze messe a confronto non debbono scambiarsi l'una coll'altra.

materiali, si corrispondono fra loro, per grandezza, direzione e verso, come azione e reazione.

Se dalle precedenti si formano per P_i le equazioni delle forze vive che corrispondono agli spostamenti $\mathbf{v}_i^{(p)} dt$, $\mathbf{v}_i^{(\tau)} dt$, di P_i nei due moti elementari, e da esse, sommando le corrispondenti per $i = 1, 2, \dots, N$, quelle del sistema S , si ha:

$$dT_p = \sum_i^N \{ \mathbf{F}_i^{(p)} + m_i (\omega_i^2 \mathbf{e}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \omega_i) \} \times \mathbf{v}_i^{(p)} dt$$

$$dT_\tau = \sum_i^N \{ \mathbf{F}_i^{(\tau)} - m_i (\omega_i^2 \mathbf{e}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \omega_i) \} \times \mathbf{v}_i^{(\tau)} dt$$

in cui i lavori totali delle forze fittizie, astraendo dal segno, hanno lo stesso valore $d\lambda = \sum_i^N m_i \frac{v_i^{(\tau)^2} - v_i^{(p)^2}}{2} dt$; indicando con dL_p, dL_τ , i lavori delle forze effettive, si ha così:

$$(7) \quad \begin{cases} dT_p = dL_p + d\lambda \\ dT_\tau = dL_\tau - d\lambda \end{cases}$$

ove il termine $d\lambda$ corrisponde ad un passaggio di forza viva che avviene fra i valori di T_p, T_τ , per effetto delle forze fittizie.

Quanto sopra non richiede che i moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, soddisfino a speciali condizioni. Tuttavia, ricorrendo col pensiero alla concezione che fa discendere, mediante le note sostituzioni, il teorema delle forze vive nei moti assoluto e relativo dalle corrispondenti equazioni simboliche della Dinamica, si è indotti a considerare distintamente i moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, di cui sussistono le equazioni simboliche come casi particolari di quella della Dinamica relativa e le (7) si deducono come conseguenze di dette equazioni. Trattasi dei moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$ in cui la relazione

$$\sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(r)} = \sum_i^N m_i (\mathbf{v}_i^{(p)} + \mathbf{v}_i^{(\tau)}) = 0$$

si scinde nelle due, pure vevoli istante per istante:

$$(8) \quad \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(p)} = 0, \quad \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^{(\tau)} = 0,$$

e conseguentemente, per le (6), la nota relazione $\sum_i^N \mathbf{F}_i^{(r)} = 0$ si scinde nelle altre

$$(9) \quad \begin{cases} \sum_i^N \{ \mathbf{F}_i^{(p)} + m_i (\omega_i^2 \mathbf{e}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \omega_i) \} = 0, \\ \sum_i^N \{ \mathbf{F}_i^{(\tau)} - m_i (\omega_i^2 \mathbf{e}_i + \dot{\mathbf{e}}_i \wedge \omega_i) \} = 0, \end{cases}$$

necessarie fra le forze agenti rispetto ai moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, entrambi, per le (8), particolari moti relativi.

A riguardo degli spostamenti virtuali da considerarsi nelle equazioni simboliche che si tratta di stabilire è ovvio che per valere il noto criterio che consente, con altra circa le forze, la sostituzione ad essi rispettivamente degli spostamenti reali $v_i^{(p)} dt$, $v_i^{(\tau)} dt$, va sottinteso che le direzioni degli spostamenti che si sostituiscono siano le stesse, per cui i primi sono delle specie $\delta_p P_i$, $\delta_\tau P_i$. E trattandosi di sistemi di spostamenti relativi sarà:

$$(\beta) \quad \sum_i^N m_i \delta_p P_i = 0 \quad , \quad \sum_i^N m_i \delta_\tau P_i = 0,$$

oltrechè dovranno essere verificate le eventuali equazioni dei vincoli; insomma, le condizioni riferentisi ai due sistemi di spostamenti virtuali debbono essere le stesse che quelle, nella seconda Nota citata, rispettivamente specificate per gli analoghi sistemi nei riguardi delle (11), (12). Ne consegue facilmente che le forze attive da considerarsi nei moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, sono quelle che si ottengono dalle espressioni delle forze agenti sui punti P_i che sono a secondi membri delle (6) sostituendovi le componenti $\varphi_i^{(p)}, \varphi_i^{(\tau)}$, di $\varphi_i^{(r)}$ secondo le ovvie solite direzioni, rispettivamente in luogo di $F_i^{(p)}, F_i^{(\tau)}$. Essendo così le equazioni simboliche che si volevano:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i^N [\alpha_i^{(p)} - \{ \varphi_i^{(p)} + m_i (\omega_i^2 q_i + \dot{q}_i \wedge \omega_i) \}] \times \delta_p P_i = 0, \\ \sum_i^N [\alpha_i^{(\tau)} - \{ \varphi_i^{(\tau)} - m_i (\omega_i^2 q_i + \dot{q}_i \wedge \omega_i) \}] \times \delta_\tau P_i = 0, \end{array} \right.$$

oltre la conferma, per i particolari moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$, soddisfacenti le (8), della premessa circostanza per cui dalle (10) si deducono le (7), la quale è per ovvie constatazioni immediata, si presenta a riguardo delle (10) un'altra osservazione sostanziale.

Dalle espressioni delle equilibrantisi forze fittizie per il punto P_i si vede la dipendenza di ognuna, oltre che dalle coordinate del punto, da ambedue le simultanee velocità $v_i^{(p)}, v_i^{(\tau)}$, il che mostra l'impossibilità di studiare separatamente, per il sistema S , i moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_\tau$. Ma se, riferendoci al generico istante t , consideriamo S soltanto per indagarne le relazioni dinamiche che derivano dalle (10) per ulteriori particolarizzazioni degli spostamenti virtuali, potremo occuparci di ciascuna delle (10) distintamente. Infatti ciò equivale a stabilire, come è lecito per le (6), (9), le due equazioni simboliche riflettenti i moti relativi di S in cui siano rispettivamente forze attive per ciascun punto del sistema le forze espresse da $\varphi_i^{(p)} + m_i (\omega_i^2 q_i + \dot{q}_i \wedge \omega_i)$, $\varphi_i^{(\tau)} - m_i (\omega_i^2 q_i + \dot{q}_i \wedge \omega_i)$, indi specializzare corrispondentemente nelle suddette due equazioni i sistemi di spostamenti virtuali

nelle specie $\delta_p P_i$, $\delta_r P_i$; dopo di che si potrà, conservando le specie, ulteriormente particularizzare, nel modo conveniente, detti sistemi di spostamenti virtuali purchè siano sempre soddisfatte le (8).

Quanto precede basta per arguire che dalle (10), corrispondenti ai moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_r$, debbano conseguire, per sistemi i cui vincoli soddisfino convenienti condizioni, le equazioni cardinali che si riferiscono alle entità H, K , pertinenti a detti moti. Ora, per avere la conferma di ciò basta riferirsi alle (11), (12), della seconda Nota citata, alle quali le (10) — avuto riguardo ai valori di $\alpha_i^{(p)}, \alpha_i^{(r)}, \alpha_i^{(p)}, \alpha_i^{(r)}$, espressi dalle (3), (4) — sono rispettivamente identiche, come facilmente si constata; perciò varrà per le (10) quanto nella stessa Nota fu detto per le (11), (12), al cui riguardo si potrà aggiungere che anche le (7), applicando il noto criterio, ne sono conseguenze.

Osserverò infine, nel merito delle stesse (11), (12), che la loro convenzionale corrispondenza ai moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_r$, accennata nella seconda Nota, in base alla coincidenza delle direzioni di $\alpha_i^{(p)}, \alpha_i^{(r)}$ rispettivamente con quelle di $v_i^{(p)}, v_i^{(r)}$, diventa, per l'identità di esse alle (10), anche sostanziale.

OSSERVAZIONE. — Se, ad ogni istante, per significare che sussiste la relazione supposta nello scrivere la (8), si pone:

$$\sum_i^N m_i v_i^{(p)} = \sum_i^N m_i v_i^{(r)},$$

e nell'eguaglianza che si ottiene derivando rispetto a t i membri di questa si sostituisce per $\alpha_i^{(p)}, \alpha_i^{(r)}$, rispettivamente le espressioni $\alpha_i' + \alpha_i'''$, $\alpha_i'' + \alpha_i'''$, in conformità delle (4), (5), si ottiene, riducendo, una relazione assai semplice la quale esprime che nel caso dei particolari moti $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_r$, di cui si tratta si verifica l'uguaglianza dei vettori risultanti, rispettivamente, di tutte le forze d'inerzia relative e di quelle di trascinamento. Detta relazione è inclusa nella seguente, più compendiosa, che lega i sistemi di forze d'inerzia corrispondenti, nei singoli punti materiali di S , alle distinte accelerazioni componenti di Coriolis, dedotte come precedentemente, nel caso suddetto:

$$\sum_i^N m_i \alpha_i' = \sum_i^N m_i \alpha_i'' = - \sum_i^N m_i \alpha_i'''$$

facilmente deducibile essendo $\sum_i^N m_i \alpha_i^{(r)} = 0$.

Fra i particolari atti di moto $\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_r$, soddisfacenti le (8) che si possono ad un certo istante t immaginare per S se ne ha, per ciascuna specie, uno per cui paragonando corrispondentemente le equazioni cardinali:

$$(I) \quad \frac{dH}{dt} = 2T_r + L_r \quad , \quad \frac{dK}{dt} = M_r ,$$

ove L_r , M_r , sono rispettivamente i momenti scalare e vettoriale baricentrici di tutte le forze agenti sui singoli punti di S , con le precedenti equazioni (7), sussiste una circostanza, banale per la sua semplicità e incompletamente risaputa nella sostanza, che tuttavia non si può non rilevare. E cioè, se, corrispondentemente alle ipotesi fatte per gli spostamenti virtuali nelle particolari equazioni dinamiche di cui si occupa la seconda delle Note citate, si pone nelle prime delle (I) e delle (7), riferentisi ad \mathfrak{M}_ρ , $\mathbf{v}_i^{(\rho)} = \dot{\mathbf{q}}_i = n\mathbf{q}_i$, ove n è per tutti i punti P_i lo stesso numero, oppure nelle seconde, che si riferiscono a \mathfrak{M}_τ , $\mathbf{v}_i^{(\tau)} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}_i = \boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{q}_i$, ove $\boldsymbol{\omega}_i$ è la proiezione del vettore $\boldsymbol{\omega}$, pure lo stesso per tutti i punti, sulla giacitura ortogonale a \mathbf{q}_i , consegue rispettivamente che le prime equazioni delle (I), (7), oppure le seconde, sono equivalenti; cosicchè se ambedue le ipotesi sono all'istante t soddisfatte basta per detto istante considerare, in luogo delle quattro equazioni, soltanto le (I). Ciò si deduce per le identità che, a meno dei fattori sopprimibili $n dt$, $\boldsymbol{\omega} dt$, risultano rispettivamente, dopo le sostituzioni in virtù delle suddette posizioni, fra le equazioni poste a confronto.

Le precedenti considerazioni possono riferirsi ad un qualsiasi intervallo (t_0, t_1) facendo per le velocità $\mathbf{v}_i^{(\rho)}$, $\mathbf{v}_i^{(\tau)}$, nel sistema S , a ciascun istante dell'intervallo, posizioni analoghe alle suddette, alla condizione che n , $\boldsymbol{\omega}$, siano generalmente funzioni continue di t , cui si può aggiungere che siano derivabili. Ora considererò il caso che entrambe le posizioni di cui si tratta siano verificate in conseguenza di speciali vincoli i quali, basandosi sulle immaginarie rette mobili GP_i , possono tradursi nelle seguenti condizioni imposte: 1°) che le stesse rette si muovano solidalmente fra loro; 2°) che i rapporti delle distanze GP_i siano costanti, cioè che per il generico punto P_i sia $\rho_i = v(t)\rho_i^{(0)}$, dove $\rho_i^{(0)}$ è il valore di ρ_i per $t = t_0$, e $v(t)$ funzione derivabile che diventa l'unità per $t = t_0$. Per la prima condizione il moto \mathfrak{M}_τ sarà la rotazione $\boldsymbol{\omega}$, di asse passante per G , del sistema σ solidale con le rette, il quale può assumersi come riferimento pel moto \mathfrak{M}_ρ ; e per la seconda, cui si deve che S assuma rispetto a σ soltanto configurazioni omotetiche con polo G , la velocità $\mathbf{v}_i^{(\rho)}$ di P_i in \mathfrak{M}_ρ avrà per espressione $\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\dot{v}}{v}\mathbf{q}_i$, cosicchè è pure verificata la seconda posizione con $n = \frac{\dot{v}}{v}$, essendo \dot{v} la derivata temporale di v . Viceversa, cono-

scendo $n(t)$, si ha $v(t) = e^{\int_{t_0}^t n dt}$. Si conclude che, in generale, risulta definita da quanto precede una particolare specie di sistemi materiali in cui, a causa dei vincoli che intercedono fra i punti materiali che ne sono elementi e perciò da considerarsi *interni* al sistema, rimane costante la conformazione geometrica del sistema pur variando le dimensioni; il grado

di libertà di tali sistemi supera, in conseguenza del moto \mathfrak{M}_p , di un'unità quello dei sistemi rigidi che si trovano nelle identiche condizioni circa gli eventuali vincoli esterni, e sarà sette se detti sistemi sono liberi. In questo caso il moto degli stessi sistemi, per i quali adotterò la qualifica di *ameta-morfi*, è determinato da sette caratteristiche, poichè si deve aggiungere la n , che corrisponde al moto \mathfrak{M}_p , alle sei che corrispondono al moto di σ .

Sarà osservato che essendo i sistemi ametamorfici casi particolari di sistemi che si muovono conservandosi affini a sè stessi, studiati dal Formenti⁽¹⁾, dei quali si ha un esempio nell'elettrone⁽²⁾, le loro equazioni si possono dedurre da quelle del Formenti facendo l'ipotesi che l'affinità si riduca ad una similitudine. Ma la brevità del procedimento che sto per esporre come esempio di applicazione delle equazioni cardinali e la forma semplice e comoda per i calcoli con cui ne emergono le equazioni cercate dispensano da ogni commento al riguardo.

Proprietà essenziale, facile a dimostrarsi, dei sistemi ametamorfici è che gli assi principali d'inerzia, considerati a ciascun istante, costituiscono una terna di assi solidale con σ ; e se con $J_G, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, s'indicano il momento polare baricentrico d'inerzia ed i momenti assiali principali, si hanno al riguardo le seguenti relazioni fondamentali nella Geometria delle masse degli stessi sistemi:

$$(I1) \quad J_G = v^2 J_G^{(0)}, \quad \mathfrak{A} = v^2 \mathfrak{A}_0, \quad \mathfrak{B} = v^2 \mathfrak{B}_0, \quad \mathfrak{C} = v^2 \mathfrak{C}_0,$$

dove $J_G^{(0)}, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{C}_0$, sono gli analoghi momenti all'istante t_0 , cosicchè le espressioni delle forze vive T_p, T_r , all'istante t , sono:

$$(I2) \quad T_p = \frac{1}{2} v^2 J_G^{(0)}, \quad T_r = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_0 p^2 + \mathfrak{B}_0 q^2 + \mathfrak{C}_0 r^2) v^2,$$

indicando con p, q, r , le componenti di ω secondo gli assi principali d'inerzia x, y, z .

Come per i solidi, assume speciale importanza nei sistemi materiali ametamorfici lo studio del moto \mathfrak{M}_r , relativo baricentrico, al quale si riferiscono le equazioni cardinali:

$$(II) \quad \frac{dH}{dt} = 2T_r + \Lambda_r, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \boldsymbol{\mu}_r,$$

(Λ_r e $\boldsymbol{\mu}_r$ sono i momenti scalare e vettoriale baricentrici delle forze attive relative) dalle quali specializzando il sistema e riferendoci per la seconda agli assi x, y, z , sono determinate le caratteristiche n, p, q, r . Ma costi-

(1) FORMENTI, *Dinamica dei sistemi che si muovono conservandosi affini a sè stessi*, «Rendic. del R. Istit. Lombardo di Sc. e Lett.», serie II, vol. 19.

(2) SIGNORINI, *Sulla dinamica dell'elettrone svincolata da arbitrarie ipotesi cinematiche*, «N. Cimento», 2° sem. 1912.

tuisce un vantaggio, perchè semplifica il procedimento ed avvicina la soluzione integrale del problema, assumere come incognita v invece di n , il che è lecito per la corrispondenza dianzi stabilita fra n e v .

Dalla prima delle (II), ricordando che $H = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J_G$, e per le (I), (11), (12), si ottiene facilmente:

$$(13) \quad J_G^{(0)} \ddot{v} - (\mathcal{A}_0 p^2 + \mathcal{B}_0 q^2 + \mathcal{C}_0 r^2) v^2 = \Lambda_r,$$

e dalla seconda, proiettandone i membri sulle direzioni degli assi x, y, z , mobili, come, pel caso di un sistema rigido, nel procedimento per ottenere le equazioni di Eulero, avvertendo però che ora nelle componenti $\mathcal{A}p, \mathcal{B}q, \mathcal{C}r$, del vettore \mathbf{K} da derivare $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, sono funzioni di t date dalle (11), risultano le equazioni:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_0 \frac{d}{dt} (v^2 p) - v^2 (\mathcal{B}_0 - \mathcal{C}_0) q r = \mu_x, \\ \mathcal{B}_0 \frac{d}{dt} (v^2 q) - v^2 (\mathcal{C}_0 - \mathcal{A}_0) r p = \mu_y, \\ \mathcal{C}_0 \frac{d}{dt} (v^2 r) - v^2 (\mathcal{A}_0 - \mathcal{B}_0) p q = \mu_z, \end{array} \right.$$

le quali si riducono a quelle di Eulero se v è una costante, necessariamente eguale ad 1, ossia quando il sistema è rigido.

Le quattro equazioni (13), (14), sono, *allo stesso modo* delle equazioni di Eulero per i solidi, ma coll'incognita v in più, le equazioni dinamiche dei sistemi ametamorf nel moto relativo rispetto al baricentro. E cioè, per considerazioni analoghe a quelle note per i solidi, si ha che per l'impostazione generale del problema si debbono aggiungere le relazioni di tipo differenziale che esprimono le componenti p, q, r , in funzione dei tre parametri di orientazione della terna di assi x, y, z , ottenendosi fra le sette incognite (le v, p, q, r ed i suddetti parametri) un sistema di altrettante equazioni differenziali del secondo ordine rispetto a v e del primo rispetto alle altre incognite. Esse si riducono, eliminando le p, q, r , per mezzo delle suddette relazioni, a quattro equazioni del secondo ordine, rispetto a v ed ai parametri, i cui integrali contengono otto costanti determinate conoscendosi l'atto di moto del sistema per $t = t_0$.

Nello studio del moto dei sistemi ametamorf converrà, come per i solidi, limitarsi a casi particolari corrispondenti ad ipotesi restrittive circa la natura della sollecitazione o la conformazione materiale del sistema. Così se si pone che le forze attive debbano soddisfare la relazione:

$$\Lambda_r = - (\mathcal{A}_0 p^2 + \mathcal{B}_0 q^2 + \mathcal{C}_0 r^2),$$

la (13), essendo $J_0^{(0)}$, v , per loro natura, diversi da zero, si riduce a $\ddot{v} = 0$, che, dopo integrazione, dà: $v = c(t - t_0) + c_1 = c(t - t_0) + 1$. Altra ipotesi restrittiva da considerarsi a riguardo delle forze è che sia $\mu_r = 0$, per cui si annullano i secondi membri delle (14). E circa la conformazione l'ipotesi restrittiva più naturale e importante è che il sistema ametamorfo abbia inizialmente struttura giroscopica la quale si conserverà negli istanti successivi. In conclusione, sorgono per le accennate ipotesi - delle quali non sarà impossibile trovare corrispondenti realizzazioni - svariati esempi sui sistemi ametamorfhi i quali comprendono come casi particolari quelli classici riguardanti i solidi, ed è intuitivo che i procedimenti seguiti per questi ed i risultati noti saranno utili a generalizzare proponendosi la trattazione dei primi.

ERRATA CORRIGE

A p. 399, linea 26^a fino alla 30^a, nella seconda Nota citata, invece di: Ma è da avvertire... ecc., leggere: Ma sarebbe persino superfluo avvertire che la corrispondenza, in principio accennata, delle accelerazioni $a_i^{(p)}$, $a_i^{(\tau)}$, ai moti \mathcal{M}_p , \mathcal{M}_τ , potendo soltanto essere intesa in senso convenzionale, non autorizza, nei riguardi delle (11), (12), a trarre illazioni a causa della forma con cui si presentano. È perciò che....

Idromeccanica. — *Effetto dinamico di una corrente traslatoria che investe un cilindro sottile in vicinanza di una parete piana indefinita.* Nota ⁽¹⁾ di E. RAIMONDI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Consideriamo un solido cilindrico indefinito, a base circolare, colle generatrici parallele ad una parete rigida piana pure indefinita, immerso in una massa fluida incomprimibile di densità unitaria, che occupi il semispazio limitato dalla parete piana.

La massa fluida si muova, in modo permanente, di traslazione uniforme, parallelamente alla parete rigida e perpendicolarmente alle generatrici del cilindro; e si supponga che, su ogni sezione piana normale alle generatrici, il moto avvenga nello stesso modo, essendo identiche le caratteristiche del moto lungo ogni retta normale alla sezione.

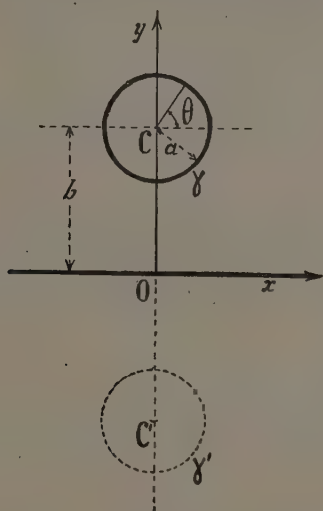
Con tali ipotesi, è sufficiente considerare in una generica sezione piana una corrente traslatoria parallela ad una retta e da essa limitata, che investe un cerchio (moto piano).

Assuniamo la retta come asse delle x e sia $y \geq 0$ il semipiano occupato dal fluido e dal cerchio, il cui centro C sia sull'asse delle y . Siano,

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1929.

inoltre a il raggio del cerchio e $b > a$ la distanza del suo centro dalla retta; distanza che si suppone sufficientemente grande, rispetto ad a , in maniera da potersi porre $\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$, per $n > 1$. Indichiamo infine con γ la circonferenza del cerchio.

Scopo della presente Nota è quello di trovare con l'approssimazione ammessa, l'effetto dinamico della corrente sopra descritta sul cilindro.



Incominciamo col determinare la funzione f della variabile complessa $z = x + iy$, che definisce il campo del moto di cui trattasi.

Ciò si può fare seguendo la via tracciata, per un caso più generale, dal Cisotti ⁽¹⁾.

Siccome all'infinito si deve avere una traslazione uniforme, chiamando t il suo modulo ed adottando le notazioni usuali, alla funzione f si potrà dare la forma

$$(1) \quad f(z) = \varphi + i\psi = tz + f_1(z) = tz + \varphi_1 + i\psi_1;$$

e poichè la velocità complessa è

$$(2) \quad w = u - iv = \frac{df}{dz} = t + \frac{df_1}{dz},$$

(1) U. CISOTTI, *Campo elettrostatico dovuto ad un qualunque numero di sottili conduttori elettrizzati di forma cilindrica e ad assi paralleli*. Questi « Rendiconti », vol. III, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 6, marzo 1926.

dovrà aversi

$$(3) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{df_1}{dz} = 0.$$

La questione pertanto si riduce alla determinazione di f_1 .

Considerando, come conviene, insieme alla circonferenza γ , la circonferenza γ' ad essa simmetrica rispetto all'asse delle x , la funzione f_1 , dovendo essere regolare (finita, continua ed uniforme) su tutto il piano esterno alle due circonferenze γ e γ' , rispettivamente di centri ib e $-ib$, si potrà rappresentare con una serie della forma

$$(4) \quad f_1 = \sum_n (\alpha_n + i\beta_n) (z - ib)^{-n} + \sum_n (\gamma_n + i\delta_n) (z + ib)^{-n},$$

dove $\alpha_n + i\beta_n$ e $\gamma_n + i\delta_n$ sono coefficienti indipendenti da z .

Sull'asse delle x e sulla circonferenza γ dovrà essere ψ costante, essendo esse manifestamente linee di corrente; anzi, se supponiamo che sull'asse delle x sia $\psi = 0$, sopra γ sarà $\psi = q$, indicando con q la portata tra γ e l'asse delle x .

La (1) ci dice che per z reale dovrà essere f_1 reale e che pertanto alla (4) si potrà dare la forma

$$(5) \quad f_1 = \sum_n (\alpha_n + i\beta_n) (z - ib)^{-n} + \sum_n (\alpha_n - i\beta_n) (z + ib)^{-n};$$

ed inoltre che sopra γ

$$\psi_1 = q - ty = q - t(b + a \sin \theta),$$

per $0 \leq \theta \leq 2\pi$, essendo θ l'angolo che un raggio generico di γ fa con la direzione positiva dell'asse delle x .

In virtù di questa seconda condizione, è lecito attribuire alla (5) la forma più semplice

$$(6) \quad f = \varphi + i\psi = t\zeta + \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\zeta - ib} + \frac{\alpha_1 - i\beta_1}{\zeta + ib},$$

e determinare α_1 e β_1 in maniera che sopra γ risulti ψ costante.

Ma poichè sopra γ , coll'approssimazione ammessa,

$$\frac{1}{\zeta - ib} = \frac{e^{-i\theta}}{a}, \quad \frac{1}{\zeta + ib} = \frac{1}{2ib} \left(1 - \frac{ae^{-i\theta}}{2ib} \right),$$

sostituendo nella (6) e passando alla forma trigonometrica, si ha

$$\psi = bt + \left[at + \alpha_1 \left(\frac{a}{4b^2} - \frac{1}{a} \right) \right] \sin \theta + \beta_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{4b^2} \right) \cos \theta - \frac{\pi}{2b},$$

la quale mostra che, affinchè ψ sia costante, debbono essere soddisfatte le condizioni

$$\alpha_1 = a^2 t, \quad \beta_1 = 0,$$

per le quali la (6) prende la forma definitiva

$$(7) \quad f = t\zeta + a^2 t \left(\frac{1}{\zeta - ib} + \frac{1}{\zeta + ib} \right).$$

In effetti, a titolo di verifica, si può osservare che la (7) è una funzione regolare, ad eccezione dei punti $\zeta = ib$ e $\zeta = -ib$, che non appartengono al campo, dove diventa infinita.

Scritta sotto la forma

$$f = t\zeta \left(1 + \frac{2a^2}{\zeta^2 + b^2} \right),$$

si rileva che per ζ reale f è reale; dunque l'asse delle x è linea di corrente. Inoltre, poichè sopra γ

$$\zeta = ib + ae^{i\theta},$$

sostituendo, si rileva che ψ è indipendente da θ ; quindi anche la circonferenza γ è una linea di corrente.

L'espressione della velocità complessa è

$$(8) \quad w = \frac{df}{d\zeta} = t - a^2 t \left(\frac{1}{(\zeta - ib)^2} + \frac{1}{(\zeta + ib)^2} \right),$$

da cui

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} w = t;$$

dunque la (7) effettivamente all'infinito rappresenta una traslazione uniforme di velocità t .

Si può rilevare ancora che intorno a γ non vi è circolazione. Infatti, essendo γ linea di corrente, l'espressione della circolazione è, come è noto,

$$(9) \quad C = \int_{\gamma} w d\zeta = 0,$$

poichè, come si rileva dalla (8), il residuo di w è nullo.

Ciò posto, veniamo al calcolo dell'effetto dinamico.

Se indichiamo con R_x ed R_y le componenti cartesiane della risultante delle pressioni dinamiche esercitate dalla corrente fluida sugli elementi infinitesimi del profilo γ , e con M il loro momento rispetto all'origine delle

coordinate (momento che risulta normale al piano del moto), applicando le formole di Blasius⁽¹⁾ abbiamo:

$$(10) \quad R_y + i R_x = -\frac{i}{2} \int_{\gamma} w^2 d\zeta,$$

dove l'integrazione si deve eseguire in modo da lasciare alla sinistra il cerchio limitato da γ ; mentre:

$$(11) \quad M = -\frac{i}{2} \Re \int_{\gamma} w^2 \zeta d\zeta,$$

dove \Re vuol dire «parte reale di».

Essendo manifestamente nulli i residui sia di w^2 che di $w^2 \zeta$, possiamo concludere che sono nulle sia la risultante delle pressioni dinamiche della corrente sul cilindro che il loro momento.

Il paradosso di d'Alembert quindi si presenta anche nel caso considerato.

Analogamente, se con R'_x ed R'_y indichiamo le componenti della risultante delle pressioni dinamiche della corrente sulla parete piana rigida, e con M' il momento delle stesse pressioni, in virtù delle formole citate abbiamo:

$$(12) \quad R'_y + i R'_x = \frac{i}{2} \int_x w^2 d\zeta,$$

$$(13) \quad M' = \frac{i}{2} \Re \int_x w^2 \zeta d\zeta,$$

dove le integrazioni si intendono estese lungo l'asse delle x ed eseguite nel senso delle x crescenti.

Ma poichè le funzioni w^2 e $w^2 \zeta$ sono regolari nel semipiano $y \geq 0$, in virtù del teorema di Cauchy abbiamo:

$$\int_x w^2 d\zeta = \int_{\gamma} w^2 d\zeta \quad , \quad \int_x w^2 \zeta d\zeta = \int_{\gamma} w^2 \zeta d\zeta,$$

purchè le integrazioni lungo γ siano eseguite nel senso sopra precisato. Confrontando quindi le (12) e (13) colle (10) ed (11) abbiamo che

$$(8) \quad R'_y + i R'_x = -(R_y + i R_x) \quad , \quad M' = -M.$$

È quindi pure nullo l'effetto dinamico della corrente sulla parte rigida, come era da prevedersi.

(1) H. BLASIUS, *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik*. «Zeitschr. f. Math. und Phys.», vol. 58 (1910), p. 90.

Astronomia. — *Studio sulla variabile SX Herculis.* Nota ⁽¹⁾
di M. MEROLA, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Riassunto. — 82 osservazioni fotometriche eseguite dal 27 agosto 1927 al 1° dicembre 1928 permettono di determinare 2 massimi e 2 minimi, confermando in parte le irregolarità del periodo e della curva di luce notate da altri autori.

Per questa variabile scoperta nel 1907 da Leavitt, il Luizet dà i seguenti elementi fondati sulle osservazioni da lui eseguite dal 1908 al 1911.

$$\begin{aligned}\text{Max} &= 1908 \text{ maggio } 28.5 (2418090.5) + 100^{\text{d}}.55 \text{ E} \\ M - m &= 54^{\text{d}}.6\end{aligned}$$

e trova che la luminosità al massimo varia tra $7^{\text{m}}.9$ e $8^{\text{m}}.2$ e al minimo tra $8^{\text{m}}.9$ e $9^{\text{m}}.2$.

Più recentemente il Luyten fornisce:

$$\text{Max} = 2420235 (\pm 2.5) + 102^{\text{d}}.5 (\pm 0.13) \text{ E} \quad (\text{err. med.}).$$

Dalle ricerche compiute da quest'ultimo autore la classe spettrale varierebbe da K_2 a M_b .

L'opinione corrente è che questa variabile sia da classificarsi tra il tipo delle Cefeidi e quello M_d delle variabili a lungo periodo ⁽²⁾.

Le nostre osservazioni furono eseguite a Capodimonte dall'agosto 1927 al dicembre 1928, le riportiamo qui in sunto come riportiamo le curve di luce che da esse si deducono. Inoltre, tenendo nel debito conto anche le osservazioni di altri autori, dedurremo alcune conseguenze in ordine alla durata del periodo e al modo di variare della luminosità intorno al massimo.

Variabile ⁽³⁾.

$$\alpha = 16^{\text{h}} 1^{\text{m}} 21^{\text{s}} \quad \delta = + 25^{\circ} 18'.0 (1855) \quad \text{Periodo } 102^{\text{d}}.8 \quad 7^{\text{m}}.9 - 9^{\text{m}}.2$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1929.

(2) WILLEM J. LUYTEN, *A study of the variable Star SX Herculis.* «Lick Observatory Bulletin», n. 351, vol. XI (1923-24), ed anche G. MÜLLER u. E. HARTWIG, *Geschichte und Literatur des Lichtwechsels.* Band. II. Leipzig, 1920.

(3) R. PRAGER, *Katalog und ephemeriden veränderlicher Sterne für 1927.* Berlin, 1926.

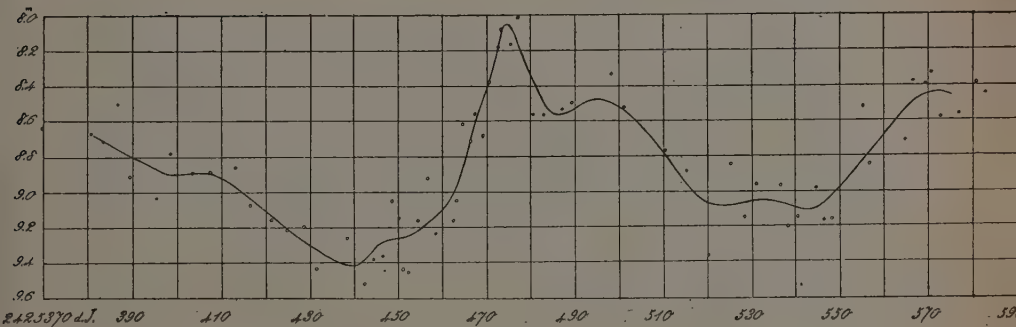
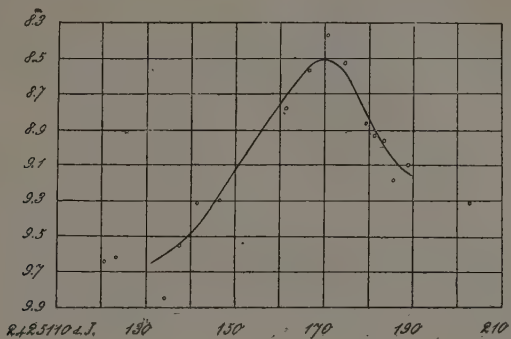
Stelle di confronto.

			(Potsdam)	(Napoli)
$a \equiv + 25^{\circ}.3020$	$BD \equiv 8494$	P.D. GW	$7^m.40$	$7^m.41$
$b \equiv$	3036	» —		9.61
$c \equiv$	3039	» $\equiv 8544$	P.D. »	7.72
$d \equiv$	3042	» —		9.21

Osservazioni.

1927 agosto 27-novembre 17.		1928 maggio 31-luglio 10		1928 agosto 21-dicembre 1	
J. D. T. M. G.	Gr.	J. D. T. M. G.	Gr.	J. D. T. M. G.	Gr.
2425120.3	9.69	2425407.4	8.89	2425480.4	8.56
123.3	9.62	413.3	8.86	483.3	8.56
134.3	9.85	416.3	9.08	485.4	8.70
137.3	9.55	421.4	9.16	487.4	8.53
141.3	9.31	424.4	9.22	489.4	8.50
146.3	9.30	428.4	9.20	498.4	8.34
161.3	8.78	431.4	9.44	501.4	8.53
166.3	8.57	438.4	9.26	510.4	8.77
170.3	8.37	442.4	9.52	515.3	8.89
174.3	8.52	444.4	9.38	520.3	9.37
179.3	8.86	446.4	9.36	525.3	8.85
181.3	8.94	448.4	9.05	528.3	9.15
183.2	8.96	450.4	9.15	531.2	8.96
185.3	9.19	451.3	9.43	536.2	8.97
188.2	9.10	452.4	9.46	538.2	9.20
202.2	9.31	454.4	9.16	540.2	9.15
1928 maggio 2-maggio 28		456.4	8.92	545.2	8.98
J. D. T. M. G.	Gr.	458.4	9.24	546.2	9.16
		462.4	9.17	548.2	9.16
2425369.4	8.64	463.4	9.05	555.2	8.52
380.4	8.67	464.3	8.62	557.2	8.85
383.4	8.71	466.3	8.72	564.2	8.72
386.4	8.50	467.4	8.56	566.2	8.38
389.3	8.91	469.3	8.69	569.3	8.40
395.4	9.04	470.4	8.39	570.2	8.33
398.4	8.78	472.3	8.18	572.2	8.59
403.4	8.89	473.4	8.09	576.2	8.57
		475.4	8.17	580.2	8.39
		477.4	8.02	582.2	8.45

La colorazione procede da WG + a G a misura che dai minimi si procede verso i massimi.



Dalle curve di luce si traggono i massimi e minimi:

Massimi.

1927 ottobre 16.2 = 2425170.2 J. D. T. M. G. 8^m.51

1928 agosto 15.8 = 2425474.8 » 8 .05

Minimi.

1928 luglio 11.9 = 2425439.9 J. D. T. M. G. 9^m.42

» ottobre 13.0 = 2425533.0 » 9 .08

e le conseguenze:

a) La luminosità al massimo non si mantiene costante. Così pel minimo.

b) I massimi, a differenza dei minimi, sono ben pronunziati. Non si riscontra l'indugio nella luce massima, per circa un mese e mezzo, come

notò il Luizet nelle citate osservazioni dal 1908 al 1911; i minimi risultano larghi come a questo autore.

c) In due rami discendenti notasi una sinuosità, quasi ad indicare l'esistenza di un massimo secondario. Così dalle date giuliane 2425390 a 2425410 e da 2425480 a 2425500. Può darsi che questa traccia di massimo secondario sia in relazione con l'andamento pressochè costante della curva di luce nel massimo come vuole il Luizet.

d) Dal minimo al massimo la variazione di luce è più rapida che dal massimo al minimo.

e) La grandezza media al massimo è 8.28, al minimo è 9.25. Si avrebbe perciò un'amplitudine media di circa 1^m (esattamente 0^m.97), in accordo con l'analoga amplitudine riscontrata dal prefato autore (1^m.00).

f) Supposto tre periodi tra i due massimi (come dalle citate Effemeridi del Prager e come risulta del resto dalle osservazioni di altri autori), si avrebbe un periodo medio di 101^d.2 mentre il periodo tra i minimi sarebbe 93^d.1.

Vediamo fino a qual punto queste conseguenze si accordano con quelle di altri osservatori.

Rappresentando graficamente alcune serie di osservazioni di questa variabile, contenute nei volumi XXXV (1927) e XXXVI (1928) della « Popular Astronomy » (a Review of Astronomy and allied Sciences), e propriamente quelle dei sigg. Peltier, Barry e Lacchini, abbiamo dedotto i massimi e i minimi che qui riportiamo insieme con quelli trovati sopra.

Massimi.

Osservatore	Epoca J. D. T. M. G.	Peso	Grandezza	Epoca media J. D. T. M. G.	Peso	Differenza epoche (periodo)	Peso
Peltier	2425165.0	3	7.94	2425167.6	6	102 ^d .4	86
Merola	170.2	3	8.15				
Peltier	270.0	1	7.90	270.0	1	102 .7	80
»	370.0	2	7.95	372.7	4		
Barry	375.4	2	7.98	477.6	7	104 .9	255
Merola	474.8	3	8.05				
Lacchini	478.0	2	7.85				
Peltier	480.0	2	7.89				

Minimi.

Osservatore	Epoca J. D. T. M. G.	Peso	Gran- dezza	Epoca media J. D. T. M. G.	Peso	Differenza epoche (periodo)	Peso
Peltier	2425248.0	1	8.58	2425248.0	1		
»	334.0	2	8.38			93 ^d .0	80
Barry	348.0	2	9.21	341.0	4		
Peltier	438.0	3	8.85			99 .0	255
Merola	439.9	3	9.42	440.0	7		
Lacchini	442.0	1	8.82			93 .0	156
Merola	533.0	2	9.08	533.0	2		

Media dei periodi (pei massimi) = 103^d.97 (± 0.25 e. m.)

» » (pei minimi) = 96.12 (± 1.21 e. m.).

L'importo dell'errore medio del periodo dedotto dai minimi è senza dubbio rilevante; ciò deriva in parte dagli errori da cui sono affetti i minimi specialmente quando le osservazioni sono poco numerose ed a stima, ma non è da escludere *a priori* che i valori del periodo ricavati formando le differenze delle epoche di due minimi consecutivi siano *effettivamente* diversi. La differenza dei due valori medi del periodo ricavato dai massimi e dai minimi è 7^d.85 cioè circa 6.4 volte maggiore di 1.24, errore medio della differenza. Il che ci avverte essere estremamente improbabile l'uguaglianza *reale* dei due cennati valori, ma è lecito supporre che fra l'agosto 1927 ed il dicembre 1928, limiti fra i quali sono comprese le nostre osservazioni, il periodo computato da massimo a massimo sia stato effettivamente diverso del periodo computato da minimo a minimo.

Terminiamo col notare che nella rappresentazione grafica delle osservazioni del Peltier, (le più numerose), appare dopo il massimo quella sinuosità a cui accennavamo a proposito della nostra curva di luce, sinuosità spiccata dopo il massimo 2425370 d. J. e meno invece dopo gli altri tre massimi del medesimo autore. Nei massimi 2425478.0 d. J. e 2425375.4 d. J., rispettivamente del Lacchini e del Barry, tale singolarità è sostituita da una diminuzione del gradiente nei rami discendenti, circa 20^d dopo i massimi. Comunque sia la particolarità notata dal Luizet non risulta a nessuno dei cennati osservatori nel biennio 1927-28.

Astronomia. — *Sul sistema fotometrico di Napoli.* Nota⁽¹⁾ di S. AURINO, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

1. — La determinazione delle grandezze fotografiche del Catalogo di Catania venne iniziata all'Osservatorio di Napoli fin dal 1923 sulla base di una nuova formola proposta dal prof. A. Bemporad⁽²⁾, formola che si adatta a rappresentare la relazione fra i diametri D delle immagini fotografiche delle stelle e le grandezze fotografiche G di esse in tutto l'intervallo di oltre 10 grandezze che può essere abbracciato da una lastra, meglio di quelle dello Scheiner, di Christie, di Kapteyn e di Charlier (rispettivamente di tipo lineare, parabolico, iperbolico e logaritmico), ed è espressa da:

$$D = a + bg + cg^2 + dg^3$$

essendo $g = G - 8^M$.

Le costanti fotometriche, cioè i coefficienti a, b, c, d si ricavano per ciascuna lastra mediante confronto col « Draper Catalogue », il catalogo più vasto di grandezze fotografiche ed anche fotometriche, nonchè di spettri e di indici di colore.

2. — La esistenza di errori sistematici del « Draper Catalogue » posti in luce mediante confronti delle grandezze fotografiche e degli spettri delle stelle del Draper con quelle delle *typical regions* di miss Leavitt⁽³⁾ potrebbe far temere che questi errori si ripercuotano nel loro intero importo sulle grandezze del « Catalogo Astrografico » dedotte a Napoli. Ciò non accade: anzi il sistema fotometrico che diremo di Napoli accusa la stessa deviazione sistematica del « Draper Catalogue » verso le grandezze più elevate come era già apparsa dai confronti suaccennati.

3. — Per mettere in luce tali deviazioni sistematiche abbiamo esaminato tutto il materiale pubblicato e da pubblicarsi comprendente 252 lastre delle zone da $+47^\circ$ a $+53^\circ$ di Decl comprese fra 6 e 12 ore di AR, confrontando la grandezza fotografica di ciascuna stella del Draper col medio delle grandezze corrispondenti alla stessa stella del « Catalogo Astrografico di Catania », medio risultante dalla riunione di due, tre, quattro e financo cinque determinazioni indipendenti a seconda della posizione della stella su lastre contigue.

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1929.

(2) A. BEMPORAD, *Di una nuova formola per determinare la grandezza fotografica delle stelle*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXXII, s. 5^a, 18 marzo 1923.

(3) A. BEMPORAD e L. GENOVESE, *Ricerche sugli errori sistematici del Draper Catalogue*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. IX, s. 6^a, maggio 1929.

solo $0^m.08$. Esso è dunque circa la metà del corrispondente errore risultante dal confronto del « Draper » con le *typicals regions* di Miss Leavitt (loc. cit.),

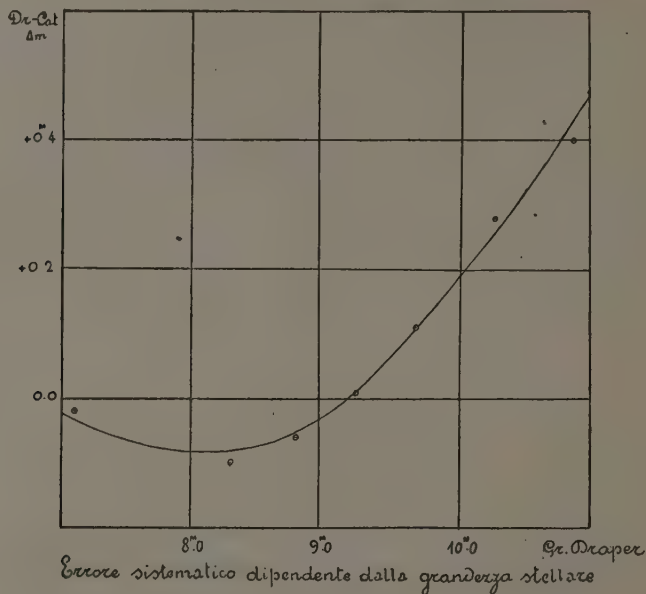


Fig. 1.

come del pari è inferiore di circa $0^m.2$ l'amplitudine risultante dalla somma $0^m.53$ degli scarti estremi su riportati in confronto dei sette decimi dedotti

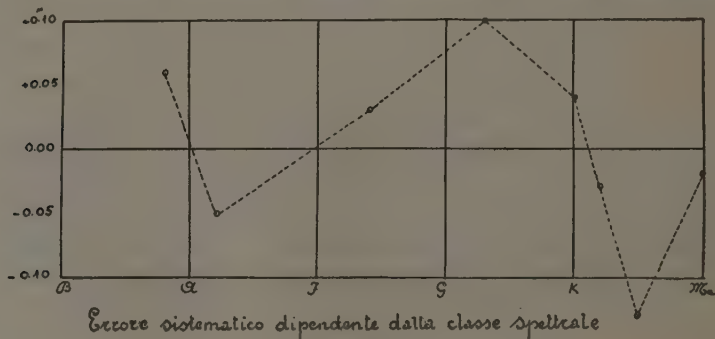


Fig. 2.

dalla curva di Bemporad e Genovese nello studio citato, ma l'andamento della differenza sistematica è sostanzialmente identico nei due casi.

5. - Raggruppando tutto il materiale per ordine di classe spettrale da B ad Ma, secondo la classificazione fattane dal « Draper », si sono ottenute le seguenti coppie di valori medi (classe spettrale e $G - G' = \Delta m$):

Numero dei confronti	Classe spettrale media	$G - G'$ Δm
30	B ₈	+ 0 ^M .06
299	A ₂	— 0 .05
310	F ₂	+ 0 .03
297	G ₃	+ 0 .10
274	K ₀	+ 0 .04
77	K ₂	— 0 .03
64	K ₅	— 0 .13
26	M	— 0 .02

Si vede dunque che l'errore dipendente dalla classe spettrale è trascurabile, essendo contenuto entro limiti abbastanza ristretti ($\pm 0^M.1$) e che, salvo le classi spettrali estreme, povere di stelle in confronto alle altre, la curva di colore è molto regolare. Il valore medio degli scarti considerati tutti positivi è appena 0.^M06. Scarti massimi dell'ordine di cui trattasi raggiungono le stelle intorno al tipo spettrale G, ed è interessante constatare che, pur essendo così regolare l'andamento dei valori medi Δm ottenuti dal confronto del « Draper » colle *typical regions* di Miss Leavitt (loc. cit.), tanto da poterli rappresentare ottimamente con una formola di 1° grado, gli scarti corrispondenti alle classi estreme presentano, benchè in minore proporzione, deviazioni del medesimo senso di quelle da noi trovate.

6. - *Concludendo*: dal confronto del « Draper » col « Catalogo Astrografico di Catania » emerge:

1° l'esistenza di un errore sistematico del « Draper Catalogue » funzione della grandezza stellare, il cui importo determinato col calcolo sulla base dei valori Δm osservati, è riportato nello specchietto al n. 4;

2° nell'intervallo fra la 7^a e la 9^a grandezza, dal quale solitamente si traggono le stelle per la riduzione fotometrica del « Catalogo di Catania », detto errore ($G - G'$) è trascurabile, raggiungendo appena + 0^M.08, cioè circa la metà dell'errore corrispondente risultante dal confronto del « Draper » colle *typical regions* di Miss Leavitt;

3° l'esistenza di un errore compreso fra $\pm 0^M.1$ e quindi trascurabile dipendente dalla classe spettrale;

In complesso il sistema fotometrico di Napoli appare in ottimo accordo col sistema di fotometria fotografica di Miss Leavitt (Harvard College).

Ottica astronomica. — *L'ipotesi balistica e la verifica della legge delle aree nelle orbite delle telescopiche.* Nota II⁽¹⁾ di C. CANNATA, presentata dal corrisp. M. LA ROSA.

Nella Nota precedente si è dimostrato che le perturbazioni introdotte dall'ipotesi balistica della velocità della luce sono generalmente insensibili, ed in ogni caso di un ordine di grandezza non superiore a quello degli errori di osservazione. Qui mostreremo in primo luogo che nel caso di doppie telescopiche ad orbite circolari o leggermente ellittiche, le deviazioni prevedibili in base alla propagazione balistica, anche quando non siano trascurabili, risultano tali da lasciare soddisfatta la legge delle aree, alterando solo la orbita che in base alle osservazioni si viene a determinare, e precisamente mutando sia l'eccentricità, sia l'orientazione rispetto a quella effettivamente percorsa dall'astro, che per tale motivo rimarrebbe sconosciuta⁽²⁾. In secondo luogo vogliamo mettere nel giusto rilievo il carattere precario delle conclusioni che si vogliono trarre dalle osservazioni astronomiche, in merito alla 2^a legge di Keplero.

Cominciamo col considerare un'orbita circolare; prendendo come origine dei tempi l'istante in cui l'astro si trova nella posizione di opposizione e contando gli angoli di rotazione a partire da questa e nel verso del moto orbitale, si ha con le solite notazioni:

$$(1) \quad T = t + \frac{d}{c + ma |\sin i| \sin mt} \quad (d, \text{ distanza dell'astro dall'osservatore}),$$

che a meno di una costante si può scrivere:

$$mT = mt - m^2 a |\sin i| \sin mt.$$

Posto $mt = E$, $m^2 a |\sin i| = e'$, risulta:

$$(2) \quad mT = E - e' \sin E.$$

Se $e' < 1$, dando ad E il significato di un'anomalia eccentrica, si trova dunque che la legge osservata del moto coincide con quella di Keplero, su un'orbita non più circolare ma ellittica e di eccentricità uguale a e' .

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1929.

(2) Si potrebbe pensare che la misura simultanea degli angoli di posizione ϑ e delle distanze ρ permetta la determinazione dell'orbita apparente indipendentemente da ogni valutazione di tempo; le incertezze, però, di questo genere di osservazioni tolgono ogni valore all'obiezione.

Anzi, siccome l'anomalia si conta a partire dal periastro, in conseguenza della propagazione balistica il moto dell'astro ci apparirà come se avvenisse su un'orbita ellittica avente l'asse maggiore lunga la visuale.

È interessante perciò notare che la verifica della 2^a legge di Keplero, come legge di dipendenza tra il tempo di osservazione e l'anomalia può attribuirsi sia ad un'effettiva eccentricità dell'orbita (come finora si è sempre fatto) sia all'effetto della propagazione balistica; le orbite circolari in conseguenza di questa ci apparirebbero ellittiche, con la caratteristica a prima vista strana di possedere l'asse maggiore orientato secondo la visuale⁽¹⁾.

Analoghe considerazioni valgono per le orbite ellittiche a piccola eccentricità. La legge che, nell'ipotesi balistica, lega la eccentricità al tempo di osservazione è in tal caso della forma⁽²⁾:

$$(3) \quad mT = E - e \sin E + H \frac{\sin(E + \varphi)}{1 - e \cos E}$$

od anche ponendo per brevità $\frac{H}{1 - e \cos E} = \alpha$,

$$(4) \quad mT = E - [e \sin E - \alpha \sin(E + \varphi)].$$

La quantità in parentesi quadra può sempre mettersi sotto la forma $e' \sin(E + \psi)$, con $e' > 0$; basterà infatti porre:

$$e' \cos \psi = e - \alpha \cos \varphi, \quad e' \sin \psi = -\alpha \sin \varphi$$

e quindi:

$$(5) \quad e' = \sqrt{(e - \alpha \cos \varphi)^2 + \alpha^2 \sin^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\alpha \sin \varphi}{\alpha \cos \varphi - e}.$$

Con questi significati di e' e ψ l'equazione generale (4) può dunque scriversi:

$$mT = E - e' \sin(E + \psi)$$

che è la forma assunta dall'equazione di Keplero pensando spostata l'origine delle anomalie dell'angolo ψ rispetto al periastro ed attribuendo all'orbita l'eccentricità e' . Queste eccentricità, e così pure l'angolo ψ varierebbero col tempo in conformità delle (5), ma quando l'eccentricità effettiva è abbastanza piccola tali variazioni risultano completamente inosservabili.

(1) Questo fatto avrebbe qualche analogia con la dissimetrica distribuzione delle longitudini del periastro scoperta da I. MULLER-BARR e spiegata recentemente da KUNIZKIJ («Russ. Astr. Journ.», 1, H. 2, 43, 1924), con l'ipotesi della dipendenza della velocità di propagazione della luce da quella della sorgente.

(2) V. questi «Rendiconti», 1927, 2^o sem., p. 296.

*
* *

Per dare infine al lettore la possibilità di farsi un criterio proprio sui limiti di esattezza che si possono raggiungere nella determinazione di un'orbita e convincerlo del carattere estremamente precario che presenta la verifica sperimentale della 2^a legge di Keplero non troviamo di meglio che riportare quasi testualmente le parole di Heuroteau⁽¹⁾ sulla costruzione dell'orbita apparente.

« Le diverse posizioni del compagno rispetto alla stella primaria », dice egli, « vengono riportate sulla carta servendosi degli angoli di posizione ϑ e delle distanze ρ come coordinate polari con l'origine nella stella primaria. Si disegna così un'ellissi fra i vari punti che *si aggiusta per tentativi fino a che la legge delle aree sia soddisfatta...* ».

Dunque la legge delle aree non si verifica, come tanto spesso si dice, ma viene invece puramente e semplicemente ad ammettersi. E nessuna meraviglia ci può essere che in definitiva non si constatino deviazioni dalla legge di Keplero, in quanto tali deviazioni, se esistenti, verrebbero ad essere eliminate dal procedimento stesso che si suole adoperare per la costruzione della ellissi apparente. Quanto di arbitrario c'è in tale procedimento, si scorgerà ancora più chiaramente esaminandone i dettagli. Diremo soltanto che si comincia con l'eliminare la irregolarità delle curve sperimentali $\vartheta(t)$ e $\rho(t)$ costruendo le cosiddette curve d'interpolazione; fondandosi poi sui dati tratti da queste curve si procede alla costruzione di una *possibile ellissi* che, soddisfacendo alla legge delle aree, segua il più fedelmente possibile i dati delle curve d'interpolazione.

Posto così, il problema della costruzione dell'orbita non si può nemmeno lontanamente ritenere determinato, specialmente quando i dati d'osservazione si riferiscono a un intervallo di tempo molto piccolo rispetto al periodo. In questo caso, in cui l'arco studiato risulta assai piccolo di fronte all'intera orbita, si ottengono così per una medesima doppia un numero più o meno grande⁽²⁾ di ellissi diverse; e i valori dedotti per gli elementi dell'orbita presentano differenze così grandi dall'uno all'altro caso, da non ispirare alcuna fiducia nemmeno per ciò che si riferisce al loro ordine di grandezza. E non parliamo poi delle difficoltà ancora più gravi che s'incontrano nei casi in cui l'ellissi viene a ridursi ad un segmento di retta.

Si deve perciò riconoscere che i limiti di precisione finora raggiungibili nelle osservazioni astronomiche sono ben lontani da permetterci una

(1) *Handbuch der Astrophysik* (vol. VI, parte II, p. 331), J. Springer, 1928.

(2) Per Sirio, sino al 1922, si erano proposte ben 27 ellissi (V. HEUROTEAU, *Handbuch der Astrophysik*, vol. VI, parte II, p. 348).

decisione sulla costanza o meno della velocità della luce; le telescopiche ci sono ancora troppo vicine per poterci dire qualche cosa su questo punto. Solo le stelle più lontane, le spettroscopiche, possono fornirci qualche indizio in proposito, ed effettivamente, con il fenomeno della loro variabilità, esse ci danno la prova più convincente della dipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente.

*
* *

Riassumendo infine i risultati esposti in questa Nota e nella precedente possiamo concludere che:

1. Per le orbite delle telescopiche le perturbazioni indotte dall'ipotesi balistica sono generalmente insignificanti.

2. Anche per le rare doppie in cui tali perturbazioni risultano relativamente cospicue, esse sono sempre nei limiti degli errori di osservazione.

3. Per le orbite a piccola eccentricità tali perturbazioni risultano tali da lasciare soddisfatta la 2^a legge di Keplero.

4. Non ha senso chiedere all'Astronomia una verifica anche approssimata dalla 2^a legge di Keplero nel moto osservato delle telescopiche in quanto le difficoltà incontrate dagli astronomi nelle loro determinazioni li hanno costretti ad ammettere che questa legge sia senz'altro soddisfatta.

5. L'esiguità degli scarti, dovuti all'ipotesi balistica, rispetto alla 2^a legge di Keplero e le difficoltà sperimentali di una verifica diretta di questa legge non permettono finalmente di giungere per questa via ad una scelta tra l'ipotesi della velocità costante della luce e l'ipotesi balistica stessa.

Fisica matematica. — *L'effetto Hall con elettrodi estesi.* Nota II⁽¹⁾ di E. PERSICO e F. SCANDONE, presentata dal Socio A. GARBASSO.

3. In una Nota precedente⁽²⁾ abbiamo esaminato particolareggiatamente la rappresentazione conforme di un rettangolo in un parallelogramma, allo scopo di affrontare il problema dell'effetto Hall con elettrodi estesi.

Proponiamoci adesso di calcolare l'effetto Hall che si ottiene quando gli elettrodi secondari occupano una posizione qualsiasi sul contorno del rettangolo, purchè originariamente su di una linea equipotenziale. Due tali punti avranno nel nostro sistema di rappresentazione uguale ascissa. Sia

(1) Pervenuta all'Accademia il 1^o agosto 1929.

(2) Questi « Rendiconti », vol. X, 1929, 2^o sem., fasc. 5-6, p. 238.

$x = \omega(\zeta)$ l'ascissa del punto di applicazione di un elettrodo secondario. Allora l'altro punto avrà per ascissa $\omega(\zeta') = \omega(\zeta) + ib$ e per la (5)

$$\zeta' = \operatorname{sn} \left(\frac{\omega(\zeta) + ib}{C} \right) = \frac{I}{k \operatorname{sn} \left(\frac{\omega}{C} \right)} = \frac{I}{k\zeta}.$$

Formiamoci la funzione $\omega'(\zeta)$ corrispondente ai punti P e Q del rettangolo

$$\text{in P} \quad \omega'(\zeta') = \omega \left(\frac{I}{k\zeta} \right) + C \frac{\beta}{\pi} \Phi \left(\frac{I}{k\zeta} \right) = \omega(\zeta) + ib + C \frac{\beta}{\pi} \Phi \left(\frac{I}{k\zeta} \right)$$

$$\text{in Q} \quad \omega'(\zeta) = \omega(\zeta) + C \frac{\beta}{\pi} \Phi(\zeta).$$

Operiamo adesso la trasformazione $\bar{\omega}'(\zeta) = [\omega'(\zeta) - c] e^{i\beta}$ che trasporta l'origine al centro della base e ruota il parallelogramma in modo che i lati obliqui siano paralleli all'asse delle y . Avremo:

$$(14) \quad \begin{cases} \text{in P} & \bar{\omega}'(\zeta') = \left[\omega(\zeta) + ib + C \frac{\beta}{\pi} \Phi \left(\frac{I}{k\zeta} \right) - c \right] e^{i\beta} \\ \text{in Q} & \bar{\omega}'(\zeta) = \left[\omega(\zeta) + C \frac{\beta}{\pi} \Phi(\zeta) - c \right] e^{i\beta}. \end{cases}$$

È in questo parallelogramma che dobbiamo risolvere il nostro problema di Dirichlet. Sappiamo che la soluzione è la (2) ove M ed N sono determinate dalle condizioni iniziali. Ponendo il lato B' C' a potenziale $+V$ ed il lato A' D' a potenziale $-V$ si ottiene facilmente $M = \frac{2V}{a \cos \beta}$; $N = 0$.

Dunque la funzione che risolve il nostro problema è:

$$(15) \quad V = \frac{2V}{a \cos \beta} \xi.$$

Se delle (14) prendiamo le parti reali abbiamo:

$$\text{in P} \quad \xi(\zeta') = \left[\omega(\zeta) + C \frac{\beta}{\pi} \Phi \left(\frac{I}{k\zeta} \right) - c \right] \cos \beta - b \sin \beta$$

$$\text{in Q} \quad \xi(\zeta) = \left[\omega(\zeta) + C \frac{\beta}{\pi} \Phi(\zeta) - c \right] \cos \beta$$

da cui l'effetto Hall fra P e Q

$$V_P - V_Q = \frac{2V}{a \cos \beta} \left[C \frac{\beta}{\pi} \left(\Phi \left(\frac{I}{k\zeta} \right) - \Phi(\zeta) \right) \cos \beta - b \sin \beta \right]$$

ma si verifica facilmente che

$$C \frac{\beta}{\pi} \Phi\left(\frac{1}{k\chi}\right) = C \frac{\beta}{\pi} \Phi(\infty) - C \frac{\beta}{\pi} \Phi(\chi) = b\beta + 2c - C \frac{\beta}{\pi} \Phi(\chi)$$

quindi

$$V_P - V_Q = \frac{4\bar{V}}{a} C \frac{\beta}{\pi} [\Phi(1) - \Phi(\chi)]$$

ricordando i valori di C e di β e ricordando la legge di Ohm $2\bar{V} = \Omega I$ ove

$\Omega = \frac{a}{b\epsilon s}$ (Ω resistenza, ϵ spessore della lamina, s conducibilità) si ha

$$(15) \quad V_P - V_Q = \frac{a}{b} \frac{[\Phi(1) - \Phi(\chi)]}{\pi K} \cdot \frac{\alpha}{s^2} \cdot \frac{HI}{\sigma}$$

e poichè la R che compare nella (15) è $= \frac{\alpha}{s^2}$, e ricordando che $\omega(\chi) = x$, ponendo:

$$(16) \quad f\left(\frac{a}{b}, x\right) = \frac{a}{b} \frac{[\Phi(1) - \Phi(x)]}{\pi K}$$

si ha

$$(17) \quad V_P - V_Q = R f\left(\frac{b}{a}, x\right) \frac{HI}{\epsilon}.$$

Questa è la formula cercata. Se in essa facciamo $\chi = 0$ si ritorna al caso degli elettrodi centrali. Se si fa invece $\chi = 1$ si ha il caso in cui gli elettrodi secondari coincidono con quelli primari e si ha quindi un effetto nullo. Calcoliamoci ora quale è la variazione di effetto Hall dovuto ad un piccolo spostamento della posizione centrale degli elettrodi secondari. Se cioè χ è molto più piccolo di 1, si ha sviluppando in serie di Mac-Laurin:

$$\Phi(\chi) = \Phi(0) + \Phi'(0) \cdot \chi + \frac{1}{2} \Phi''(0) \cdot \chi^2$$

i primi due termini sono manifestamente nulli. Se calcoliamo il terzo termine abbiamo:

$$\Phi''(0) = 2(k-1)$$

dunque

$$\Phi(\chi) = \sim (k-1) \chi^2$$

ed inoltre

$$\omega(\chi) = \omega(0) + \left[\frac{d\omega'(\chi)}{d\chi} \right]_0 \cdot \chi = \chi$$

poichè

$$\left[\frac{d\omega'(\chi)}{d\chi} \right]_0 = 1$$

e perciò per $\chi \ll 1$ si ha $x = \sim \chi$ e abbiamo quindi

$$\Phi(\chi) = \sim (k-1)x^2$$

perciò per il coefficiente di Hall relativo allo spostamento x degli elettrodi secondari dalla posizione centrale:

$$f\left(\frac{b}{a}, x\right) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{b} \frac{\Phi(1) - (k-1)x^2}{K}$$

e per $x = 0$

$$f\left(\frac{b}{a}, 0\right) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{b} \frac{\Phi(1)}{K}$$

da cui

$$\frac{f\left(\frac{b}{a}, x\right)}{f\left(\frac{b}{a}, 0\right)} = 1 - \frac{(k-1)x^2}{\Phi(1, k)}$$

è la formula cercata per la riduzione al centro. Su essa si vede che le curve del Corbino sono parabole solo per piccoli spostamenti dalla posizione centrale degli elettrodi secondari. In generale la funzione f che dà tale diminuzione è, come abbiamo visto, di natura assai più complicata, ma come vedremo dai grafici relativi, vi somiglia sufficientemente perchè il Corbino potesse riassumere i risultati sperimentali con una funzione di secondo grado.

4. Abbiamo visto come la risoluzione del nostro problema è ridotta alla conoscenza della funzione $\Phi(\chi, k)$ data dalla (10).

Per calcolare questa funzione per $0 < \chi < 1$ e $0 < k < 1$ non conviene usare sviluppi in serie, essendo questi di convergenza troppo lenta e di forma troppo complicata. Il metodo più rapido per procurarci una tavola di questa funzione e di eseguire l'integrazione numerica col metodo di Simpson. Tale metodo è valido finchè χ è minore di 1.

Si è calcolata così la $\Phi(\chi)$ per valori di χ fino a $\chi = 0,96$. Però per $\chi = 1$ la funzione integranda va all'infinito e la integrazione numerica non si può più applicare. Spezzeremo allora il nostro integrale in due parti

$$\int_0^1 = \int_0^\alpha + \int_\alpha^1$$

ove α è molto vicino ad 1. Il primo integrale lo valuteremo col metodo di Simpson. Per il secondo dobbiamo distinguere due casi a seconda che k è molto vicina a 0 oppure molto vicina ad 1.

a) Caso in cui k è molto vicino ad 1. Poniamo

$$\zeta = 1 - x$$

trascurando le potenze di x superiori alla prima si ottiene facilmente

$$\int_{\alpha}^1 = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \left[\int_0^{1-\alpha} \frac{\log(1+k)}{\sqrt{x}} dx + \int_0^{1-\alpha} \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx - \right. \\ \left. - \int_{\alpha}^{1-\alpha} \frac{\log[2(1-k) - (1-3k)x]}{\sqrt{x}} dx \right].$$

Con facili integrazioni per parti si valutano successivamente questi integrali e si ottiene

$$\int_{\alpha}^1 = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \left[2\sqrt{1-\alpha} \log \frac{(1+k)(1-\alpha)}{2(1-k) - (1-3k)(1-\alpha)} - \right. \\ \left. - 4\sqrt{\frac{2(1-k)}{1-3k}} \operatorname{arctgh} \sqrt{\frac{1-3k}{2(1-k)}} \sqrt{1-\alpha} \right].$$

Essendo l'argomento dell' arctgh molto piccolo possiamo sostituirlo con il primo termine del suo sviluppo. Si ha così facilmente:

$$\int_{\alpha}^1 = \sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{1-k^2}} \left[\log \frac{(1+k)(1-\alpha)}{2(1-k) - (1-3k)(1-\alpha)} - 2 \right].$$

Questa è la formula che useremo per i nostri calcoli numerici. Nel nostro caso $\alpha = 0.96$ e quindi $1-\alpha = 0.04 = 1/25$; $\sqrt{1-\alpha} = 1/5$. Allora abbiamo

$$\int_{\alpha}^1 = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{1-k^2}} \left[\log \frac{1+k}{49-47k} - 2 \right].$$

Questa formula serve a calcolare la nostra funzione per $\zeta = 1$ e per valori abbastanza piccoli di k . Per il caso limite in cui $k = 0$, si ha, invece ponendo nella (10) $\zeta = \cos \varphi$

$$\Phi(1, 0) = \int_0^1 \frac{\log \frac{1-\zeta}{1+\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta = 4 \int_0^{\pi/4} \log \operatorname{tg} \Psi d\Psi = -4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = -3,664.$$

La nostra formula approssimata darebbe invece $-3,69$ il che ci dà una idea del grado di approssimazione fornito dalla formula stessa,

b) Caso in cui k sia molto vicino ad 1. L'integrale:

$$\int_z^1 \frac{\log \left[\frac{1 - \chi}{1 + \chi} \frac{1 + k\chi}{1 - k\chi} \right]}{\sqrt{(1 - \chi^2)(1 - k^2\chi^2)}} d\chi = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctgh} k\chi}{\sqrt{(1 - \chi^2)(1 - k^2\chi^2)}} d\chi -$$

$$- 2 \int_\alpha^1 \frac{\operatorname{arctgh} \chi}{\sqrt{(1 - \chi^2)(1 - k^2\chi^2)}} d\chi$$

si scrive ponendo $\chi = \operatorname{sn}(\omega, k)$

$$\int_1^\alpha = -2 \int_{\omega(\alpha)}^{\omega(1)} \operatorname{arctgh}(k \operatorname{sn} \omega) d\omega - 2 \int_{\omega(\alpha)}^{\omega(1)} \operatorname{arctgh} \operatorname{sn} \omega d\omega = -$$

$$- 2 \int_{\omega(\alpha)}^{\omega(1)} d\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n+1} \operatorname{sn}^{2n+1} \omega}{2n+1} - 2 \int_{\omega(\alpha)}^{\omega(1)} d\omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sn}^{2n+1} \omega}{2n+1}$$

ma essendo k molto vicino ad 1, ponendo $k = 1 - \chi$ con χ molto piccolo: $(1 - \chi)^{2n+1} = 1 - (2n+1)\chi$ e l'integrale con facili semplificazioni diviene:

$$\int_1^\alpha = -2\chi \int_{\omega(\alpha)}^{\omega(1)} \frac{\operatorname{sn} \omega}{1 - \operatorname{sn}^2 \omega} d\omega.$$

Ma essendo $k \ll 1$ la funzione $\operatorname{sn} \omega$ tende a degenerare in $\operatorname{tgh} \omega$. Noi faremo l'approssimazione di sostituire il seno ellittico con la tangente iperbolica. Allora è

$$\int_0^{1-\alpha} = -2\chi \int_{\omega(\alpha)}^{\omega(1)} \frac{\operatorname{tgh} \omega}{1 - \operatorname{tgh}^2 \omega} d\omega$$

da cui con facili passaggi si ha la formula finale

$$\int_1^\alpha = -\chi [\cosh^2 \omega(1) - \cosh^2 \omega(\alpha)]$$

ove ω è l'integrale ellittico relativo al modulo k . Nel completare la tabella della Φ con i valori della funzione nel caso $\chi = 1$ ci siamo serviti della prima formula per k variante da 0 a 0,333 e della seconda per k variante da 0,8540 a 1. Per i valori intermedi di k si può fare un'eccellente interpolazione grafica perchè la nostra funzione ha un andamento quasi rettilineo in quel tratto. In questo modo abbiamo potuto disegnare vari grafici della Φ in funzione di χ e di k ; e della Φ in funzione di $\frac{\omega}{C}$ e del rapporto $\frac{b}{a}$. Da questi abbiamo costruiti i grafici della f che qui riproduciamo.

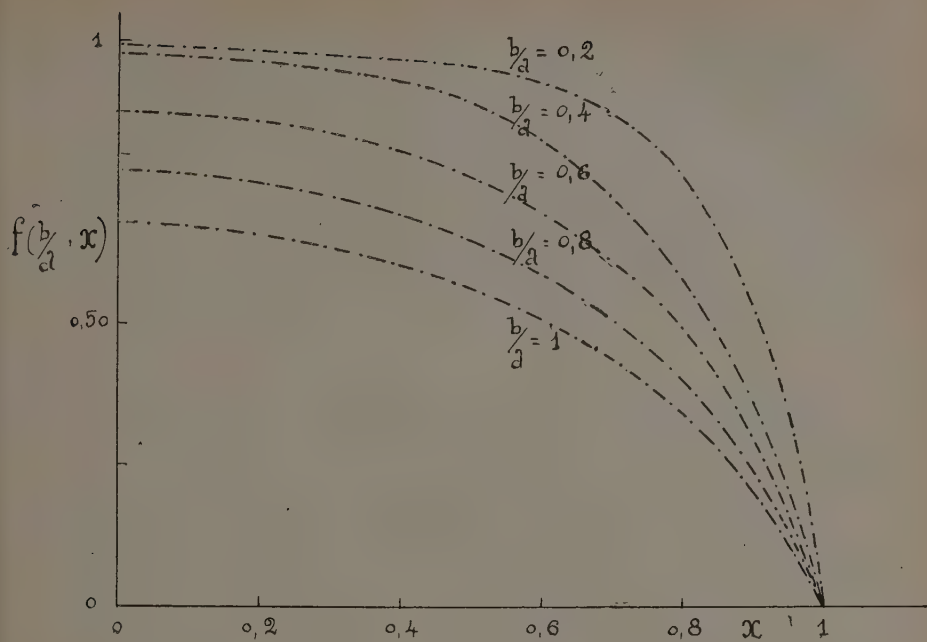


Fig. 1,

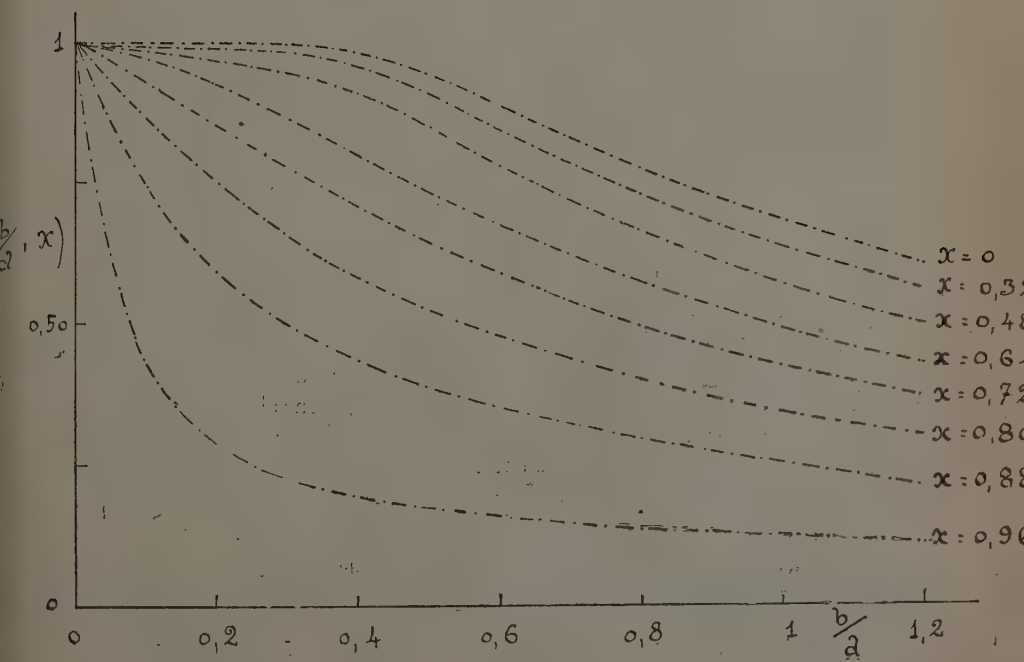


Fig. 2,

Il primo (fig. 1) rappresenta le f per a costante e x variabile, che ci dà il variare dell'effetto in una data lamina quando si spostano gli elettrodi secondari. Si ottengono così le curve teoriche dell'esperienza del Corbino.

Il secondo (fig. 2) ci dà l'effetto Hall per qualsiasi rapporto di lati e per un dato spostamento degli elettrodi secondari.

In questo modo la funzione f è perfettamente individuata e ci permette di prevedere teoricamente l'effetto Hall in una lamina rettangolare di forma qualsiasi con elettrodi secondari spostati comunque. Sarà oggetto di una prossima Nota la verifica sperimentale dei risultati ottenuti.

Elettrodinamica. — *Sul teorema del minimo calore di W. Thomson.*
Nota ⁽¹⁾ di M. LELLI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. — È noto che il regime stazionario che si costituisce in un conduttore (per maggiore generalità la supporremo tridimensionale), i cui *elettrodi* (porzioni del suo contorno attraverso le quali entra od esce corrente) sono mantenuti ciascuno ad una determinata intensità di corrente, è caratterizzato dal fatto che il calore Joule che si svolge nell'unità di tempo è un *minimo* ⁽²⁾: minimo di fronte a quello che si svolgerebbe in qualsiasi altro ipotetico regime stazionario nel quale attraverso gli elettrodi passasse la medesima corrente, vincolato tale regime alla legge di Kirchhoff della continuità, ma non a quella di Ohm ⁽³⁾ del movimento.

Naturalmente, perchè tali diversi regimi potessero di fatto attuarsi, occorrerebbe pensare installate entro il conduttore delle forze elettromotrici, cioè creare delle superficie di discontinuità nella distribuzione del potenziale.

Il teorema riportato discende, per una immediata analogia formale, da quello che W. Thomson enunciò trattando dell'*energia elettrica* di un dato sistema di conduttori, e può dunque portare il suo nome. Egli dimostrò ⁽⁴⁾ che tale energia è minore di quella relativa ad una qualsiasi altra distribuzione del campo elettrico, dell'induzione elettrica e del potenziale in cui tutti i conduttori abbiano ancora ciascuno la medesima carica, purchè soltanto in ogni punto sia soddisfatta la condizione che sia nulla la divergenza del vettore induzione e la legge di proporzionalità dell'induzione alla forza elettrica.

2. — Un confronto di altra natura intendo stabilire in questa Nota. Riferendomi al primo dei ricordati teoremi, confronterò il calore Joule che

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1929.

(2) Cfr. L. BLOCH, *Précis d'Électricité Théorique*. Chap. IV, 58.

(3) Per legge di Ohm si intende qui la relazione differenziale: $\epsilon = -\lambda \text{ grad } \varphi$. (Cfr. n. 2 di questa Nota).

(4) L. BLOCH, *Id. id.* Chap. III, 41.

si svolge nell'unità di tempo da un conduttore percorso da corrente con quello che si svolge in altri regimi, nei quali, anzichè le intensità di corrente, siano fissi sugli elettrodi i valori del potenziale (potenziale che si suppone ovunque continuo) e nei quali ancora sia in ogni punto soddisfatta la legge di Ohm del movimento, ma non quella di continuità della corrente.

Ciò equivale a confrontare l'effettivo regime stazionario che naturalmente si stabilisce nel conduttore con altri provocati, mantenendo invariato il potenziale agli elettrodi, dalla immissione in alcune zone (*sorgenti*) e dalla erogazione in altre (*pozzi*) di corrente elettrica.

Orbene anche da tale confronto risulta che il calore Joule del regime effettivo è un minimo.

Infatti, sia τ lo spazio, che per semplicità supporremo semplicemente connesso, occupato dal conduttore, limitato dalla superficie chiusa σ , di cui σ_e sia la porzione costituita dall'insieme degli elettrodi e σ_r sia quella residua.

Chiamando: φ il potenziale, \mathbf{E} la forza elettrica, \mathbf{i} l'intensità della corrente, λ il coefficiente di conducibilità, W il calore Joule dell'effettivo regime, si ha in ogni punto dello spazio τ :

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbf{i} &= \lambda \mathbf{E} & ; & \quad (2) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \\ (3) \quad \text{div } \mathbf{i} &= 0 & ; & \quad (4) \quad W = \int_{\tau} \mathbf{i} \times \mathbf{E} \, d\tau. \end{aligned}$$

Siano φ' , \mathbf{E}' , \mathbf{i}' , W' gli analoghi elementi di un altro qualsiasi regime, soddisfacenti alle relazioni (1), (2), (4), ma non alla (3), e nel quale gli elettrodi conservano invariato il valore del potenziale che loro spetta nel regime effettivo.

In tali condizioni si dimostra che è $W' > W$.

A tale scopo si consideri il regime differenza:

$$\varphi'' = \varphi' - \varphi \quad ; \quad \mathbf{E}'' = \mathbf{E}' - \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{i}'' = \mathbf{i}' - \mathbf{i},$$

e sia W'' il calore Joule che vi corrisponde. Si avrà:

$$W' = \int_{\tau} \mathbf{i}' \times \mathbf{E}' \, d\tau = \int_{\tau} (\mathbf{i} + \mathbf{i}'') \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}'') \, d\tau;$$

cioè:

$$(5) \quad W' = W + W'' + \int_{\tau} (\mathbf{i} \times \mathbf{E}'' + \mathbf{i}'' \times \mathbf{E}) \, d\tau.$$

Ma l'ultimo integrale, che indicheremo brevemente con J , in virtù della relazione (1) e di quella analoga valevole per il regime \mathbf{i}'' , \mathbf{E}'' , e qua-

lora λ sia un numero e non un'omografia (cioè il conduttore sia isotropo), può scriversi:

$$2 \int_{\tau} \mathbf{i} \times \mathbf{E}'' d\tau$$

e però, notando che $\mathbf{E}'' = -\text{grad } \varphi''$, si ha:

$$\mathbf{J} = -2 \int_{\tau} \mathbf{i} \times \text{grad } \varphi'' d\tau;$$

cioè, integrando per parti:

$$\mathbf{J} = 2 \int_{\tau} \varphi'' \text{div } \mathbf{i} d\tau + 2 \int_{\sigma} \varphi'' \mathbf{i} \times \mathbf{n} d\sigma,$$

dove \mathbf{n} indica la normale interna a σ .

Se ora si osserva che $\text{div } \mathbf{i} = 0$ in tutto τ , che φ'' è nullo per ipotesi sugli elettrodi, cioè sulla parte σ_e di σ , mentre sulla rimanente è $\mathbf{i} \times \mathbf{n} = 0$, si conclude che

$$\mathbf{J} = 0.$$

Cosicchè la (5) diviene:

$$W' = W + W'',$$

e, poichè W'' è essenzialmente un numero positivo:

$$W' > W,$$

che è ciò che si voleva dimostrare.

3. - In maniera del tutto analoga si dimostra il corrispondente teorema di Elettrostatica, che così può enunciarsi:

Dati più conduttori in equilibrio sotto l'azione di certe cariche elettriche e di certi valori del potenziale, l'energia elettrica del sistema è un minimo, se confrontata con quella spettante a qualsiasi altra distribuzione della forza elettrica, delle cariche e dell'induzione, cui corrisponde su ciascun conduttore il medesimo valore del potenziale che si verifica nella distribuzione effettiva e soddisfacente alla legge di proporzionalità fra forza elettrica ed induzione nonché a quella di dipendenza della forza elettrica dal potenziale elettrico, ma non alla legge di continuità del vettore induzione.

4. - Nel corso della dimostrazione seguita nel numero 2 non si è ricorso alla proprietà $\text{div } \mathbf{i}' = 0$, chè, se anche questa fosse verificata, il regime \mathbf{i}' si identificherebbe con quello effettivo \mathbf{i} .

Perciò, conformemente a quanto si era annunciato, la classe dei regimi \mathbf{i}' è caratterizzata dalla non continuità della corrente.

Tali regimi, per analogia con una denominazione usata nella teoria della Elasticità là dove si tratta del teorema di Menabrea, possono chiamarsi *incongruenti*. Essi sono realizzabili, come s'è detto, mediante la creazione di sorgenti e pozzi collocati in certi punti o sopra determinate superficie interne al conduttore.

Si conclude che il calore Joule che si svolge nel regime effettivo è un minimo, tanto se confrontato con quello relativo alla classe di regimi *congruenti*, ma a potenziale discontinuo, che convogliano attraverso gli elettrodi la medesima corrente, come se confrontato con quello relativo alla classe di regimi *incongruenti* e a potenziale continuo che conservano sugli elettrodi il valore del potenziale.

Sotto tale aspetto il teorema di Thomson assume dunque un significato ancora più esteso di quello che ordinariamente gli viene attribuito.

Della proprietà risultante dal confronto del regime effettivo con la classe dei regimi incongruenti, proprietà che vale anche in altri ordini di fatti fisici, mi sono valso per risolvere, in qualche caso semplice, il problema della determinazione del moto dell'acqua entro una rete di condotte di cui sono fissati i valori del carico piezometrico agli estremi ⁽¹⁾.

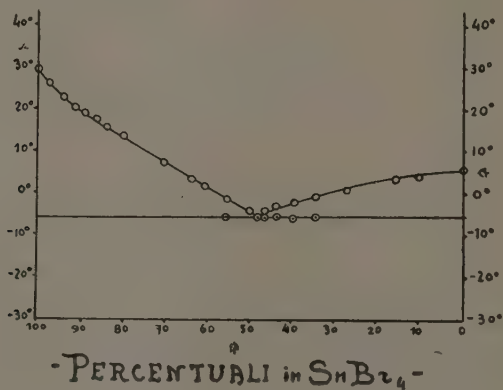
Si intravede così come il teorema dimostrato si presti ad utili applicazioni anche in altri campi della Meccanica dei sistemi continui.

(1) *Sul minimo calore che si svolge da una rete di condotte.* « Annali dei Lavori Pubblici », 1929, IV.

Chimica. — *Isotherme di viscosità di miscele binarie.* — V. Sistema: nitrobenzolo-bromuro di stagno⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

La stabilità dei complessi che gli alogenuri metallici formano con prodotti organici generalmente è massima nei cloroderivati e minima negli iodio-derivati. Questo lascia supporre che l'affinità delle valenze secondarie sia in relazione con quella delle valenze principali, nel senso che quanto più forte è il legame di queste, tanto più stabili sono i composti di addizione che si possono formare⁽³⁾.

Si è visto in una precedente ricerca che il nitrobenzolo forma con il tetracloruro di stagno un composto che può essere messo bene in evidenza con l'analisi termica⁽⁴⁾. Il diagramma qui sotto riportato mostra invece che dalle miscele di nitrobenzolo con tetrabromuro di stagno non si separa alcun composto.



Talvolta però nelle miscele binarie che si comportano a questo modo è stata constatata l'esistenza di associazioni stabili solo allo stato liquido; e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1929.

(3) PREIFFER, *Organische Molekülverbindungen*, p. 166.

(4) Questi « Rendiconti », vol. X, 1929, ferie, fasc. n. 3-4, p. 186.

la misura della viscosità si è mostrata particolarmente adatta a mettere in rilievo tali fenomeni⁽¹⁾.

Ho voluto perciò studiare la viscosità delle miscele di nitrobenzolo con bromuro di stagno ed in quel che segue riporto i risultati ottenuti.

L'isoterma di densità mette in rilievo una notevole azione dissociante, simile a quella rilevata nelle miscele con tetracloruro di stagno ed attribuita al nitrobenzolo. Ho voluto verificare tale supposizione servendomi della

legge di Batschinski $\varphi = \frac{v-w}{C}$.

In un precedente lavoro fu possibile infatti mettere in evidenza l'esistenza di una associazione tra le molecole di monocloruro di zolfo calcolando il valore di C a diverse temperature⁽²⁾. Come è noto nei liquidi non associati C assume un valore costante.

Come volume specifico limite del bromuro di stagno ho assunto 0.2941 che si ricava dalla densità a 0°, ottenuta per estrapolazione da una serie di misure a diverse temperature.

Nella tabella seguente riporto i risultati di queste misure.

TABELLA I.

<i>t</i>	<i>d</i>	<i>v</i>	<i>v — w</i>	φ	C · 105
32°.4	3.319	0.3013	0.0072	43.08	16.71
36 .0	3.312	0.3020	0.0079	45.79	17.25
41 .0	3.300	0.3030	0.0089	47.80	18.62
46 .0	3.287	0.3042	0.0101	49.89	20.24

Il continuo variare di C conferma la supposta associazione tra le molecole di tetrabromuro di stagno e rende ragione dell'azione dissociante messa in evidenza dalle misure di densità.

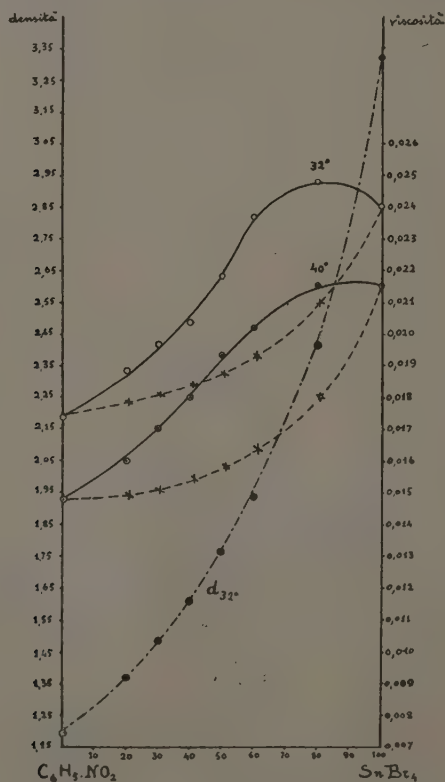
Nella tabella e nel diagramma che seguono riporto i risultati delle misure di viscosità a 32° e a 40°; le due isoterme presentano un massimo molto netto che depone a favore dell'esistenza di un complesso stabile in soluzione.

(1) TAMMANN, « Zeitschr. anorg. Chemie », 172; 249 (1928).

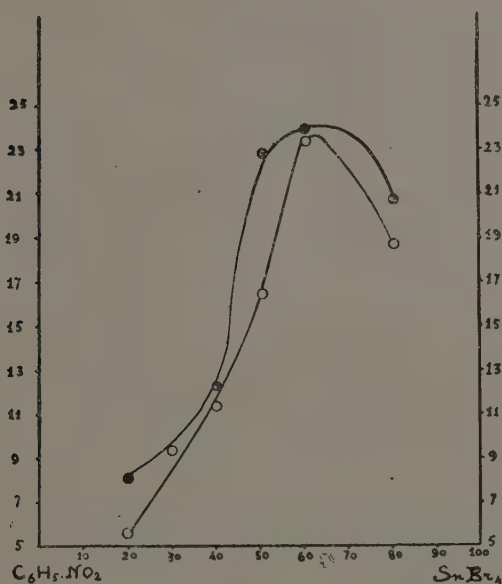
(2) « Gazzetta Chimica Italiana », 59. 1929.

TABELLA II.

$C_6H_5NO_2$ %	d_{32}	32°		40°	
		trovato	calcolato	trovato	calcolato
0	3.319	0.02403	—	0.02154	—
20	2.418	0.02482	0.02083	0.02156	0.01780
40	1.936	0.02373	0.01923	0.02022	0.01623
50	1.760	0.02184	0.01873	0.01934	0.01574
60	1.609	0.02042	0.01834	0.01800	0.01536
70	1.484	0.01971	0.01802	0.01703	0.01500
80	1.373	0.01888	0.01776	0.01602	0.01461
100	1.192	0.01737	—	0.01483	—



Per avere un'idea anche approssimata intorno alla composizione di tale complesso ho eseguito il calcolo delle differenze percentuali tra viscosità misurata e calcolata, e nel diagramma seguente riporto i risultati ottenuti.



La massima divergenza si verifica nelle miscele contenenti circa 40 % di nitrobenzolo. Questo fatto può costituire un indizio dell'esistenza del complesso: $2\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2 - \text{SnBr}_4$ che contiene 36 % di nitrobenzolo.

Riassunto: — L'analisi termica del sistema nitrobenzolo tetrabromuro di stagno non mette in evidenza la formazione di alcun composto. La misura della viscosità mostra invece che in queste soluzioni deve formarsi un composto di addizione stabile allo stato liquido, al quale probabilmente spetta la formula $2\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2 \cdot \text{SnBr}_4$.

Geologia. — *Appunti geologici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige).* Parte II ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Le ofioliti (*sima*) sono rappresentate da prasiniti di vario tipo, da anfiboliti glaucofaniche e da scarse rocce ultrafemiche, come serpentine, cloritoscisti, talcoscisti ecc. Si tratta di formazioni di sicura origine magmatica, distribuite in lenti ed amigdalì, concordanti con i calcescisti. Per quanto non si possa escludere che in una prima fase si siano originate delle colate sottomarine ed anche dei depositi di tufi, come si verifica nel Trias dinarico, pur tuttavia il fenomeno simico, come già venne dimostrato per le Alpi occidentali, sembra anche qui di natura essenzialmente intrusiva e meccanica insieme, nel senso che la salita delle ofioliti pare determinata assai più dall'azione della spinta orogenetica che non sia dalla forza viva del magma. Nelle prime fasi del fenomeno, intimamente legate alla tettonica embrionaria, il *sima* venne iniettato nei sedimenti orogeni del mesozoico ed in parte sembra anche intruso nelle ghirlande sialiche che dovevano formare i futuri ricoprimenti pennidici, come parrebbe attestato dalle prasiniti ed anfiboliti glaucofaniche della serie del Picco, in tutto simili alle ofioliti sicuramente mesozoiche.

L'iniezione del magma simico esercitò naturalmente delle azioni di contatto più o meno estese sulle rocce incassanti, ma i prodotti di tale fenomeno vennero però in seguito quasi del tutto modificati per opera del metamorfismo regionale e di dislocazione. Tuttavia possiamo ancor oggi trovar tracce evidenti dell'antico effetto plutonico nei calcescisti ricchi di quarzo ed albite, spesso depigmentati ed estremamente induriti. Oltre a ciò non mancano perfino casi di tipici minerali di contatto, quali ad esempio la vesuviana scoperta da Weinschenk presso Prägraten. In progressione di tempo il fenomeno ofiolitico divenne sempre più meccanico, per cui i vari ricoprimenti in moto trascinarono con loro il *sima* sottostante inerte e passivo, che in tale modo venne pressato, laminato, suddiviso in lenti, amigdale isolate ed innumerevoli digitazioni. Bisogna ammettere che in queste ultime fasi il *sima*, per quanto non si trovasse più allo stato magmatico, possedesse tuttavia proprietà fisiche tali da consentire non solo il suo complesso modellamento, ma anche il facile scivolamento l'una sull'altra delle diverse entità strutturali. È chiaro come per tali processi l'originario

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico di Basilea, diretto dal prof. A. Buxtorf.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1929.

contatto plutonico fra pietre verdi e rocce incassanti debba risultare, non solo modificato dal successivo metamorfismo regionale e di dislocazione, ma anche in misura maggiore o minore, mascherato da contatti secondari di natura tettonica.

Così ad esempio nell'Alta Val della Rossa le ofioliti sono strettamente associate a lembi di Trias neritico, che in parte sono anche inglobati in esse. Ciò non significa che queste pietre verdi siano di età triasica, rispondenti cioè ad altrettante colate basiche alternate ai sedimenti triasici. Lo smentisce il fatto che le loro prosecuzioni s'intercalano anche nei depositi orogeni del Lias. Per tali constatazioni e per analogia con quanto si osserva nelle altre parti delle Alpi, si è condotti ad ammettere che l'intrusione del sima sia posteriore al Lias e con molta probabilità riferibile almeno in parte al Cretaceo inferiore. È noto infatti che nei Grigioni le ofioliti del ricoprimento VI o della Margna (a cui corrisponde secondo Staub la serie del Picco) hanno metamorfosato le radiolariti e gli scisti ad aptici del Malm, onde la loro età appare posteriore al Giurese e riportabile almeno al Cretaceo inferiore. Questo naturalmente per quanto riguarda il solo fenomeno *magmatico*, poichè la *mise en place* del sima, quale ci risulta oggi, fu fenomeno essenzialmente tettonico, che culminò nel Terziario durante lo svolgimento delle più importanti fasi dell'orogenesi penninica. In seguito a queste diverse quanto complesse vicende, il sima venne portato a contatto con i più svariati termini stratigrafici e non di rado esso ingloba lenti di gneiss, micascisti, quarziti e calcari, rinnovando il fenomeno già osservato su vastissima scala per la *nappe des schistes lustrés* delle Alpi occidentali.

In alcune anfiboliti glaucofaniche, appartenenti così alla serie dei calcescisti come a quella del Picco, si può osservare che l'anfibolo sodico di tipo gastalditico fa passaggio verso la periferia ad orneblenda verde, come già ebbi modo di osservare per la regione della Grivola. Si ripete anche qui il fatto interessante dell'esistenza di almeno due generazioni di anfiboli diversi e la formazione dell'uno piuttosto che dell'altro minerale sembra dovuta, come cercai di dimostrare altra volta⁽¹⁾, a determinate condizioni di equilibrio fisico-chimico. Nel caso attuale, come per la zona della Grivola, il variare delle condizioni-ambiente determinò anzitutto la formazione del glaucofane, e più tardi quella dell'orneblenda; ma è certo che non si tarderà a scoprire in qualche parte delle Alpi la successione inversa, il che sarà una buona conferma alla spiegazione adottata.

La serie dei calcescisti e delle ofioliti attinge in questa zona un enorme spessore, ma ciò è senza dubbio dovuto alle ricordate e complesse ripetizioni tettoniche. Come viene ammesso anche da Sander, i sedimenti orogeni del Lias furono in un primo tempo ripiegati in una serie di pacchetti di

(1) DAL PIAZ G. B., *Geologia della catena Grand Nomenon-Grivola-Herbetet*, con carta geologica al 25.000. «Memorie Istituto Geologico di Padova», 1928, vol. VII.

pieghe, scorsi gli uni sugli altri, e solo in una fase posteriore divennero isoclinali. Non mi sembra possibile ammettere che questa serie giaccia relativamente autoctona, *in situ*, sui complessi pretriasici. Sono indotto a tale opinione perchè le tre entità litologiche paleozoico, trias e mesozoico post-triasico presentano costituzione e proprietà fisiche diversissime e quindi debbono aver offerto un comportamento meccanico-tettonico non omogeneo. Il pretriasico, più rigido, si deformò il meno possibile, le quarziti rimasero per lo più aderenti al nucleo paleozoico o vennero rotte in lame anticlinali, le dolomie e i calcari, che sono più deformabili, vennero facilmente staccati dal loro substrato, laminati e suddivisi in digitazioni, e finalmente il complesso ofiolitico-calcescistoso venne addirittura staccato dalla sua base primitiva e costretto a sfuggire in mille guise davanti all'incombente pressione orogenetica. Gli isolati lembi di terreni pretriasici e triasici, inglobati e portati lontano dalla serie dei calcescisti con ofioliti, sono buona testimonianza dell'entità di tale movimento. In questo segmento dei Tauri possiamo riconoscere, in una parola, fenomeni del tutto simili a quelli ben noti per la *nappe des schistes lustrés* delle Alpi occidentali. È interessante osservare in fine anche qui come le formazioni mesozoiche di Val Aurina sieno qua e là intersecate da piani di scorrimento e zone di frizione, spesso discordanti rispetto alle precedenti linee strutturali, fenomeni che attestano lo svolgimento di spinte tardive che agirono in ambiente superficiale.

La facies dei calcescisti e l'abbondanza delle ofioliti mostrano che il mesozoico post-triasico di Val Aurina si accosta assai più a quello della *nappe des schistes lustrés* (= mesozoico della Dent Blanche secondo Hermann) che non a quello dei ricoprimenti inferiori (O = III) del Sempione. L'osservazione riveste un certo interesse di fronte alle recenti opinioni espresse in proposito, secondo le quali verrebbe ammesso per i Tauri la presenza dei più bassi elementi strutturali delle Pennidi. Ciò che si può affermare con certezza si è che il complesso di tutte le formazioni comprese fra il massiccio del Gran Veneziano e i ricoprimenti austro-alpini inferiori (Grisonidi) corrisponde, almeno funzionalmente, alla *nappe des schistes lustrés* — Dent Blanche (VI) delle Alpi occidentali. Purtroppo le rocce della serie del Picco sono di un tipo molto generale e non ci permettono di essere precisi sul loro riferimento all'una piuttosto che all'altra unità strutturale. Al più l'abbondanza di elementi cloritici potrebbe stare in favore di un'appartenenza alla serie paleozoica di copertura del ricoprimento VI. Bisogna però tener presente che il complesso del Picco dei Tre Signori rappresenta soltanto la testa, se non anche parte della testa, di un ricoprimento che per la sua massima estensione rimane sepolto al sud, sotto il mesozoico penninico e le Grisonidi. Infatti quelle che per una comoda generalizzazione si suol chiamare « radici », altro non sono qui che le parti frontali del ricoprimento, rese pressochè verticali nelle ultime fasi dell'orogenesi alpina. Il complesso del Picco dei Tre Signori riveste ad ogni modo la stessa funzione

meccanico-tettonica presentata nelle Alpi occidentali dal nocciolo pretriasico della Dent Blanche. Bisogna aggiungere inoltre che nella parte orientale dei Tauri, sul M.te Sonnblick (in zone equivalenti dal punto di vista tettonico a quelle dell'alta Val Aurina), R. Staub ha scoperto i termini delle serie rispettive di Arolla e di Valpelline, per modo che la corrispondenza litologica fra la più alta unità penninica dei Tauri e il ricoprimento della Dent Blanche, anche per questi rapporti analogici, sembra oggidì bene assodato.

Nelle parti superiori delle valli secondarie sud occidentali da Valle delle Lepri a Valle Rio d'Arna, come pure nell'alta Val dei Dossi, affiorano le complicate scaglie della « zona di Matrei » costituite da lame multiple ed irregolari di filladi, quarziti, calcari, dolomie, serpentine ecc.

A sud della zona di Matrei fa seguito la serie delle Grisonidi (= ricoprimenti austro-alpini inferiori), in cui predominano filladi quarzifere, scisti filladici, micascisti e paragneiss diversi, con intercalazioni di calcari e quarziti del Paleozoico e con affioramenti di ortogneiss aplitici ed occhiadini.

A mezzogiorno del Rio di Riva si estende la poderosa massa tonalitica delle Vedrette Giganti, intrusa nella formazione cristallina delle Grisonidi. Il tipo della roccia plutonica corrisponde in generale a quello di una diorite quarzifera, talora granodioritica e talora tonalitica. È interessante osservare come la roccia, per quanto spesso un po' laminata e scistosa alla periferia del massiccio, non presenti mai, a differenza dell'ortogneiss dei Tauri, una struttura cristalloblastica. È questa una chiara e fondamentale distinzione fra le due masse, di analogo tipo magmatico, del Gran Veneziano da un lato e delle Vedrette Giganti dall'altro.

Alla periferia del massiccio tonalitico si notano numerose apofisi ed iniezioni filoniane, che non di rado tagliano trasversalmente i banchi dei parascisti incassanti. Esempi tipici di questo fenomeno si possono osservare lungo la strada da Campo Tures a Riva vicino l'osteria Tobl; presso il rifugio Vedrette Giganti; in Val Fredda ecc. In alcuni punti il magma ha determinato sugli scisti evidenti fenomeni di metamorfismo di contatto, con neoformazione di minerali caratteristici, come granato, diopside ecc. Dalla struttura tettonica della regione sembra si possa dedurre che la massa tonalitica delle Vedrette costituisce una specie di laccolite intrusa nei terreni delle Grisonidi, già metamorfosati in precedenza. Queste osservazioni concorrono a riconfermare l'idea dell'età relativamente recente dell'intrusione, ipotesi che sembrerebbe convalidata anche dalla grande analogia litologica e strutturale che corre fra il massiccio delle Vedrette e quelli post-alpini di Bressanone, Ivigna, M. Croce, Adamello, Bregaglia ecc. Ma di questo, come di altri importanti problemi, mi riservo di trattare con maggior ampiezza in seguito.

Zoologia. — *Lo scheletro dei Teleostei studiato mediante la radiografia in relazione alla meccanica del movimento.* Nota ⁽¹⁾ di G. BRUNELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Per lo studio dello scheletro *in situ* non è stato, nei Vertebrati inferiori, sfruttato abbastanza il metodo della radiografia. In una mia breve Nota sull'*Amphisila*, ho già applicato tale metodo, e ne è risultato per lo studio dei rapporti dell'anale e della caudale un risultato che modifica le vedute di Abel. Detto metodo è perciò, come in altri casi, applicabile anche per le comparazioni colle impronte fossili, e dovrebbe avere più larga diffusione come ausilio alla scienza paleontologica, come mi riservo dimostrare nella memoria definitiva.

Ho fatto eseguire una serie di radiografie su Teleostei, allo scopo di studiare il comportamento della colonna vertebrale, il numero e la lunghezza relativa delle vertebre in rapporto alla rigidità maggiore o minore del tronco, allo scopo anche di vedere la ragione della eterocerchia nella meccanica del movimento e non in relazione colla filogenesi.

Nei riguardi della rigidità del corpo, un bell'esempio di conferma della legge di Houssay si ha nello scheletro del luccio marino (fig. 1) con vertebre in piccolo numero e perciò relativamente lunghe. La legge di Houssay è stata enunciata ⁽²⁾ nei seguenti termini: « Il numero relativo dei miotomi diminuisce nello stesso tempo che aumenta la rigidità del corpo ». Per l'opposta ragione numerose e brevi sono le vertebre degli Ofididi (fig. 2) il cui tronco è molto flessibile.

Nell'individuo di una stessa specie, il cui tronco presenta la parte anteriore più rigida della posteriore, questa ha un numero di vertebre più grande e di dimensioni più piccole, Pesce Trombetta, *Amphisila*. Finalmente nella regione prossima alla testa è più o meno evidente nei diversi generi la brevità del corpo delle prime vertebre, che alcuni autori (Emery) hanno già rilevato. Così anche mi sono proposto di studiare in quale relazione stia l'assenza o l'estensione della seconda dorsale colla presenza, lo sviluppo o l'assenza della eterocerchia. Infatti, mancando la seconda dorsale, o essendo presente solo come pinna adiposa, alla caudale spetta uno sforzo maggiore. Ho cercato anche di vedere, con quali disposizioni generali,

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1929.

(2) HOUSSAY F., *Forme, Puissance et Stabilité des Poissons*. Librairie Scientifique A. Hermann, Paris 1912.



Fig. 1.

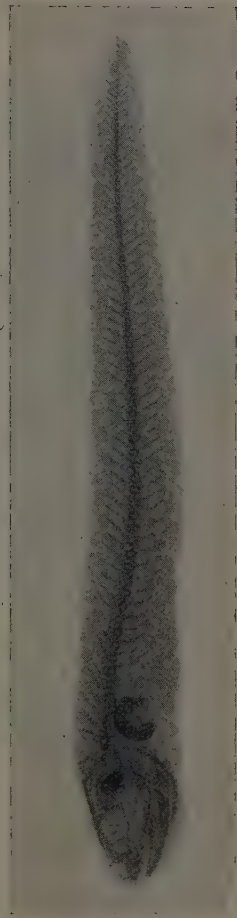


Fig. 2.

coincida la diversa posizione (giugulare, toracica o addominale) delle pinne ventrali. Così colla presenza di pinne giugulari e toraciche si accompagna una curvatura più o meno pronunziata dell'asse scheletrico (*Scorpaena*, *Blennius*).

Altro studio interessante è quello della disposizione e sviluppo dei raggi interspinosi in rapporto alla locomozione. Così nei Pleuronettidi la complessità degli interspinosi non apparisce, come voleva Owen, in relazione a una disposizione primitiva della vertebra e delle sue appendici, ma colla meccanica del movimento ondulatorio del margine del corpo.

Fisiologia. — *Alcoolemia normale ed alimentare negli esercizi fisici* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ di U. CASSINIS e L. BRACALONI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Abbiamo continuato la nostra indagine sopra la produzione di alcool durante il lavoro muscolare in individui in stato di digiuno ⁽³⁾ o durante l'ingestione di saccarosio; si è somministrato il saccarosio a quadretti, nella proporzione di 1 gr. per chilogrammo di peso corporeo in cinque aliquote ad intervalli 20'-30', iniziando il lavoro muscolare prima che la curva saccarosemica raggiungesse i valori massimi cioè a 30'-50' dall'ingestione della prima aliquota ⁽⁴⁾.

Con altre esperienze abbiamo esteso il nostro studio alla curva alcoolemica alimentare nel riposo e durante il lavoro muscolare; si faceva ingerire una soluzione alcoolica contenente per ogni chilogrammo di peso corporeo 0,5 cmc. di alcool assoluto e 1 cmc. di acqua (in media 30-35 cmc. di alcool e 60-70 cmc. di acqua) in un sol tempo o in più tempi in cinque aliquote (ognuna di 17-18 cmc.); contemporaneamente alla determinazione della quota alcoolemica si eseguiva, in alcune esperienze, anche la determinazione della quota alcoolurica ⁽⁵⁾ usando nei due dosaggi il micro-metodo di E. Widmark ⁽⁶⁾ nella forma modificata ⁽⁷⁾.

(1) Dal laboratorio di Fisiologia applicata della Scuola Centrale Militare di Educazione Fisica. Farnesina, Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1929.

(3) U. CASSINIS e L. BRACALONI, *Alcoolemia normale negli esercizi fisici*. Nota I, questi « Rendiconti », vol. IX, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 9, 1929.

(4) Vedi L. BRACALONI, *Saccarosemia alimentare ed esercizi fisici*. Nota VI. « Arch. di Fisiol. », vol. XXVI, fasc. II, 1928.

(5) Le quote alcoolemica ed alcoolurica rappresentano la quantità in gr. di alcool e delle altre sostanze volatili riducanti presenti in mille cmc. rispettivamente di sangue e d'urina.

(6) E. M. P. WIDMARK, *Eine Mikromethode zur Bestimmung von Aethylalkohol im Blut*, « Biochem. Zeitschr. », Bd. 131, Heft 5/6, S. 475, 1922.

(7) A. GALAMINI e L. BRACALONI, *Modificazione al micrometodo di Widmark per il dosaggio dell'alcool nel sangue*. « Archivio di Farmacologia sperimentale e Scienze affini », anno 1928, Roma.

Si sono presi in esame tre soggetti con i quali abbiamo sperimentato tre differenti tipi di lavoro muscolare: la corsa piana di m. 3.600, la marcia piana di m. 9.600 e la voga in stanza.

1° soggetto, sold. V. Aruanno, età anni 21, peso corporeo Kg. 63, astemio, impiegato: corsa m. 3.600.

I. - Alcoleemia normale a digiuno. Non abbiamo trovato variazione sensibile della quota alcolemica; eguale risultato abbiamo ottenuto

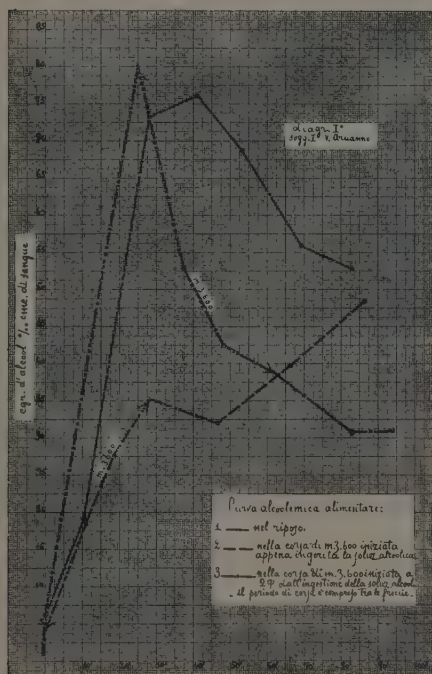


Diagramma 1.

nel corso di una saccarosemia alimentare sia a riposo⁽¹⁾ sia durante il lavoro muscolare (v. tab. I)⁽²⁾.

(1) V. BAGLIONI, BRACALONI e GALAMINI, *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool*. Nota II. Questi « Rendiconti », vol. V, serie 6ª, 1° sem., fasc. 1, 1927.

(2) Nelle tabelle seguenti il tempo è contato dal prelevamento del 1° campione di sangue, nelle esperienze a digiuno, o dall'ingestione della prima aliquota di saccarosio; la durata dell'esercizio rappresenta il tempo effettivo impiegato a compierlo (cioè non computando il tempo di sosta per il prelevamento dei campioni di sangue); i numeri in grassetto rappresentano le quote alcoleemiche durante e al termine dell'esercizio fisico.

2. - Alcoolemia alimentare. La curva alcoolemia alimentare a riposo, ingerendo la soluzione in un sol tempo, presenta un andamento a parabola ⁽¹⁾ con un massimo di 0.761 a 41' (dall'ingestione della soluzione alcoolica) (v. diagr. I, curva 1).

Iniziando la corsa di m. 3.600 subito dopo ingerita la soluzione si osserva che la curva sale con minor rapidità raggiungendo a 46' il valore 0.323 inferiore cioè alla metà del corrispondente valore determinato a riposo (v. diagr. I, curva 2). Intervenendo invece con la corsa al 29' dopo l'ingestione, la curva discende bruscamente dal valore 0.797 al valore di fine corsa 0.390; la diminuzione continua anche dopo la fine della corsa (vedi diagr. I, curva 3).

Il soggetto non ha risentito alcun disturbo dall'ingestione della soluzione alcoolica.

2° soggetto, sold. G. Di Lauro, età anni 21, peso corporeo Kg. 70, bevitore moderato, agricoltore; marcia m. 9.600.

1. - Alcoolemia normale. Nell'alcoolemia normale eseguita sul soggetto a digiuno e tenuto in riposo si osservano soltanto piccole variazioni delle quote ad eccezione della quota a 140' che mostra un lieve aumento. La quota alcoolurica si mantiene costante (v. tab. II).

Nell'alcoolemia durante la marcia eseguita a digiuno o ingerendo il saccarosio ad aliquote non si osserva alcuna variazione importante della quota alcoolemica (v. tab. III).

2. - Alcoolemia alimentare. A riposo la quota alcoolemica massima 0.599 è raggiunta dopo 32' dall'ingestione della soluzione e la curva presenta lo stesso andamento a parabola osservato nel soggetto primo. L'esecuzione della marcia di m. 9.600 compiuta da 17' a 110' non modifica l'andamento della curva la quale ha un decorso parallelo alla curva di riposo, ma determina un notevole abbassamento della parabola con acme di 0.472 a 40'.

Altre esperienze si sono eseguite facendo ingerire la soluzione alcoolica in 5 aliquote alla distanza 15'-25' l'una dall'altra. La curva alcoolemica a riposo presenta in questo caso una ascesa molto lenta e il punto massimo è raggiunto a 91' (dall'ingestione della prima aliquota di soluzione) con il valore 0.475, cioè inferiore e molto ritardato rispetto al valore massimo raggiunto ingerendo la soluzione in un sol tempo (vedi diagr. II, curva 1).

La curva alcoolemia ottenuta durante la marcia di m. 9.600 decorre molto più bassa di quella di riposo e l'andamento della curva è uguale sia iniziando la marcia subito dopo l'ingestione della prima aliquota, sia a 21';

(1) Cfr. BAGLIONI, BRACALONI e GALAMINI, *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool*. Nota I. Questi « Rendiconti », vol. IV, serie 6ª, 2° sem., fasc. 12, 1926.

nel primo caso l'acme di 0.297 è raggiunto a 121' (v. diagr. II, curva 2), nel secondo a 118' con il valore 0.265 (v. diagr. II, curva 3).

In queste due ultime esperienze di marcia abbiamo determinato anche l'alcool urinario; in entrambi i casi si è constatato la presenza di alcool dopo il termine della marcia con valori delle quote rispettivamente di 0.143 e 0.119 e con quantità totali di alcool eliminato di gr. 0.013 e 0.023.

Il soggetto, moderato bevitore, avverte leggeri disturbi ingerendo la soluzione in un sol tempo (giramenti di testa a 6') e i disturbi s'intensificano durante la marcia con senso di pesantezza e di rottura delle gambe cosicchè il soggetto copre in 77' il percorso di m. 9.600.

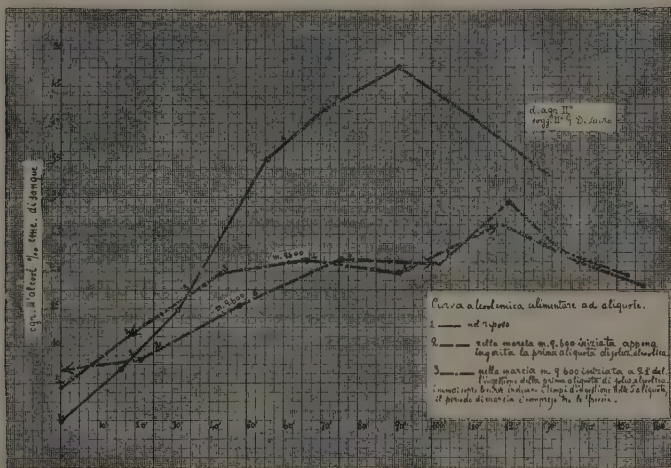


Diagramma 2.

Ingerendo invece la soluzione ad aliquote i disturbi mancano quasi affatto sia nel riposo che nella marcia, la quale è compiuta in 73'.

3° soggetto, magg. U. C., età anni 43, bevitore moderato, professionista: voga in stanza.

1. — Alcolemia normale a digiuno. Durante 24' di voga in stanza non si notano variazioni sensibili nè della quota alcolemica nè della quota alcoolurica (v. tab. IV).

2. — Alcolemia alimentare. La curva a riposo, come negli altri soggetti, ha un andamento a parabola con acme di 0.730 a 40'. Se il soggetto esegue 43' di voga la curva alcolemica decorre ancora a parabola, ma è sensibilmente abbassata rispetto a quella di riposo (con un comportamento simile a quello osservato pel secondo soggetto nella marcia) e l'acme di 0.559 è raggiunto a 30'. La quota alcoolurica anche durante il periodo di voga ha un valore molto alto, 0.576, e la quantità totale di alcool eliminato è di gr. 0.13.

TABELLA I.

1° sogg. sold. V. Aruanno

N. d'ordine	Descrizione dell'esperienza	Quote alcoolemiche a riposo	Durata della corsa	Quote alcoolemiche successive				
1	14-XII-28 Alcoolemia a digiuno e corsa m. 3.600 * da 20' a 48'	— 0.032	18' 0.049	29' 0.051	43' 0.020	51' 0.049	67' 0.049	83' 0.037
2	2-II-29 Alcoolemia a riposo ingerendo 63 gr. di sac- carosio in 5 aliquote a 0'-23'-50'-62'-89'	—	0.036	19' 0.045	48' 0.036	60' 0.045	85' 0.056	130' 0.056
3	9-II-29 Alcoolemia e corsa m. 3.600 * da 48' a 78' in- gerendo 63 gr. di saccarosio in 5 aliquote a 0'-24'-46'-59'-72'	0.017 0.028	41' 0.023	56' 0.028	69' 0.028	82' 0.028	111' 0.034	—

* I campioni di sangue sono prelevati ogni 1.200 m.

2° sogg. sold. G. Di Lauro

TABELLA II.

Quote alcoolemiche					Quote alcoolemiche e quantità d'urina cmc.	Urina totale emessa cmc.	Diminu- zione del peso corporeo gr.
7-V-29	0'-	20'	40'	100'	120'	140'	118
Alcoolemia normale a riposo	0.000	0.022	0.022	0.039	0.011	0.022 (74)	350
						88' — (74)	
						143' 0.022 (44)	

Nell'alcoolemia alimentare ad aliquote la curva alcoolemica sia a riposo che nel lavoro muscolare, 41' di voga, ascende lentamente con acme nel riposo a 97' con il valore 0.431 e nella voga a 88' con il valore 0.412.

La ricerca dell'alcool urinario ha dato anche in questo caso valori alti di alcool; la quota alcoolurica massima a riposo è 0.481 a 125' e nel lavoro 0.463 a 130' con l'eliminazione, nelle due esperienze, di una quantità totale di alcool eguale a ca. gr. 0.05. La quota alcoolurica durante il periodo di voga è 0.311.

Il soggetto, ingerendo l'alcool in una sola volta, avverte nei primi momenti senso di levitazione che scompare dopo un'ora o appena iniziato il lavoro.

Nell'ingestione ad aliquote il senso di levitazione e d'intontimento comincia più tardi, verso 40', e persiste per tutta l'esperienza; eseguendo la voga il soggetto non avverte alcun disturbo da alcool.

Conclusione.

1. - La curva alcoolemica a digiuno o nel corso di una saccarosemia alimentare non si modifica per azione dei lavori muscolari da noi sperimentati.

2. - Nella marcia e nella voga la curva alcoolemica alimentare provocata ingerendo la soluzione alcoolica in una sola volta rimane costantemente ad un livello inferiore della curva determinata nel riposo, mentre per effetto della corsa detta curva discende repentinamente (sogg. 1°).

3. - Ingerendo la soluzione alcoolica ad aliquote la curva alcoolemica durante la marcia sale meno rapidamente e raggiunge un acme minore che nel riposo (sogg. 2°); per azione della voga la curva non presenta modificazioni importanti.

4. - Appare evidente l'azione dannosa dell'alcool, ingerendo la soluzione in un sol tempo, nel 2° soggetto che copre il percorso di marcia di m. 9.600 in 77' contro 73' impiegati marciando in stato di digiuno o ingerendo la soluzione alcoolica ad aliquote.

5. - La quantità totale di alcool eliminata per via renale nell'intervallo di 1-2 ore, nonostante la secrezione urinaria risulti in genere aumentata, oscilla da gr. 0.01 a gr. 0.13; cioè è una frazione molto piccola della quantità d'alcool ingerito.

6. - La quota massima alcoolemica è, nella maggioranza dei casi, minore della quota massima alcoolurica e poiché questa si presenta ritardata rispetto alla prima, le due curve alcoolemica ed alcoolurica presentano un punto d'incrocio⁽¹⁾.

(1) V. A. GALAMINI, *Azione dell'alcool etilico sulla secrezione renale*. Questi « Rendiconti », vol. VI, serie 6ª, 2° sem., fasc. 9, 1927.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 novembre 1929 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisiologia. — *Primi tentativi di registrazione delle correnti d'azione del nervo acustico.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. C. FOÀ e di A. PERONI.

Se non sono ancora molto numerose nè molto conclusive le ricerche sulle correnti d'azione dei nervi di senso, ciò è dovuto alla scarsa intensità di tali correnti, ed alla difficoltà di interpretare la loro discontinuità. Furono studiate le correnti d'azione di un nervo sensitivo cutaneo della rana (Steinach, 1896), e del depressore (Tschermak e Koster, 1903; Einthoven, Jolly, 1911). Recentemente Adrian ha sottoposto ad un accuratissimo studio le correnti d'azione di nervi di senso provenienti da organi propriocettivi del muscolo in contrazione, perfezionando così le ricerche di Forbes, Campbell e Williams (1904), che ne avevano registrato l'effetto composto risultante dalle scariche non contemporanee che si susseguono nel nervo. Dopochè Gasser e Newcomer, nel 1923, usarono per primi un sistema di triodi capaci di amplificare 500 volte l'intensità della corrente d'azione, Adrian si valse d'un sistema di maggiore potenza, amplificando 5000 volte, così da rendere apprezzabili differenze di potenziale di 5-10 microvolta, e valendosi dell'elettrometro capillare come strumento di registrazione.

Per quanto riguarda le modificazioni elettriche che si svolgono in seguito alla stimolazione dell'organo uditivo, non possediamo in realtà se non ricerche molto rudimentali ed oscure. Ricorderemo i vani tentativi fatti da Beck nel 1890, per svelare correnti d'azione nei lobi temporali del cane in seguito a stimoli acustici, e quelli di Danilewsky (1891) che sembra aver ottenuto

(1) Presentata nella seduta del 5 maggio 1929.

una oscillazione negativa delle correnti di riposo, in parti non precisate dei lobi anteriori, come conseguenza di violenti stimolazioni acustiche.

Ricorderemo ancora le ricerche fatte dal Piper nel 1906 e nel 1910, sulle correnti d'azione che si possono raccogliere ponendo elettrodi sugli otoliti e sulla superficie di sezione del n. acustico, dell'*Exos Lucius*. In due successive pubblicazioni, il Piper riferisce esperimenti fatti, da prima col galvanometro di Desprez-D'Arsonval, poi col galvanometro di Einthoven, nelle quali lo stimolo acustico era determinato da un particolare fischietto che trasmetteva sott'acqua stimoli di 260 v. per 1".

Tale stimolazione produceva una variazione *continua* delle correnti di riposo, senza che nella curva potessero notarsi le benchè minime tracce di discontinuità.

Questi esperimenti del Piper, se pure hanno grande importanza per la risoluzione d'un problema di fisiologia comparata, se cioè i pesci abbiano o no la facoltà di percepire i suoni, non portano tuttavia alcuna luce sul processo sensitivo che si svolge negli animali superiori, perchè i pesci non posseggono che una molto rudimentale lagena e son ben lungi ancora dal possedere un chiocciola ed un organo del Corti.

La conclusione tratta dal Piper, che i canali semicircolari abbiano una funzione uditiva, pel fatto che negli animali dove essi rappresentano tutto l'orecchio interno, essi svolgano correnti d'azione per stimoli sonori, non può essere senz'altro estesa agli animali nei quali il labirinto ha subito una profonda differenziazione.

Bisognava perciò tentare di cogliere le correnti d'azione sul n. acustico di animali a chiocciola differenziata, e l'ideale sarebbe di poterle separatamente registrare dal n. cocleare e dal n. vestibolare. Ma le difficoltà tecniche sono tali, che, malgrado molti e pazienti tentativi, non riuscimmo a superarle. Già il semplice taglio del n. acustico costituisce un'operazione molto ardua, e spesso vanamente tentata da molti autori sul coniglio, sul gatto, sul cane, sulla scimmia e sul cavallo.

Sebbene ci sia riuscito, con un complicato procedimento, di mettere a scoperto il decorso intracranico del n. acustico nel cane, non potemmo mai ottenere un campo operatorio sufficientemente largo e scevro di emorragie, da poter collocare almeno un elettrodo sulla superficie libera, o su quella di sezione del nervo.

Dovemmo pertanto ricorrere ad animali inferiori, ove più facile fosse l'emostasia, e dove le condizioni anatomiche permettessero di aggredire il n. acustico per un tratto sufficientemente lungo. I rettili già posseggono una discreta funzione uditiva, corrispondente ad uno sviluppo abbastanza avanzato della chiocciola, e fra i rettili presceglimmo i chelonidi, per ovvie ragioni di praticità.

Grossi esemplari di *Talassochelis Carretta* furono messi gentilmente a nostra disposizione dai dirigenti della stazione zoologica di Napoli, e sovra

di essi conducemmo i nostri esperimenti, valendoci di un sistema amplificatore formato da tre triodi, secondo lo schema di Adrian; di elettrodi impolarizzabili di zinco immerso in soluzione satura di solfato di zinco in gelatina; e del galvanometro di Einthoven, come strumento registratore.

Il n. acustico, secondo le ricerche di Shijino, esce dalla faccia laterale del midollo allungato, dorsalmente e un po' distalmente dalla origine del n. facciale. Non è difficile scoprire questa regione del bulbo e collocare un elettrode sulla superficie di sezione del moncone distale del nervo acustico, mentre l'altro elettrode è posto sopra una zona indifferente del cervello. Come stimolo sonoro scegliemmo il suono prodotto da grosse canne d'organo, che davano il *do* della subcontroottava ($16\frac{1}{2}$ v. d.), il *do* della controottava 33 v. d.; e il *do* della piccola ottava (132 v. d.).

Il risultato di cinque esperimenti fu inivoco: qualunque fosse l'altezza del suono, la risposta elettrica del nervo fu sempre discontinua, e il ritmo di essa si mantenne intorno a 50-60 onde al 1", essendo i denti della curva talora abbastanza regolari, talora invece gli uni sugli altri embricati, ma tuttavia sempre ben distinti. Devesi qui ricordare che Buytendyk, in una pubblicazione che non potemmo leggere nell'originale, riporta un esperimento in cui avrebbe registrato una variazione mono- o difasica della corrente di riposo del nervo acustico di coniglio, in seguito al rumore prodotto da un colpo di pistola. La durata della variazione fu di $\frac{2}{50}$ di 1".

La fissità del ritmo della risposta elettrica, indipendente dalla frequenza delle vibrazioni che costituiscono il tono, può dar luogo a molte considerazioni.

I fattori della discontinuità della risposta elettrica di un nervo, possono essere diversi, e cioè: la indipendente e non contemporanea risposta delle singole fibre che compongono il nervo; la eventuale provenienza di ogni fibra dalla fusione di filuzzi nervosi derivanti da recettori periferici diversi, non contemporaneamente eccitati; la discontinuità dello stimolo; e infine la discontinuità del processo di eccitamento che percorre il nervo in causa del periodo refrattario proprio sia del recettore periferico, sia della stessa fibra nervosa.

Le dottrine che attribuiscono all'organo periferico l'analisi del suono, e particolarmente la dottrina di Helmholtz, farebbero pensare alla possibilità che ogni tono dovesse avere nel n. acustico un elemento conduttore proveniente dal risonatore eccitato. A questa possibilità non contrasta il fatto che il numero delle fibre che compone il n. acustico non è superiore, nell'uomo, a 5000, mentre almeno quattro volte maggiore è il numero dei toni che l'uomo è in grado di distinguere. Dalle più svariate combinazioni di diversi filuzzi nervosi provenienti dai singoli risonatori, in fibre nervose diverse, possono derivare numerosissime possibilità di conduzioni variamente combinate, atte a recare ai centri nervosi sensazioni diverse, che i centri analizzeranno ulteriormente. La possibilità che la conduzione nella fibra nervosa sia discontinua anche per stimoli non discontinui, e che la ritmicità

della risposta elettrica del nervo sia dovuta al periodo refrattario dell'organo periferico di ricezione, o della stessa fibra nervosa, è provata dall'esperimento di Adrian, il quale riuscì a ridurre l'innervazione del muscolo sternocutaneo della rana ad una sola delle venti fibre che costituiscono il nervo di quel muscolo, ed osservò che una distensione continua del muscolo, provoca una risposta elettrica discontinua in quell'unica fibra. La indipendenza del ritmo della risposta del nervo da quello dello stimolo, è chiaramente dimostrata dal fatto che lo sciatico di rana, che è composto di 3000 fibre nervose, e il n. ottico dell'anguilla, che ne possiede da 6000 a 10.000, rispondono ai rispettivi stimoli specifici (trazione sul muscolo, o stimolo luminoso), con scariche di egual ritmo, che forniscono tracciati distinguibili difficilmente l'uno dall'altro. È evidente che l'analisi delle differenti sensazioni avviene, caso per caso, nei centri, secondo la nota legge dell'energia specifica delle sensazioni.

Non altrimenti dobbiamo concepire che avvenga l'analisi sensoriale dei suoni: captati da un organo specifico adatto a reagire a quel determinato ordine di frequenza delle vibrazioni che costituiscono lo stimolo, i suoni eccitano l'organo del Corti, come la luce eccita la retina, e l'eccitamento recato dal nervo, conduttore indifferente, viene poi analizzato nei centri. Dalla risposta elettrica dei vari nervi di senso, altro non possiamo dedurre che il ritmo e l'intensità delle scariche che li percorrono, ma questo mezzo non ci permette una ulteriore analisi della natura dell'eccitamento che vien portato ai centri, perchè la risposta elettrica del nervo è qualcosa di concomitante, e direi quasi di impersonale, che ha caratteri comuni e stereotipati, qualunque sia l'organo di senso da cui proviene, nè ha in sè caratteri differenziali che possano esser messi in diretto rapporto con l'intima natura del processo sensoriale verificatosi nei ricettori periferici.

La costanza della risposta elettrica del n. acustico per suoni di diversa altezza, ci fa ritenere che soltanto ai centri nervosi spetti il riconoscimento, la minuta analisi, e la valutazione sintetica dei toni e delle armonie che l'orecchio, per la sua particolarissima struttura, ha potuto captare e trasformare in eccitamenti sensoriali.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul principio della media aritmetica.* Nota⁽¹⁾ di P. TORTORICI, presentata dal Corrisp. M. LA ROSA.

1. Il Bemporad, in una Nota del 1919 ed in una successiva del 1926⁽²⁾, tenta di dedurre il principio della media aritmetica da un certo insieme di postulati.

Alla prima Nota furono fatte alcune obiezioni che diedero luogo alla seconda, altre ne furono mosse a quest'ultima e l'Autore ha creduto di rimuoverle tutte con una Nota successiva del 1927⁽³⁾. Ma neppure questa andò immune da critiche da parte del Cerulli.

Tralasciando di discutere (senza condividerle totalmente) le idee esposte dal Bemporad al § 1 dell'ultima Nota, tralasciando ancora l'analisi dei postulati da lui assunti (che non parmi siano più facilmente accettabili di quelli posti da altri Autori allo stesso scopo)⁽⁴⁾, rileverò il punto che parmi manchevole nella dimostrazione del Bemporad.

Nelle Note citate, la dimostrazione del principio della media aritmetica è imperniata dall'Autore sulla giustificazione dell'uguaglianza:

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n),$$

e l'Autore stesso esprime il dubbio che da qualcuno essa non sia facilmente accettata potendo ritenersi che contenga qualche cosa di arbitrario.

Ma la (1), ove il simbolo f denoti, come indica il primo membro, una funzione di n variabili non ha significato ben chiaro e ogni tentativo di giustificarla non può che riuscire vano fino a che questo significato non venga espresso con precisione.

Inoltre, se, conservando la denominazione del Bemporad, si denota con $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ il risultato complessivo di n osservazioni indipendenti, la (1) potrebbe scriversi correttamente:

$$(2) \quad f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1929.

(2) Cfr. «Memorie degli Spettroscopisti Italiani», 1929; G. BEMPORAD, *Sul principio della media aritmetica*, «Atti R. Acc. dei Lincei», serie 4^a, vol. III, fasc. 2^o, p. 87 (1926).

(3) Cfr. G. BEMPORAD, *Ancora sul principio della media aritmetica*, «R. Osservatorio astronomico di Capodimonte; Contributi astronomici», n. 39 (1927).

(4) Cfr. F. ANGELITTI, *Sul principio del medio aritmetico*, «Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo (Memorie)», n. 40, 1916, p. 52; C. MINEO, *Elementi di Calcolo delle probabilità ed applicazioni*, p. 79. Palermo, Tipografia D. Capozzi e A. Dolce, 1921.

con

$$(3) \quad f_2(x, y) = \frac{ax + by}{a + b},$$

a e b essendo due costanti *arbitrarie*, che devono scegliersi uguali se si vuole che sussista il principio della media aritmetica nel caso di due sole osservazioni della stessa attendibilità.

Allora, posto:

$$f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1},$$

a (2) dà:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} + x_n \right]$$

e non ne emerge il principio generale della media.

Per pervenire a questo principio, occorre attribuire alle costanti a e b che compariscono in (3), il significato di *peso* delle misure x, y rispettivamente. Ciò, oltre ad essere arbitrario, richiede prima una definizione di *peso di una osservazione*; di più parmi che, a questo modo, si venga già ad ammettere il principio della media, sia pure nel caso particolare in cui di $a + b$ misure indipendenti se ne abbiano a uguali ad x e b uguali ad y .

2. Il principio della media può però dedursi correttamente dai seguenti postulati.

I. Se x_1, x_2, \dots, x_n sono i risultati di n osservazioni indipendenti, fatte per misurare una stessa grandezza, in condizioni non sistematicamente diverse, esiste un solo numero ζ_n da assumere come *valore più conveniente della misura ricercata e relativamente allo insieme di quelle n osservazioni*.

II. Il valore più conveniente ζ_n , relativo ad un insieme dato X di n osservazioni x_1, x_2, \dots, x_n di uguale attendibilità, è una funzione continua e simmetrica delle osservazioni stesse:

$$\zeta_n = f_n(X) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

possedente le proprietà espresse dalle seguenti uguaglianze:

- a) $f_n(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + h$ (qualunque sia h),
- b) $f_n(hx_1, hx_2, \dots, hx_n) = hf_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (per $h \neq 0$),
- c) $f_n(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ($k \leq n$)

con

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Si dimostra facilmente che queste proprietà sono indipendenti.

Il significato delle condizioni a), b) è notissimo: il valore più conveniente ζ_n non deve dipendere dalla origine delle misure e deve variare proporzionalmente all'unità di misura prefissata,

La condizione $c)$, finalmente, esprime che il valore più conveniente, relativo ad un certo insieme di osservazioni, non cambia se, nello insieme, si sostituisce ciascuna di k osservazioni prefissate (ad arbitrio), ($k \leq n$) col valore più conveniente ζ_k relativo allo insieme di k osservazioni da esse costituito.

Questa condizione, che postula per la funzione f_n una proprietà della media aritmetica, è certamente arbitraria.

Poichè le condizioni $a)$, $b)$ non implicano da sole il principio della media, ad esse bisogna aggiungerne almeno un'altra ed è probabile che, qualunque essa sia, costituisca insieme con $a)$, $b)$ un sistema di condizioni equivalente ad $a)$, $b)$, $c)$.

Proverò che dai postulati **I** e **II** segue:

$$\zeta_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

3. Si osservi che la condizione $b)$ dà;

$$f_n(h, h, \dots, h) = h f_n(1, 1, \dots, 1)$$

e, passando al limite per h tendente a zero, a causa della continuità di f_n , deducesi:

$$f_n(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Allora la condizione $a)$, per $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ fornisce:

$$f_n(h, h, \dots, h) = h$$

importante proprietà della funzione f_n che ci occorrerà richiamare fra poco. Si può osservare che questa proprietà è implicata anche dalla sola condizione $c)$ e quindi essa potrebbe stabilirsi prescindendo anche dalla continuità di f_n .

4. Per determinare la funzione f_n si ponga:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e si assuma come nuova incognita la funzione φ_n .

Sostituendo in $a)$ si ottiene:

$$\varphi_n(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h) = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e, ponendo $h = -x_n$:

$$\varphi_n(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n, 0) = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

La condizione $b)$ poi esprime che la funzione $\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è la più generale funzione omogenea di primo grado degli $n - 1$ argomenti $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n$.

Adunque, si soddisfa nel modo più generale alle condizioni a), b) ponendo

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \\ + \varphi_n(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n)$$

essendo ora φ_n una funzione omogenea di primo grado e simmetrica dei suoi $n - 1$ argomenti⁽¹⁾.

Nel caso di due sole osservazioni ($n = 2$) si ha dunque

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \varphi_2(x_1 - x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + (x_1 - x_2) \varphi_2(1).$$

Per la simmetria di f_2 deve aversi però

$$\varphi_2(1) = 0$$

e quindi infine, per il caso di due sole osservazioni indipendenti, si ha:

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

5. Sia ora X_0 una classe ordinata di n numeri:

$$X_0 \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (n > 2),$$

e si costruisca una successione X_k di classi ordinate, ciascuna di n numeri, col seguente criterio.

Posto:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}, \quad x_n = m + h$$

sia

$$X_1 \equiv (m, m, \dots, m, m + h);$$

indi ogni classe X_k della successione:

$$X_k \equiv (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$$

si deduca dalla precedente X_{k-1} sostituendovi con la loro media aritmetica ciascuno dei suoi primi $n - 1$ elementi se k è dispari, ciascuno dei suoi ultimi $n - 1$ elementi se k è pari. Così si avrà:

$$X_2 \equiv \left(m, m + \frac{h}{n-1}, \dots, m + \frac{h}{n-1}, m + \frac{h}{n-1} \right), \\ X_3 \equiv \left(m + \frac{(n-2)h}{(n-1)^2}, \dots, m + \frac{(n-2)h}{(n-1)^2}, m + \frac{h}{n-1} \right), \\ \dots\dots\dots$$

(1) Cfr. *Esercitazioni Matematiche del Circolo Matematico di Catania*, anno III, fasc. 3º, maggio-luglio 1923, pp. 171-172.

Ogni classe X_k ($k > 0$) ha i primi (ovvero gli ultimi) $n - 1$ elementi uguali fra loro e, in generale, l'ultimo (ovvero il primo) diverso da questi.

Sia Δ_k il valore assoluto della differenza fra i due elementi diversi di X_k ; si riconosce subito che si ha:

$$\Delta_1 = |h|, \quad \Delta_2 = \left| \frac{h}{n-1} \right|, \quad \Delta_3 = \left| \frac{h}{(n-1)^2} \right|, \dots, \Delta_k = \left| \frac{h}{(n-1)^{k-1}} \right|, \dots$$

e però

$$\lim_{k, N_1} \Delta_k = 0.$$

Ne segue che le successioni

$$x_v, x_{1,v}, x_{2,v}, \dots, x_{k,v}, \dots \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

sono tutte convergenti e ciascuna ha per limite la media aritmetica μ degli n numeri x_1, x_2, \dots, x_n .

Se si chiama *classe limite* della successione X_k la classe M di n numeri ciascuno uguale a μ (cioè la classe dei limiti delle n successioni $x_{k,v}$) si ha:

$$\lim_{k, N_1} X_k \equiv M \equiv (\mu, \mu, \dots, \mu).$$

6. Ciò posto, riprendendo le considerazioni del n. 4 e tenendo presente i postulati, è facile procedere per induzione.

Ammesso infatti che per $n - 1$ osservazioni indipendenti x_1, x_2, \dots, x_{n-1} sia

$$\zeta_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1},$$

si ha successivamente, per le proprietà e per la continuità postulate di f_n :

$$\begin{aligned} \zeta_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(X_0) = \\ &= f_n(f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) = f_n(X_1) = \\ &= f_n(X_2) = \dots = f_n(X_k) = \lim_{N_k \rightarrow M} f_n(X_k) = f_n(\lim_{k, N_1} X_k) = f_n(M) = \\ &= f_n(\mu, \mu, \dots, \mu) = \mu. \end{aligned}$$

Si verifica subito che effettivamente la media μ soddisfa a tutte le condizioni espresse nei postulati e, poichè il principio della media è vero per $n = 2$, esso resta stabilito in generale.

7. In quel che precede, secondo me, il fatto più interessante è che la media aritmetica delle variabili è l'unica funzione simmetrica di esse che verifichi le condizioni *a*), *b*), *c*). e, inoltre, che si è pervenuti alla conclusione in modo rigoroso e senza alcuna ipotesi sulla derivabilità della funzione f_n , conseguendo così una notevole semplificazione e generalizzazione sugli altri tentativi del genere.

I postulati I e II esprimono il *minimum* che debba ammettersi per dedurre logicamente il principio della media. È possibile che questi postulati possano sostituirsi con altri formalmente più semplici e, in apparenza, più facilmente giustificabili, ma mi pare chiaro che nessun sistema di postulati possa tradurre la convinzione *a priori* di ogni osservatore che, le osservazioni ben fatte, *se sono molto numerose*, si addensano intorno al valore vero della grandezza da misurare. È anzi questa convinzione che induce a scegliere come valore più conveniente della grandezza stessa la media aritmetica dei valori osservati; la scelta di questa media può dunque soddisfare solamente se le osservazioni sono in numero abbastanza grande, mentre è inaccettabile se il numero delle osservazioni è piccolo.

Volendo tenere conto di questo fatto nei postulati, si potrebbero, per esempio, ricercare le funzioni f_n che verificano le condizioni precedenti (o solo alcune di esse) *per n abbastanza grande*, ma ciascuno vede che la ricerca, se pure resta accessibile, diviene alquanto complicata.

Teoria dei numeri. — *Sopra la Teoria degli ideali di un corpo algebrico finito.* Nota IV di A. M. BEDARIDA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

5. Si è veduto nel numero precedente, che per un ideale primario assoluto, il numero degli ideali suoi divisori, uguaglia sempre il numero dei divisori razionali della sua norma. Consideriamo gli ideali divisori che sono primi ed i divisori primi, razionali, della sua norma. Per un ideale generico accade che il numero dei primi è superiore od al più uguale al numero dei secondi, perchè la norma di un ideale non può comporsi che di numeri primi che siano i numeri primi coordinati degli ideali primi dell'ideale considerato. Ora, il risultato del n. 5 della Nota II, ci permette di dire che:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, per ogni ideale primario assoluto, il numero dei suoi ideali primi uguaglia il numero dei divisori primi razionali della sua norma.

6. Si supponga ora che il corpo $K(\theta)$, di grado n , sia un corpo di Galois, cioè un corpo coincidente con tutti i suoi coniugati. Consideriamo un suo ideale invariante A , cioè coincidente con tutti i suoi ideali coniugati ⁽²⁾.

Manifestamente, esistono ideali invarianti aventi come divisori ideali

(1) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(2) Gli ideali invarianti sono stati introdotti da HILBERT nella sua celebre Memoria: *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (« Bericht erstattet der Deutschen Math. Vereinigung », 4. Bd. 1897), ed hanno particolare importanza, perchè la loro considerazione permette di stabilire in un nuovo modo l'Aritmetica di un corpo algebrico.

non invarianti: invero, se B è un qualunque ideale di $K(\theta)$, non invariante, e B_1, B_2, \dots, B_{n-1} sono i suoi ideali coniugati, l'ideale prodotto:

$$A = B B_1 B_2 \dots B_{n-1}$$

è un ideale invariante in $K(\theta)$, che ha come divisore l'ideale B , non invariante.

7. Sorge ora la domanda: esistono, in un corpo di Galois $K(\theta)$, degli ideali invarianti i cui ideali divisori siano *tutti* ideali invarianti, in tale corpo $K(\theta)$? La risposta è affermativa, perchè sussiste il notevole teorema:

In un corpo algebrico di Galois $K(\theta)$, un ideale invariante, che sia anche primario assoluto, non ammette ideali divisori che ideali invarianti.

Invero, sia A un ideale invariante del corpo di Galois che si considera e sia inoltre primario assoluto⁽¹⁾. Se è possibile, sia B un suo ideale divisore, non invariante: B sarà pure primario assoluto⁽²⁾; se B' è uno qualunque degli ideali coniugati a B e da esso distinto, B' è evidentemente anche primario assoluto e divide pure A . Seguirebbe che l'ideale A avrebbe due ideali divisori, distinti, con la stessa norma, e ciò non può avvenire per un ideale primario assoluto, come appunto si è dimostrato nella Nota III. Il teorema è dunque provato.

Complemento alla Nota II.

Nella Nota I e nella Nota II si sono trovate proprietà per gli ideali di un corpo algebrico $K(\theta)$, corrispondente alla funzione $\varphi(n)$ di Eulero, nel senso indicato dal metodo esposto nelle prime considerazioni della Nota I.

Si vogliono qui riprendere i risultati stabiliti nella Nota II, col precisare il teorema al n. 4 e quello che ne deriva al n. 6. E ciò viene fatto con quanto segue.

Si ha il teorema:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, se un ideale A ha i suoi ideali primi diversi a numeri primi coordinati distinti, tutti contenuti nel suo più piccolo intero razionale m e vale la relazione:

$$\Phi(A) = \varphi(m),$$

l'ideale A è primario assoluto.

Invero, se non fosse $m = NA$, m sarà un divisore puro di NA ed inoltre, avendo l'ideale A i suoi ideali primi diversi a numeri primi coor-

(1) Esistono ideali invarianti che siano pure primari assoluti: ad. es., se si ha un corpo quadratico (che è un corpo di Galois), ogni ideale primo il cui numero primo coordinato sia un numero primo critico, è un ideale invariante e primario assoluto; ed anche, se P_1, P_2, P_3 sono tre ideali primi i cui numeri primi coordinati sono numeri primi critici distinti tra loro, è invariante e primario assoluto l'ideale non primo $C = P_1 P_2 P_3$.

(2) Cfr. BIANCHI, loc. cit.

dinati distinti, sarà $s_1 = s_2 = \dots s_h = 1$ ⁽¹⁾ e quindi la relazione precedente si scriverà:

$$NA \left(1 - \frac{1}{p_1^{f_{11}}}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2^{f_{21}}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_h^{f_{h1}}}\right) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_h}\right)$$

da cui:

$$\frac{NA}{m} \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^{f_{11}-1}}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^{f_{21}-1}}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_h} + \frac{1}{p_h^2} + \dots + \frac{1}{p_h^{f_{h1}-1}}\right) = 1,$$

che è assurda, poichè ogni fattore del primo membro è > 1 . C. v. d.

Dal teorema ora stabilito, discende una proprietà caratteristica per gli ideali primari assoluti dotati di ideali primi a numeri primi coordinati distinti, tutti contenuti nei loro più piccoli interi razionali, e cioè:

In un corpo algebrico $K(\theta)$, un ideale A , i cui ideali primi diversi hanno numeri primi coordinati distinti, tutti contenuti nel suo più piccolo intero razionale, è primario assoluto, allora ed allora soltanto che ogni intero del corpo, primo con A , sia congruo (mod. A), con un intero razionale.

Questo teorema si dimostra con le considerazioni svolte al n. 6 della Nota II, con le ipotesi che l'ideale A abbia i suoi ideali primi diversi a numeri primi coordinati distinti, tutti contenuti nel suo più piccolo intero razionale e tenendo presente il teorema precedente.

Ogni ideale, dunque, di tale specie e primario assoluto, gode di una proprietà caratteristica più estensiva di quella segnalata dal Bianchi per un ideale primario assoluto generico.

In un altro gruppo di Note saranno studiate proprietà degli ideali di un corpo algebrico $K(\theta)$, le quali sorgono da altre funzioni aritmetiche del corpo razionale, secondo il metodo indicato nella Nota I.

Inoltre, sarà esaminato se, in qualche modo, il *Calcolo aritmetico-integrale* ⁽²⁾ può dare qualche contributo a questo indirizzo di ricerche.

In ultimo, noteremo, esplicitamente, che altre proprietà si possono trovare per gli ideali di $K(\theta)$, corrispondenti alle funzioni $\varphi(n)$ e $f(n)$, secondo il metodo indicato nella Nota I, oltre quelle esposte. Questo bene si comprende dal metodo stesso.

(1) Cfr. Nota I, n. 2.

(2) Cfr. M. CIPOLLA, *Sui principi del Calcolo aritmetico-integrale*. Memoria dell'Acc. Gioenia in Catania, serie 5^a, vol. VIII.

Geometria differenziale. — *Ricerche proiettivo-differenziali sulle coppie di linee piane o di superficie.* Nota ⁽¹⁾ di I. TODROS, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. — La normale proiettiva a una curva piana γ in un suo punto generico P si può definire come l'ulteriore retta uscente da P (oltre alla tangente in P) che è unita per un'omografia non identica del piano in sé la quale conservi un intorno della curva relativo al punto P, del massimo ordine possibile ⁽²⁾. Mi propongo anzitutto di ricercare in modo analogo qualche ente geometrico legato in modo proiettivamente invariante a una coppia di curve complanari γ, δ in due loro punti generici.

Scegliamo il triangolo fondamentale in modo che i vertici A_3, A_2 coincidano rispettivamente con due punti scelti su γ e su δ , e il vertice A_1 coincida col punto comune alle tangenti alle due curve nei due punti fissati. Allora le equazioni di γ, δ negli intorni di A_3, A_2 si possono sviluppare rispettivamente nella forma

$$(1) \quad \frac{x_2}{x_3} = a_2 \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^2 + a_3 \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^3 + \dots$$

$$(2) \quad \frac{x_3}{x_2} = b_2 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + b_3 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \dots$$

Ora, imponendo a un'omografia di mutare ciascuna delle due curve nell'altra negli intorni del 1° ordine dei punti A_3, A_2 si trovano subito per essa equazioni del tipo

$$(3) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \gamma_1 : N\gamma_3 : M\gamma_2 \quad (M, N \text{ costanti})$$

cosicchè esistono ∞^2 omografie soddisfacenti a tali condizioni. È però, in generale, impossibile portare con un'omografia ciascuna curva nell'altra negli intorni del secondo ordine dei due punti dati. Invero, imponendo questa condizione, si ottengono le

$$(4) \quad a_2 = b_2 MN, \quad b_2 = a_2 MN$$

le quali non sono compatibili se non è

$$(5) \quad a_2 = \pm b_2.$$

Perciò, vediamo invece se fra le ∞^2 omografie (3) che realizzano la conservazione degli intorni del primo ordine ne esistono di quelle che con-

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1929.

(2) Cfr. A. TERRACINI, *Sul significato geometrico della normale proiettiva*; questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. III, 1926.

servino intorno di ordine superiore solo nel senso, per es., da γ a δ . Detta, per es., γ' la trasformata di γ , si trova che in generale vi sono ∞^1 omografie (3) che fanno coincidere γ' con δ fino al 2° ordine incluso, (sono quelle per cui $MN = \frac{a_2}{b_2}$) e fra queste ve n'è una e una sola (quella per cui $M = \frac{a_3 b_2}{a_2 b_3}$, $N = \frac{a_2^2 b_3}{a_3 b_2^2}$) che porta alla coincidenza fino al 3° ordine.

Quest'ultima omografia, non omologica se $a_2 \neq b_2$, ha come punti uniti, oltre al punto A_1 , la coppia di punti $U, V \left(0, a_2 b_3, \pm a_3 b_2 \sqrt{\frac{b_2}{a_2}} \right)$ situati sulla retta $A_2 A_3$. *Questa coppia di punti*, che evidentemente non dipende (come a priori si potrebbe ritenere) dall'ordine in cui si considerano le due curve γ, δ , o anche la coppia di rette che li proiettano dall'intersezione A_1 delle tangenti a γ, δ rispettivamente in A_3, A_2 si può dunque riguardare come un ente analogo alla normale proiettiva.

2. — Quanto si è detto sussiste nel caso generale; ma si possono presentare, in casi particolari, altre circostanze degne di rilievo. Per es., può sussistere la (5), che come si è detto, è necessaria e sufficiente perchè esista un'omografia per la quale γ' e δ , e così δ' e γ abbiano rispettivamente in A_2, A_3 contatti del 2° ordine almeno; osserviamo a questo proposito che la condizione $a_2 = b_2$ è suscettibile di una semplice interpretazione geometrica, in quanto essa esprime che esiste una conica avente contatto tripunto con γ, δ in A_3 e A_2 rispettivamente. Affinchè poi γ' e δ e così δ' e γ abbiano contatti del 3° ordine occorre e basta che sia $a_2 = b_2$ nel qual caso si deve assumere $M = \frac{a_3}{b_3}$, $N = \frac{b_3}{a_3}$. L'omografia in questione è allora un'omologia armonica con l'asse passante per A_1 e il centro appartenente alla retta $A_2 A_3$.

Perchè complessivamente si conservino gli intorno dell'ordine n ($n > 3$) si hanno ulteriormente le condizioni

$$a_r b_3^{r-2} = a_3^{r-2} b_r \quad (r = 4, 5, \dots n).$$

Per es., per $n = 4$ la nuova condizione che così si ottiene si interpreta geometricamente nell'esistenza di una cubica avente contatto 5-punto con γ, δ rispettivamente in A_3, A_2 . Nello stesso caso $n = 4$ un'altra interpretazione geometrica delle condizioni trovate è la seguente, che fornisce una costruzione dell'asse dell'omologia armonica in questione; questo asse è la congiungente di due dei punti comuni alla conica avente contatto 5-punto con γ in A_3 ed alla conica avente contatto 5-punto con δ in A_2 : la congiungente delle altre due intersezioni sega la retta $A_3 A_2$ nel centro di omologia.

La validità delle precedenti deduzioni è subordinata all'ipotesi, tacitamente fatta, che tutti i coefficienti a_r, b_r considerati siano diversi da zero.

Se $a_2 = 0$ (cioè se A_3 è un flesso per la curva γ) le ∞^2 omografie conservanti gli intorni del 1° ordine conservano anche quelli del 2° ordine solo se anche $b_2 = 0$, cioè se anche A_2 è un flesso per δ . In quest'ipotesi, delle ∞^2 omografie (3) solo ∞^1 , e precisamente quelle per cui $M^3 N^3 = 1$ conservano anche gli intorni del 3° ordine. Di queste, in generale, nessuna giunge a conservare gli intorni del 4° ordine nei due sensi; ciò avviene solo se $a_3^2 b_4 = a_4 b_3^2$, e per opera dell'omografia per cui $M = \frac{a_4 b_3}{a_3 b_4}$, $N = \frac{a_3 b_4}{a_4 b_3}$. Per la conservazione degli intorni fino all'ordine n ($n \geq 5$) devono essere verificate oltre alla precedente, le ulteriori relazioni

$$a_r a_3^{r-4} b_4^{r-3} = b_r b_3^{r-4} a_4^{r-3} \quad (r = 5, 6, \dots, n).$$

Sia ora oltre ad $a_2 = 0$ anche $a_3 = 0$. In questo caso le ∞^2 omografie conservanti gli intorni del 1° ordine nei due sensi, conservano anche quelli del 3° solo se $b_2 = b_3 = 0$; e fra esse ve ne sono allora ancora ∞^1 che conservano anche quelli del 4°, quelle per cui $\frac{M}{N} = \pm \frac{a_4}{b_4}$. Si conservano anche gli intorni del 5° ordine se $a_4^3 b_5^2 = a_5^2 b_4^3$, per opera dell'omografia per cui $M = \frac{b_4 a_5}{a_4 b_5}$, $N = \frac{a_4 b_5}{a_5 b_4}$. Questa omografia conserva poi nei due sensi gli intorni fino all'ordine n ($n \geq 6$) solo se sussistono ulteriormente le relazioni

$$a_r a_4^{r-5} b_5^{r-4} = b_r b_4^{r-5} a_5^{r-4}.$$

Supponiamo invece (soltanto) $a_3 = 0$. Per la conservazione degli intorni del 3° ordine da parte delle ∞^2 omografie (3) dev'essere $a_2 = \pm b_2$, $b_3 = 0$. Di queste ∞^2 omografie solo due, corrispondenti a $M = \pm \left(\frac{a_4}{b_4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $N = \pm \left(\frac{b_4}{a_4}\right)^{\frac{1}{2}}$ conservano gli intorni del 4° ordine; e affinché queste due omografie conservino gli intorni di ordine n devono sussistere le relazioni

$$(-1)^r a_r b_4^{\frac{r-2}{2}} = b_r a_4^{\frac{r-2}{2}} \quad (r = 5, 6, \dots, n).$$

Così ancora, rifacendoci alle omografie che consideravamo al numero precedente, per le quali si richiedeva in un senso la conservazione dell'intorno del 1° ordine, e la conservazione di un intorno di ordine superiore nel senso opposto⁽¹⁾, supposto ora $a_2 = 0$, affinché γ' e δ coincidano in

(1) Supposte le a_r, b_r che entrano in considerazione diverse da zero, la coincidenza fra γ' e δ avviene in un intorno di ordine $n > 3$ anziché soltanto per $n = 3$ come a n. 1 quando

$$a_r a_2^{r-3} b_3^{r-2} = b_r a_3^{r-2} b_2^{r-3} \quad (r = 4, 5, \dots, n).$$

un intorno del 2° ordine occorre che sia anche $b_2 = 0$; allora esistono ∞^1 omografie (3) che fanno coincidere δ' e γ in un intorno del 2° ordine e realizzano questa coincidenza anche nell'intorno del 3° ordine, e fra queste una $\left(M = \frac{a_4 b_3}{a_3 b_4}, N = \frac{a_3^2 b_4^2}{a_4^2 b_3^2}\right)$ anche in quello del 5° ordine. In generale non è possibile un'ulteriore conservazione degli intorni considerati, a meno che sia

$$a_r a_3^{r-4} b_4^{r-3} = b_r b_3^{r-4} a_4^{r-3} \quad (r = 5, 6, \dots n)$$

nel qual caso γ' e δ coincidono in un intorno di ordine n .

3. — Indico ancora alcuni dei risultati che già ho ottenuti estendendo le ricerche che precedono alle superficie. Assumiamo i vertici A_4, A_3 del tetraedro fondamentale, in due punti fissati sulle superficie γ, δ e A_1, A_2 nell'intersezione dei piani ivi tangenti a queste; supponendo che per γ, δ negli intorni di A_4, A_3 valgano rispettivamente gli sviluppi

$$(6) \quad \frac{x_3}{x_4} = a_2 \left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + b_2 \frac{x_1}{x_4} \frac{x_2}{x_4} + c_2 \left(\frac{x_2}{x_4}\right)^2 + a_3 \left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + b_3 \frac{x_1^2}{x_4^2} \frac{x_2}{x_4} + \\ + c_3 \frac{x_1}{x_4} \frac{x_2^2}{x_4^2} + d_3 \left(\frac{x_2}{x_4}\right)^3 + \dots$$

$$(7) \quad \frac{x_4}{x_3} = \alpha_2 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \beta_2 \frac{x_1}{x_3} \frac{x_2}{x_3} + \gamma_2 \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^3 + \beta_3 \frac{x_1^2}{x_3^2} \frac{x_2}{x_3} + \\ + \gamma_3 \frac{x_1}{x_3} \frac{x_2^2}{x_3^2} + \delta_3 \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3 + \dots$$

Esistono ∞^1 omografie per le quali γ' coincide con δ e così δ' coincide con γ in un intorno del 1° ordine rispettivamente dei punti A_3, A_4 ; esse sono le

$$(8) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{p-mn} (py_1 - my_2) : \frac{1}{p-mn} (y_2 - ny_1) : \frac{1}{r} y_4 : \frac{1}{q} y_3$$

con m, n, p, q, r costanti arbitrarie purchè $(p-mn)qr \neq 0$. Di queste omografie, ∞^2 realizzano la coincidenza di γ' con δ anche in un intorno del 2° ordine; ciò avviene se

$$\begin{aligned} qr(a_2 p^2 - b_2 p n + c_2 n^2) &= \alpha_2 (p - mn)^2, \\ qr(-2a_2 p m + b_2 p + b_2 m n - 2c_2 n) &= \beta_2 (p - mn)^2, \\ qr(a_2 m^2 - b_2 m + c_2) &= \gamma_2 (p - mn)^2. \end{aligned}$$

Di queste omografie, ve ne sono ∞^1 assiali, i cui assi sono incidenti alle rette $A_1 A_2, A_3 A_4$; ma in generale non ve ne sono di biassiali. La condizione di esistenza di una (e conseguentemente di ∞^1) omografia biassiale è che l'espressione — di cui si riconosce subito il carattere invariante —

$$\frac{4a_2 c_2 - b_2^2}{4\alpha_2 \gamma_2 - \beta_2^2} \text{ valga } 1.$$

Non è invece possibile, in generale, conservare gli interni del 2° ordine nei due sensi: se però esiste una omografia in queste condizioni, ne esistono infinite. Supposto A_4 non parabolico per γ , si possono assumere come rette $A_4 A_1$, $A_4 A_2$ le tangenti principali a γ in A_4 , cosicchè $a_2 = c_2 = 0$. Se esiste un'omografia che conservi gli interni del 2° ordine nei due sensi è $\alpha_2 = 0$, oppure $\gamma_2 = 0$, cioè $A_3 A_1$, oppure $A_3 A_2$, è pure tangente principale alla superficie δ in A_3 . Supposto, per es., $\alpha_2 = 0$, dev'essere $b_2 = \pm \beta_2 (= 0)$ oppure $b_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$. Nel primo caso $m = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$, $n = 0$, $p = -1$, $qr = \mp 1$, e quindi esistono ∞^1 omografie nelle condizioni volute. Nel 2° caso tutte le omografie (8) fanno al caso nostro, caso ovvio perchè nelle (6), (7) mancano i termini di 2° grado.

Ammettendo contemporaneamente $\alpha_2 = 0$, $\gamma_2 = 0$ si ritrova il caso ovvio, ma se ne presenta pure uno nuovo: se è $b_2 = \pm \beta_2$ esistono ∞^2 omografie del tipo voluto, determinate da $m = n = 0$, $qr = \pm p$.

In casi particolari, esistono dunque ∞^1 , ∞^2 , ∞^3 omografie conservanti complessivamente gli interni del 2° ordine. Nell'ipotesi che ne esistano ∞^3 , una e una sola di esse conserva anche gli interni di 3° ordine, purchè tra i coefficienti degli sviluppi (6), (7) intercedano nuove relazioni, di espressione non semplice.

Meccanica. — *Sulla validità ed estensione del teorema del massimo effetto.* Nota ⁽¹⁾ di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il chiarissimo prof. E. Cartan ha avuto la bontà di interessarsi alla mia nuova interpretazione del principio del Gauss ⁽²⁾ e sue conseguenze e mi ha cortesemente avvertito di una svista in cui sono incorso, trascurando, senza preliminare discussione, un termine che è in generale dello stesso ordine di grandezza di quelli che intervengono essenzialmente nel ragionamento. Il rilievo dell'illustre geometra francese, al quale esprimo viva gratitudine per la forma benevola ed incoraggiante della lettera con cui volle comunicarmelo, è senza dubbio fondato. Fortunatamente però, tenendo debito conto anche di quel termine, si arriva alla conclusione, che il mio teorema vale effettivamente, sotto la precisa forma annunziata, nel caso

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1929.

(2) Cfr. E. GUGINO, *Sopra una nuova interpretazione, ecc.* «Rend. Acc. Lincei», vol. VIII, serie 6^a, 2° sem., pp. 558-565 e *Sulla estensione del teorema del massimo effetto, ecc.*, vol. IX, serie 6^a, 1° sem., pp. 736-742.

particolare (assai notevole) in cui si parta dalla quiete e seguita a sussistere anche nel caso generale, purchè soltanto si introduca una conveniente modificazione nella formula, con cui si traduce analiticamente la nozione di effetto cineto-dinamico. Con ciò vien fatto di abbracciare anche il caso di vincoli dipendenti esplicitamente dal tempo, caso che rimaneva invece escluso in base alla definizione incompleta cui ero ricorso in precedenza.

Nella presente Nota mi propongo di giustificare sommariamente quanto sopra, riservandomi di riprendere l'intera questione con maggiori sviluppi e qualche esempio illustrativo, in una Memoria di prossima pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

1. *Generalità.* — Rifacciamoci *ab-initio* prendendo in considerazione un sistema di quanti si vogliano punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di masse m_i , a legami privi di attrito, comunque sollecitato; assumendo quali parametri lagrangiani (sovrabbondanti) che caratterizzino le configurazioni del sistema, le $3N$ coordinate cartesiane ξ_i, η_i, ζ_i dei punti P_i , rispetto ad una terna galileiana prefissata, i vincoli, siano essi onolonomi od anolonomi, vengono in generale espressi ⁽¹⁾, come è noto, da equazioni del tipo:

$$(1) \quad B_k(\mathbf{v}) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

con B_k forme lineari, nelle componenti $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$ delle velocità \mathbf{v}_i dei punti P_i , a coefficienti, come pure le b_k , dipendenti dalle coordinate ed eventualmente dal tempo; le accelerazioni \mathbf{a}_i , che i vincoli consentono ai singoli punti del sistema, sono definite dalle equazioni, che si deducono dalle (1) per derivazione rapporto al tempo:

$$(2) \quad B_k(\mathbf{a}) = c_k(\mathbf{v} | P | t) \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

ove le B_k denotano le medesime funzioni lineari, che compaiono al primo membro delle (1), nelle componenti però $\ddot{\xi}_i, \ddot{\eta}_i, \ddot{\zeta}_i$, delle \mathbf{a}_i e le c_k risultano funzioni quadratiche, in generale non omogenee, nelle componenti $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$ delle velocità \mathbf{v}_i a coefficienti dipendenti dalle coordinate e dal tempo. A partire da una generica configurazione C con velocità \mathbf{v}_i all'istante t , le differenze $\delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i^*$ tra le accelerazioni effettive \mathbf{a}_i dei punti P_i relative al moto naturale e le accelerazioni \mathbf{a}_i^* relative ad una qualsivoglia distribuzione compatibile coi vincoli, soddisfano, come facilmente si scorge, le equazioni:

$$(3) \quad B_k(\delta \mathbf{a}_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. I (1^a parte), cap. XV, § 7.

le quali si identificano, salvo lo scambio materiale delle incognite, con le:

$$(3') \quad B_k(\delta P) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

che definiscono gli spostamenti virtuali δP_i del sistema, a partire dalla generica configurazione C all'istante t ⁽¹⁾.

2. *Vincoli reversibili.* — Nel caso particolarmente notevole, che i vincoli si suppongano reversibili ⁽²⁾ tutte le b_k che compaiono a secondo membro delle (1), sono nulle; le c_k risultano funzioni quadratiche nelle $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$, mancanti però del termine indipendente dalle variabili, di guisa che, nella ulteriore ipotesi, che il sistema parta dalla quiete, le c_k si annullano, e le (2) assumono la forma:

$$B_k(\alpha) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

le quali si identificano altresì, salvo la designazione delle incognite, con le (3') che caratterizzano gli spostamenti virtuali δP_i a partire dalla medesima configurazione iniziale. Si può allora affermare che *per ogni sistema a legami reversibili, ogni distribuzione di accelerazioni compatibile coi vincoli a partire dalla quiete, dà luogo ad uno spostamento virtuale e viceversa.*

3. *Vincoli indipendenti dal tempo. Legami addizionali a raccordo. Moti virtuali corrispondenti.* — Sia ora S un sistema a legami indipendenti dal tempo; a partire da un generico atto di moto v_i allo istante t , si faccia subire al sistema, nel successivo intervallo di tempo τ , un qualsivoglia movimento virtuale, realizzato, ferma restando la sollecitazione attiva F_i , mercè l'aggiunta di legami « a raccordo » comunque scelti; tali legami addizionali, pur essi privi di attrito e indipendenti dal tempo, debbono poter consentire (onde la denominazione « a raccordo ») l'atto di moto v_i allo istante t ; le corrispondenti equazioni:

$$(1') \quad B_{k'}(v) = 0 \quad (k' = 1', 2', \dots, r')$$

sono del tipo delle (1) con i secondi membri identicamente nulli; inoltre per la loro particolare scelta, esse si suppongono verificate dalle N terne di valori ξ_i, η_i, ζ_i , che esprimono le componenti delle velocità v_i dei punti P_i allo istante t . Soltanto nel caso che il sistema S parta dalla quiete i vincoli addizionali, ed in conseguenza le equazioni (1'), possono scegliersi del tutto ad arbitrio, poichè con essi è sempre compatibile l'atto di moto iniziale rappresentato da vettori v_i tutti nulli. Applicando il principio dei lavori virtuali al moto naturale del dato sistema S , ove si indichino con R_i

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA ed U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. I, parte 1^a pp. 299-303.

(2) Tali vincoli consentono insieme con ogni atto di moto compatibile con essi, l'atto di moto direttamente opposto.

le reazioni, che si destano nei punti P_i all'istante t , avendo supposto i legami indipendenti dal tempo, ha luogo la relazione:

$$(4) \quad \sum_i^N \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i = 0.$$

Pel medesimo principio, se si considera il moto di un qualsivoglia sistema S^* , che si deduce da S con l'aggiunta di vincoli a raccordo comunque scelti, ove si indichino con \mathbf{R}_i^* le reazioni che si destano nei punti P_i nello stesso istante t , in corrispondenza del moto di S^* , analogamente si ha:

$$(4') \quad \sum_i^N \mathbf{R}_i^* \times \mathbf{v}_i = 0.$$

Se infine si suppone che il sistema S parta dalla quiete, per la circostanza già messa in rilievo, che in tale ipotesi ogni distribuzione delle accelerazioni compatibile coi vincoli, dà luogo ad uno spostamento virtuale e viceversa, indicando con \mathbf{a}_i^* l'accelerazione del generico punto P_i del sistema S^* , risulta:

$$(5) \quad \sum_i^N \mathbf{R}_i^* \times \mathbf{a}_i^* = 0 \quad ; \quad \sum_i^N \mathbf{R}_i \times \mathbf{a}_i^* = 0,$$

ove si tenga pure conto del fatto, che le accelerazioni \mathbf{a}_i^* vettorialmente si identificano con gli spostamenti virtuali, sia del sistema S che del sistema S^* .

4. *Moto libero, naturale, virtuale; caso in cui si parta dalla quiete e relativo teorema del massimo effetto cineto-dinamico.* — Ciò premesso, secondo le precedenti notazioni, ove si indichino con:

M_i la posizione di un generico punto P_i allo istante t ;

L_i la posizione di P_i allo istante $t + \tau$ nel moto libero, sotto la sollecitazione attiva \mathbf{F}_i , nella ipotesi che i legami allo istante t fossero bruscamente soppressi;

N_i la posizione del punto P_i allo istante $t + \tau$ nel moto reale vincolato (moto naturale);

V_i la posizione del generico punto P_i allo istante $t + \tau$ in un generico moto compatibile coi vincoli, rimanendo immutata la sollecitazione attiva, realizzato con l'aggiunta di legami a raccordo comunque scelti;

abbiamo definito come effetto cineto-dinamico naturale e virtuale, durante l'intervallo di tempo abbastanza piccolo τ , le quantità E_N ed E rispettivamente espresse dalle relazioni:

$$(6) \quad E_N = \sum_i^N m_i \overline{M_i N_i^2} \quad ; \quad E = \sum_i^N m_i \overline{M_i V_i^2}.$$

Ritornando sulla dimostrazione del nostro teorema, resa indipendente dal principio della minima costrizione del Gauss, arrestando però gli svi-

luppi del Taylor ai termini del terzo grado in τ , tenendo conto del postulato delle reazioni vincolari, si può scrivere:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_i - M_i = v_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{m_i} F_i + (3) \\ N_i - M_i = v_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{m_i} (F_i + R_i) + (3) \\ V_i - M_i = v_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{m_i} (F_i + R_i^*) + (3) \end{array} \right.$$

ove il simbolo (3) denota in ciascuna formula una certa quantità il cui modulo è del terzo ordine almeno rispetto a τ (1).

Per sottrazione dalle (7) si deduce:

$$(7') \quad V_i - N_i = \frac{\tau^2}{2 m_i} [(R_i^* - R_i) + (1)]$$

ove con (1) si indica un certo vettore il cui modulo è del primo ordine rispetto a τ .

D'altra parte del triangolo $M_i V_i N_i$, pel teorema del Carnot relativo al lato $M_i N_i$ si ha:

$$\overline{M_i N_i^2} = \overline{M_i V_i^2} + \overline{N_i V_i^2} - 2(V_i - N_i) \times (V_i - M_i).$$

Moltiplicando entrambi i membri per m_i , sommando rispetto all'indice i , a norma delle (7'), dell'ultima delle (7) e delle definizioni (6) di E_N ed E , si ottiene:

$$(8) \quad E_N = E + \sum_i^N m_i \overline{N_i V_i^2} - \tau^2 \sum_i^N [(R_i^* - R_i) + (1)] \times \left[v_i \tau + \frac{\tau^2}{2} a_i^* + (3) \right].$$

Intanto avuto riguardo alle (7'), il primo sommatorio a secondo membro risulta del quarto ordine almeno rispetto a τ ; trascurando solo il quinto ordine, in virtù delle (4) e (4'), la precedente relazione assume l'aspetto:

$$E_N = E + \sum_i^N m_i \overline{N_i V_i^2} - \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N (R_i^* - R_i) \times a_i^* - \tau^3 \sum_i^N v_i \times (1).$$

In generale nulla possiamo affermare circa il comportamento del terzo sommatorio. Se però supponiamo che il sistema S parta dalla quiete, tale sommatorio svanisce; in tale ipotesi hanno luogo inoltre le (5), talchè in definitiva l'ultima equazione assume la forma:

$$(I) \quad E_N = E + \sum_i^N m_i \overline{N_i V_i^2}$$

(1) Nella precedente redazione avevo ommesso di mettere in evidenza l'ordine dei termini non esplicitati e con ciò si è insinuata nel successivo calcolo la svista cortesemente segnalata dal Cartan.

che manifestamente traduce l'enunciato del nostro teorema del massimo effetto: « per ogni sistema materiale a vincoli privi di attrito ed indipendenti dal tempo, comunque sollecitato, il moto naturale, in un intervallo di tempo (abbastanza piccolo) τ , a partire dalla quiete, è quello che rende massimo l'effetto cineto-dinamico virtuale E in confronto di qualsivoglia movimento compatibile coi vincoli, realizzato, nello stesso intervallo di tempo, sotto la medesima sollecitazione attiva, con l'aggiunta di legami comunque scelti ».

5. *Altra dimostrazione del teorema.* - Possiamo fornire del precedente teorema una dimostrazione più diretta; in virtù delle (6) si può scrivere:

$$E_N - E = \sum_i^N m_i [(N_i - M_i)^2 - (V_i - M_i)^2]$$

oppure in forma equivalente:

$$E_N - E = \sum_i^N m_i (N_i - V_i) \times [(N_i - M_i) + (V_i - M_i)].$$

Nella ipotesi che il sistema parta dalla quiete, per le (7) e (7'), trascurando il quinto ordine rispetto a τ , la precedente relazione assume l'aspetto:

$$(9) \quad E_N - E = \frac{\tau^4}{4} \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^*) \times (2\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i^*).$$

D'altra parte manifestamente si ha:

$$2\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i^* = 2m_i \mathbf{a}_i^* + (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^*)$$

che sostituita materialmente nella (9) tenendo conto delle (5) in definitiva si ottiene

$$E_N - E = \frac{\tau^4}{4} \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^*)^2$$

che traduce il nostro teorema del massimo effetto iniziale.

6. *Definizione generalizzata dell'effetto cineto-dinamico, valida per qualsiasi atto di moto. Identità colla precedente definizione per legami indipendenti dal tempo a partire dalla quiete.* - Stabilito ciò rendiamo più generali le formule di definizione (6) di E_N ed E allo scopo di renderle valide per qualsiasi atto di moto ed estendere altresì le nostre considerazioni ai sistemi a legami dipendenti esplicitamente dal tempo. A partire da una generica configurazione C con velocità \mathbf{v}_i assegnate, assumeremo come formula di definizione dell'effetto cineto-dinamico E_N relativo al moto naturale, durante l'intervallo di tempo abbastanza piccolo τ , la seguente relazione:

$$(10) \quad E_N = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i \tau^2 \right)^2 + \tau^2 \sum_i^N \left(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i \right) \times \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i \tau^2 \right)$$

ciò che è suggerito (come risulterà a posteriori dalla proprietà di cui gode tale funzione) dalla (8) valida in ogni caso, ridotta opportunamente e tra-

scurando il quinto ordine rispetto a τ . Naturalmente in corrispondenza ad una qualsivoglia distribuzione delle accelerazioni \mathbf{a}_i^* compatibili coi vincoli, a partire dalla configurazione C e dalle velocità \mathbf{v}_i prefissate, l'effetto E relativo al generico moto conciliabile coi legami, durante lo stesso intervallo di tempo, va definito dalla formula

$$(10') \quad E = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^* \tau^2 \right)^2 + \tau^2 \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^*) \times \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^* \tau^2 \right).$$

L'effetto E_L relativo al moto libero, a partire dalle medesime condizioni iniziali risulta in conseguenza espresso dalla uguaglianza:

$$(10'') \quad E_L = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \tau^2 \right)^2.$$

Nel caso poi di un sistema S a legami indipendenti dal tempo, la nuova definizione (10) di E_N si semplifica: in virtù della equazione simbolica della dinamica, risulta:

$$(11) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \mathbf{v}_i = 0.$$

La relazione analoga, che si deduce dalla precedente, ponendo in luogo delle \mathbf{a}_i naturali una qualsivoglia distribuzione \mathbf{a}_i^* conciliabile coi legami, non è certamente valida in generale; però se ci si limita a considerare insieme al moto di S quello di un qualsivoglia sistema S^* , che si deduce da S per l'aggiunta di vincoli a raccordo comunque scelti, la distribuzione di accelerazioni \mathbf{a}_i^* che compete al moto di S^* allo istante t , soddisfa ugualmente la relazione:

$$(11') \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^*) \times \mathbf{v}_i = 0.$$

Gli effetti E_N ed E definiti dalle (10) e (10') relativi al moto dei sistemi S ed S^* , a partire dalle stesse condizioni iniziali, tenuto conto delle (11) ed (11') sono esprimibili per mezzo delle formule:

$$(12) \quad \begin{cases} E_N = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i \tau^2 \right)^2 + \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \mathbf{a}_i \\ E = \sum_i^N m_i \left(\mathbf{v}_i \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^* \tau^2 \right)^2 + \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^*) \times \mathbf{a}_i^* \end{cases}$$

Se più particolarmente ancora il sistema S e quindi anche S^* , si suppone che partano dalla quiete, valgono inoltre le equazioni

$$\begin{aligned} \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \mathbf{a}_i &= 0 \\ \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^*) \times \mathbf{a}_i^* &= 0 \end{aligned}$$

ed in conseguenza le (12) assumono la forma:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_N = \frac{\tau^4}{4} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i^2 \\ E = \frac{\tau^4}{4} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i^{*2} \end{array} \right.$$

e risultando nella nostra ipotesi:

$$N_i - M_i = \frac{\tau^2}{2} \mathbf{a}_i + (3)$$

$$V_i - M_i = \frac{\tau^2}{2} \mathbf{a}_i^* + (3)$$

a meno di termini del quarto ordine rispetto a τ , le (13) equivalgono le (6) precedentemente stabilite.

7. *Dimostrazione del teorema generalizzato. Proprietà della energia di accelerazione per i sistemi a legami indipendenti dal tempo a partire dalla quiete.* — Vogliamo ora dimostrare il nostro teorema generalizzato, vale a dire che E_N definito dalla (10) è massimo fra tutte le possibili determinazioni di E . Infatti la variazione prima della (10'), considerata come funzione delle \mathbf{a}_i^* , con F_i, m_i, v_i, τ prefissate, ha l'espressione:

$$\delta E = \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i^*) \times \delta \mathbf{a}_i^*$$

ed il secondo membro, in base alla equazione simbolica della dinamica:

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \delta \mathbf{P}_i = 0$$

è certamente nullo allorchè si sostituiscono in luogo delle \mathbf{a}_i^* conciliabili coi legami, i valori \mathbf{a}_i che corrispondono al moto naturale del sistema; ciò perchè, come si è rilevato, in base alle (3) le variazioni $\delta \mathbf{a}_i$ delle accelerazioni a partire dalle \mathbf{a}_i naturali e compatibili coi vincoli, si identificano vettorialmente con gli spostamenti virtuali $\delta \mathbf{P}_i$ e viceversa. La variazione seconda

$$\delta^2 E = - \frac{\tau^4}{2} \sum_i^N m_i (\delta \mathbf{a}_i^*)^2$$

risulta essenzialmente negativa; in conseguenza si tratta di un massimo effettivo di E_N fra tutti i possibili valori di E . La proposizione è così dimostrata. Se in particolare i legami sono indipendenti dal tempo ed il sistema S che si considera parte della quiete, le definizioni (10) e (10') di E_N

ed E assumono la forma (13) ed essendo E_N sempre maggiore di E si deduce

$$\frac{1}{2} \sum_i^N m_i \alpha_i^2 > \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \alpha_i^{*2}$$

quindi « l'energia di accelerazione relativa al moto del sistema S a partire dalla quiete è massima fra tutte le possibili determinazioni dell'analoga energia di accelerazione relativa al moto di qualsivoglia sistema S^* ».

8. *Ritorno al principio del Gauss e ad altre classiche deduzioni.* — Possiamo direttamente verificare le relazioni:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_L - E_N = \frac{\tau^2}{2} \sum_i^N \frac{m_i}{2} \left[\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \boldsymbol{\alpha}_i \right]^2 \\ E_L - E = \frac{\tau^2}{2} \sum_i^N \frac{m_i}{2} \left[\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \boldsymbol{\alpha}_i^* \right]^2 \end{array} \right.$$

ed i secondi membri esprimono, come è noto, le costrizioni gaussiane, che i vincoli esercitano sui punti del sistema durante l'intervallo di tempo τ , nel moto naturale oppure nel generico moto conciliabile coi vincoli rispettivamente; tali costrizioni si possono adunque definire come differenze tra l'effetto relativo al moto libero e l'analogo effetto relativo al moto naturale oppure al generico moto compatibile coi legami. Valgono con più generalità le considerazioni che abbiamo svolto circa il comportamento dei vincoli durante il moto del sistema; tale comportamento si riassume, come abbiamo rilevato, in un'azione riduttrice dell'effetto E_L relativo al moto libero. Infine dalle (11) con gli stessi procedimenti altre volte indicati, si deducono il teorema dell'Appell ed il principio della direttissima dell'Hertz⁽¹⁾.

Meccanica celeste. — *Sulla regolarizzazione del problema generale dei tre corpi.* Nota di W. KUSNETZOFF, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les repères mobiles dans l'espace fonctionnel.* Nota di Gr. C. MOISIL, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les equations intégró-fonctionnelles.* Nota di C. POPOVICI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. E. GUGINO, *Sul teorema del massimo effetto cineto-dinamico in relazione col principio della direttissima dell'Hertz*, « Rend. Accad. Lincei », vol. IX, serie 6^a, 1^o sem. pp. 1090-1095.

Matematica. — *Sulle coordinate geodetiche lungo una linea.* Nota di E. BORTOLOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Elasticità. — *Alcune proprietà integrali della dilatazione cubica.* Nota ⁽¹⁾ di G. SUPINO, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. Per alcuni miei studi (che mi propongo di pubblicare prossimamente) ho avuto occasione di valermi delle seguenti relazioni integrali relative alla dilatazione cubica Θ di un solido elastico S , soggetto a forze esterne in equilibrio agenti soltanto sulla sua superficie σ :

$$(1) \quad \int_S \Theta dS = \frac{mE}{m-2} \int_{\sigma} (xP_x + yP_y + zP_z) d\sigma^{(2)}$$

$$(2) \quad \int_S y\Theta dS = \frac{mE}{m-2} \int_{\sigma} \left(xyP_x + \frac{y^2 - x^2 - z^2}{2} P_y + yzP_z \right) d\sigma.$$

Partendo da esse si può dimostrare che « se un sistema di forze in equilibrio (di componenti P_x, P_y, P_z) agisce su un'unica zona piana σ_1 , di un solido elastico, allora è nulla la dilatazione cubica totale provocata nel solido dalle forze stesse; ossia è

$$(3) \quad \int_S \Theta dS = 0$$

ed insieme è anche

$$(4) \quad \int_S x\Theta dS = \int_S y\Theta dS = \int_S z\Theta dS = 0 \text{ »}.$$

La dimostrazione di questi enunciati forma l'oggetto della presente Nota.

2. Accenneremo brevemente come si giunga alla formula (2). Basta osservare che, associando al sistema equilibrato di forze P_x, P_y, P_z gli spostamenti (completamente arbitrarii) u', v', w' , l'integrale

$$(5) \quad \int_{\sigma} (u' P_x + v' P_y + w' P_z) d\sigma,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1929.

(2) La (1) è ben nota (cfr. per esempio CESARO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Torino, 1894); la (2) per quanto mi consta non è esplicitamente notata.

esteso alla superficie del corpo si trasforma per mezzo del lemma di Gauss (e tenendo conto che le tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$, dipendenti dal sistema di forze dato, soddisfano alle equazioni indefinite dell'equilibrio) nell'integrale esteso al volume

$$(6) \quad \int_S (\sigma_x \epsilon'_x + \sigma_y \epsilon'_y + \sigma_z \epsilon'_z + \tau_{yz} \gamma'_{yz} + \tau_{zx} \gamma'_{zx} + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dS,$$

dove $\epsilon'_x = \frac{\partial u'}{\partial x}, \dots, \gamma'_{xy} = \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}$ rappresentano le componenti di deformazione relative al sistema di spostamenti u', v', w' .

Posto ora

$$u' = axy, \quad v' = \frac{a^2}{2} (y^2 - x^2 - z^2), \quad w' = ayz$$

segue

$$\epsilon'_x = \epsilon'_y = \epsilon'_z = ay, \quad \gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0$$

sicchè, tenendo conto della relazione

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m-2}{Em} \Theta \quad (\text{E modulo di elasticità, } m \text{ coefficiente di contrazione})$$

e dell'eguaglianza tra la (5) e la (6), si ottiene senz'altro la (2).

3. Ciò premesso riprendiamo in esame la (1); il primo membro di questa espressione rappresenta la dilatazione cubica totale del solido; essa risulta espressa semplicemente per mezzo delle forze applicate sulla superficie limite del solido. Se come si è supposto, di questa superficie limite fa parte una zona σ_1 , tutta contenuta in un unico piano, e se le forze sono applicate soltanto in questa zona, la rimanente parte (σ_2) della superficie limite non compare nell'integrale del secondo membro della (1); ne segue che tutti i solidi (composti dello stesso materiale) che hanno la zona σ_1 come parte della loro superficie limite, e sono soggetti alle stesse forze (applicate soltanto in σ_1), hanno sempre la stessa dilatazione totale:

$$\int_S \Theta dS = \frac{mE}{m-2} \int_{\sigma_1} (xP_x + yP_y + zP_z) d\sigma_1.$$

Fissiamo allora le coordinate in modo che il piano xy risulti parallelo a σ_1 e supponiamo che il solido sia formato dal semispazio limitato dal piano che contiene σ_1 ; per esso si verifica facilmente che la dilatazione cubica totale è nulla perchè, per le condizioni di equilibrio, è

$$z \int_{\sigma_1} P_z d\sigma_1 = 0$$

e perchè, nella relazione residua

$$\int_S \Theta dS = \frac{mE}{m-2} \int_{\sigma_1} (xP_x + yP_y) d\sigma_1,$$

se cambiamo di segno alle forze applicate P_x, P_y il secondo membro cambia di segno, mentre, per la completa simmetria del solido, la dilatazione totale resta la stessa.

Concludiamo dunque che un sistema di forze in equilibrio, applicato su un'unica zona piana σ_1 di un solido elastico, provoca in esso una deformazione con dilatazione cubica totale nulla ⁽¹⁾.

4. Con lo stesso procedimento, se pure in modo meno semplice, si dimostrano le (4). Consideriamo infatti la (2) e osserviamo anche qui, che se P_x, P_y, P_z sono diverse da zero soltanto nella zona σ_1 , l'integrale del secondo membro resta esteso soltanto a questa zona; potremo quindi deformare la rimanente parte di σ senza cambiare il valore del primo membro della (2).

Se σ_1 costituisce una zona piana fissiamo l'origine delle coordinate in un punto O del piano che contiene σ_1 e poniamo in esso gli assi x e y ; centro in O descriviamo quindi nel piano (x, y) una circonferenza di raggio R sufficientemente grande perchè σ_1 resti contenuta nel suo interno e consideriamo la semisfera limitata da quella zona (σ'_1) del piano (x, y) compresa entro la circonferenza di raggio R e che si trova dalla stessa parte di σ_1 dalla quale si trovava il solido primitivo.

Ciò posto, si verifica subito che

$$\int_{\sigma_1} yP_z d\sigma_1 = 0;$$

resta quindi da considerare il sistema di forze in equilibrio P_x, P_y applicate soltanto a σ'_1 . Si scomponga allora P_x, P_y in due sistemi l'uno simmetrico, l'altro antisimmetrico rispetto all'asse x ⁽²⁾; ciascuno di questi soddisfa separatamente alle equazioni dell'equilibrio ⁽³⁾.

(1) Si osserva facilmente in base alle deduzioni precedenti che se σ_1 non è piana e si applicano in due punti di σ_1 due forze eguali ed opposte dirette secondo la loro congiungente allora si ha una dilatazione cubica totale uguale a quella di un prisma a base rettangolare, che abbia per altezza la distanza dei due punti, e soggetto sulle due basi alle forze date; cioè una dilatazione cubica totale certamente diversa da zero. Sicchè la proprietà enunciata appare come caratteristica delle zone piane.

(2) Chiamo antisimmetriche rispetto all'asse x due forze applicate in punti simmetrici rispetto ad x con intensità uguale, direzione simmetrica e senso opposto al simmetrico.

(3) Un sistema antisimmetrico rispetto ad x soddisfa per definizione alle equazioni

$$\int_{\sigma'_1} \bar{P}_x d\sigma = 0 \qquad \int \bar{P}_x d\sigma = 0 \qquad \int x \bar{P}_y d\sigma = 0;$$

Per il primo sistema è manifestatamente $\int_S y \Theta dS = 0$ mentre se si tratta di un sistema antisimmetrico si considerino separatamente le componenti \bar{P}_x e \bar{P}_y che formano ciascuna un sistema in equilibrio. Per quanto riguarda il sistema \bar{P}_x si osservi che cambiando l'orientamento degli assi x e y l'integrale

$$\int_{\sigma'_1} xy \bar{P}_x d\sigma'_1$$

muta di segno (perchè x, y e \bar{P}_x mutano di segno) e resta contemporaneamente invariato (per la antisimmetria del sistema di forze); si deduce così che

$$\int_{\sigma} xy P_x d\sigma = 0.$$

Resta da considerare il sistema \bar{P}_y per ipotesi antisimmetrico rispetto all'asse x ed a risultanti nulle in σ'_1 ; osserveremo quindi che in base alle deduzioni del n. 3 la sua dilatazione cubica totale è nulla e quindi

$$\int_{\sigma'_1} y \bar{P}_y d\sigma'_1 = 0.$$

Inoltre, per definizione stessa di antisimmetria segue che

$$\int_{\sigma'_1} xy \bar{P}_y d\sigma'_1 = 0$$

e da queste relazioni si deduce che il sistema di forze $(y \cdot \bar{P}_y)$ (cioè il sistema che si deduce da \bar{P}_y moltiplicando ciascuna forza per la y che gli compete) è un sistema equilibrato in σ'_1 ; come tale dà luogo a dilatazione cubica totale nulla e quindi

$$\int_{\sigma'_1} y (y \cdot \bar{P}_y) d\sigma'_1 = \int_{\sigma'_1} y^2 \bar{P}_y d\sigma'_1 = 0.$$

un sistema simmetrico rispetto all'asse x soddisfa invece alla equazione $\int P_y d\sigma = 0$. Tenendo conto che per il sistema *somma dei due* valgono le equazioni dell'equilibrio:

$$\int P_x d\sigma = 0 \quad \int P_y d\sigma = 0 \quad \int (y P_x - x P_y) d\sigma = 0$$

ne segue che sistema simmetrico e sistema antisimmetrico soddisfano *separatamente* alle equazioni dell'equilibrio.

Nell' integrale

$$\int_{\sigma_1} \frac{y^2 - x^2 - z^2}{2} \bar{P}_y d\sigma$$

resta così soltanto da dimostrare che la parte che contiene x^2 è anche essa nulla per concludere che $\int_S y \Theta dS = 0$; ma poichè sulla restante superficie limite della semisfera le forze applicate sono nulle si può estendere l' $\int (x^2 + z^2) \bar{P}_y d\sigma_1$ a tutta la superficie limite e trasformare quindi l' integrale stesso per mezzo del lemma di Gauss.

Tenendo conto delle equazioni indefinite dell'equilibrio e delle equazioni ai limiti si trova

$$\int_{\sigma_1} (x^2 + z^2) \bar{P}_y d\sigma_1 = 2 \int_S (x \tau_{xy} + z \tau_{yz}) dS.$$

Seghiamo la semisfera con un piano generico π perpendicolare all'asse y ; su di esso τ_{xy} rappresenta le forze dirette secondo l'asse x , τ_{yz} le forze dirette secondo z ; e poichè sul solido non vi sono altre forze applicate in queste direzioni ne segue

$$\int_{\pi} \tau_{yz} d\sigma = 0, \quad \int_{\pi} \tau_{xy} d\sigma = 0, \quad \int_{\pi} (z \tau_{xy} - x \tau_{yz}) d\sigma = 0;$$

ed infine per quello che si è osservato al n. 3: $\int_{\pi} (x \tau_{zy} + z \tau_{yx}) d\sigma = 0$.

Questa relazione è soddisfatta su ogni piano π perpendicolare all'asse y e quindi anche in tutto il volume della semisfera. In base a questa osservazione possiamo concludere così che se un sistema di forze in equilibrio è applicato soltanto su una zona piana σ_1 di un solido elastico e se l'asse y è parallelo a σ_1 si ha

$$\int_{\sigma_1} y \Theta d\sigma = 0.$$

Consideriamo ora un'asse z perpendicolare a σ_1 . Si ha allora la relazione

$$\int_S z \Theta dS = \frac{mE}{m-2} \int_{\sigma_1} \left(x z P_x + y z P_y + \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2} P_z \right) d\sigma.$$

Ma su σ_1 è $z = \text{cost.}$; e d'altra parte (P_x, P_y) e P_z costituiscono separatamente due sistemi in equilibrio; per quanto si è mostrato al n. 3

è quindi

$$\int_{\sigma_1} (xP_x + yP_y) d\sigma_1 = 0 \quad \quad \int_{\sigma_1} P_z d\sigma_1 = 0.$$

Ma anche

$$\int_{\sigma_1} (x^2 + y^2) P_z d\sigma = 0$$

perchè trasformando questo integrale di superficie in un integrale di volume (con le stesse avvertenze con le quali dalla (5) si è giunti alla (6)) si trova

$$\int_{\sigma_1} (x^2 + y^2) P_z d\sigma = 2 \int_S (y\tau_{yz} + x\tau_{zx}) dS.$$

Seghiamo allora il solido con un piano generico π perpendicolare all'asse z ; su di esso τ_{zx} rappresenta le forze dirette secondo l'asse x , τ_{zy} quelle dirette secondo l'asse y ; e poichè sul solido non vi sono altre forze applicate in queste direzioni ne segue

$$\int_{\pi} \tau_{yz} d\sigma = 0 \quad \int_{\pi} \tau_{zx} d\sigma = 0 \quad \int_{\pi} (y\tau_{zx} - x\tau_{zy}) d\sigma = 0$$

ed infine per il risultato del n. 3

$$\int_{\pi} (x\tau_{zx} + y\tau_{yz}) d\sigma = 0.$$

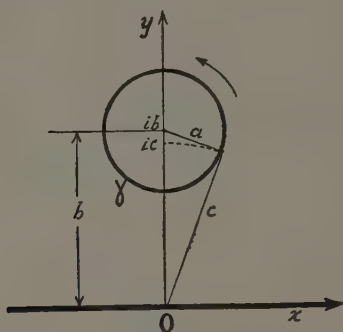
Questa relazione è soddisfatta su ogni piano π perpendicolare a z e quindi anche in tutto il solido. Ne segue che

$$\int_S z \Theta dS = 0$$

se l'asse z è perpendicolare a σ_1 . Ma poichè $\int y \Theta dS = 0$ se y è parallelo a σ_1 , e d'altra parte $\int \Theta dS = 0$ così le stesse relazioni (4) sono dimostrate per una terna di assi qualunque.

Idromeccanica. — *Effetto dinamico di una corrente traslazionale che investe un cilindro sottile, in vicinanza di una parete piana indefinita.* Nota ⁽¹⁾ di E. RAIMONDI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Consideriamo un solido cilindrico indefinito, a base circolare, colle generatrici parallele ad una parete rigida piana pure indefinita, immerso in una massa fluida incompressibile, di densità unitaria, che occupi il semi-



spazio limitato dalla parete piana. La massa fluida si muova in modo permanente di traslazione uniforme parallelamente alla parete rigida e perpendicolarmente alle generatrici del cilindro, in maniera che dia luogo, attorno al cilindro, anche ad una circolazione; e si supponga infine che, su ogni sezione piana normale alle generatrici, il moto avvenga nello stesso modo, essendo identiche le caratteristiche del moto lungo ogni retta normale alla sezione. Con tali ipotesi, è sufficiente considerare, in una generica sezione piana, una corrente traslazionale parallela ad una retta e da essa limitata, che investe un cerchio, dando luogo ad una circolazione attorno al cerchio (moto piano).

Assumiamo la retta come asse delle x e sia $y \geq 0$ il semipiano occupato dal fluido e dal cerchio, il cui centro sia sull'asse delle y . Siano inoltre a il raggio del cerchio e $b > a$ la distanza del suo centro dalla retta;

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1929.

distanza che si suppone sufficientemente grande rispetto ad a , in maniera che si possa porre

$$(1) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0 \quad , \quad \text{per } n > 1.$$

Indichiamo infine con γ la circonferenza del cerchio.

Scopo della presente Nota è quello di trovare l'effetto dinamico della corrente sopra descritta sul cilindro.

E poichè sono state già studiate, a parte, il caso della sola traslazione e quello della sola circolazione, la maniera più semplice per risolvere il problema presente consiste nel determinare la velocità complessa, sommando quelle dei casi semplici ora ricordati.

In effetti, è noto ⁽¹⁾ che la funzione f_1 della variabile complessa $z = x + iy$ che definisce il moto, nel caso della sola traslazione, è, ammessa la condizione (1),

$$(2) \quad f_1 = tz + a^2 t \left(\frac{1}{z - ib} + \frac{1}{z + ib} \right),$$

nella quale t è il modulo della traslazione. Dalla (2) si ricava

$$(3) \quad w_1 = \frac{df_1}{dz} = t - a^2 t \left[\frac{1}{(z - ib)^2} + \frac{1}{(z + ib)^2} \right].$$

D'altra parte, nel caso della sola circolazione, la funzione che definisce il moto è ⁽²⁾:

$$(4) \quad f_2 = \frac{C}{2\pi i} \log \frac{z - ic}{z + ic},$$

nella quale C è la circolazione e $c = \sqrt{b^2 - a^2}$; ovvero, per la (1),

$$(5) \quad f_2 = \frac{C}{2\pi i} \log \frac{z - ib}{z + ib}.$$

Dalla (5) si ricava

$$(6) \quad w_2 = \frac{df_2}{dz} = \frac{C}{2\pi i} \left[\frac{1}{z - ib} - \frac{1}{z + ib} \right].$$

Chiamando w la velocità complessa nel caso attuale (traslazione con circolazione), per la (3) e (6), si ha

$$(7) \quad w = w_1 + w_2 = t - a^2 t \left[\frac{1}{(z - ib)^2} + \frac{1}{(z + ib)^2} \right] + \frac{C}{2\pi i} \left[\frac{1}{z - ib} - \frac{1}{z + ib} \right].$$

(1) E. RAIMONDI, *Effetto dinamico di una corrente traslatoria che investe un cilindro sottile, in vicinanza di una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. X, serie 6°, 2° sem., fasc. 7-8, 1929.

(2) U. CISOTTI, *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra un cilindro ed una parete piana indefinita*. Questi « Rendiconti », vol. I, serie 6°, 1° sem., fasc. 9, maggio 1925.

Ciò posto, se indichiamo con R_x ed R_y le componenti cartesiane della risultante delle pressioni dinamiche esercitate dalla corrente fluida sugli elementi infinitesimi del profilo γ , e con M il loro momento rispetto all'origine delle coordinate, applicando le formole di Blasius ⁽¹⁾, abbiamo

$$(8) \quad R_y + iR_x = -\frac{i}{2} \int_{\gamma} w^2 d\zeta,$$

dove l'integrazione si deve eseguire in modo da lasciare alla sinistra il cerchio limitato da γ ; mentre

$$(9) \quad M = -\frac{i}{2} \Re \int_{\gamma} w^2 \zeta d\zeta,$$

dove \Re vuol dire « parte reale di ».

La questione pertanto si riduce al calcolo dei residui di w^2 e di $w^2 \zeta$.

Con un semplice procedimento si trova che il residuo di w^2 è

$$(10) \quad \frac{C}{\pi i} \left(t + \frac{C}{4\pi b} \right)$$

e che quello di $w^2 \zeta$ è reale; per cui

$$\int_{\gamma} w^2 d\zeta = 2C \left(t + \frac{C}{4\pi b} \right),$$

$$\int_{\gamma} w^2 \zeta d\zeta = \text{un numero immaginario.}$$

Segue che:

$$R_x = 0, \quad R_y = -C \left(\frac{C}{4\pi b} \right), \quad M = 0,$$

Dunque, le azioni dinamiche esercitate dalla corrente sul contorno γ equivalgono ad una forza unica applicata al centro del cerchio, normale alla parete e diretta verso di essa, la cui intensità è

$$(11) \quad R = C \left(t + \frac{C}{4\pi b} \right).$$

Se si fa tendere b all'infinito, cioè nel caso di un cilindro isolato, la (11) diventa

$$R = Ct,$$

(1) H. BLASIUS, *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik*, « Zeitschr. f. Math. und Phys. », vol. 58 (1910), p. 90.

si ha cioè una conferma del teorema di Kutta-Joukowski⁽¹⁾, come era da prevedersi. La R risulta rivolta verso le y negative, poichè la circolazione ha il senso indicato sulla figura e la traslazione è rivolta secondo le x positive.

La (11) mostra altresì che l'effetto della parete piana è quello di fare aumentare la deviazione di

$$\frac{C^2}{4\pi b};$$

per cui si potrebbe tener conto della presenza della parete rigida, supponendo che essa non vi fosse ed assumendo per modulo della traslazione, invece di t ,

$$t + \frac{C}{4\pi b}.$$

Se la circolazione è nulla, si ritrova⁽²⁾ che $R = 0$; se invece è nulla la traslazione, si ha

$$R = \frac{C^2}{4\pi b},$$

che, in virtù della (1), coincide col risultato trovato dal Cisotti⁽³⁾.

È facile dimostrare⁽⁴⁾ che l'azione dinamica della corrente sulla parete rigida è opposta a quella che la stessa corrente esercita sul cilindro.

Fisica matematica. — *Sopra un'applicazione della relatività alla meccanica quantistica.* Nota di G. WATAGHIN, presentata⁽⁵⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. Nel presente lavoro⁽⁶⁾ vengono dedotte da un unico principio variazionale le principali equazioni differenziali adoperate nella meccanica quantistica e nella teoria della relatività. Si possono considerare come fondamentali per la teoria dei quanti le quattro equazioni di Dirac dell'elettrone e (o del protone). Per poter dedurre oltre a queste equazioni di Dirac le 8 equazioni

(1) JOUKOWSKI, *Aerodynamique*. Paris, Gauthier-Villars, 1916: traduzione dal russo di Drzewieski; cap. VI.

(2) E. RAIMONDI, loc. cit.

(3) U. CISOTTI, loc. cit.

(4) Confronta per esempio: E. RAIMONDI, loc. cit.

(5) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(6) Il contenuto di questa Nota è stato oggetto di una comunicazione fatta dall'autore alla XVIII Riunione d. Soc. per il Progresso delle Scienze il 21 settembre 1929.

(7) «Proc. Roy. Soc. A.», 117, 610, 1928.

di Maxwell e le 10 equazioni gravitazionali occorre assegnare opportunamente la forma della funzione Lagrangiana L che compare nell'enunciato del principio:

$$(1) \quad \delta \int L dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

considerando questa L come funzione delle quattro ψ_i di Dirac, delle quattro componenti del vettore potenziale elettromagnetico φ e dei 10 potenziali gravitazionali $g_{\mu\nu}$. Variando indipendentemente le 18 funzioni citate si possono ottenere le equazioni cercate (ricordando che 4 delle 8 equazioni di Maxwell sono riducibili alle equazioni che definiscono il potenziale φ).

Ci sembra notevole il fatto che la soluzione del problema considerato si presenta in maniera semplice quando si adopera la « teoria unitaria » di Einstein nella forma datale da Levi-Civita⁽¹⁾. Per capirne la ragione ricordiamo, che la primitiva formulazione delle equazioni di Dirac si riferisce ai sistemi Lorentziani della relatività ristretta, e che tutti i tentativi finora fatti di applicare a queste equazioni la relatività generale⁽²⁾ concordano nell'adoperare il reticolo Einsteiniano (Weltgitter) per l'introduzione delle matrici quadridimensionali di Dirac. Le complicazioni che deriverebbero dalla introduzione di coordinate generali sembrano notevoli.

La formulazione delle equazioni di Dirac adottata in questa Nota differisce da quelle già proposte da altri Autori solo per il fatto, che in essa viene usata la modificazione proposta da Levi-Civita della teoria unitaria. La teoria originale di Einstein introduce dei termini correttivi nelle equazioni di Maxwell e in quelle gravitazionali, termini che sembrano per ora ingiustificabili. Con la teoria di Levi-Civita non si muta invece nulla nelle equazioni citate.

Levi-Civita ha fatto vedere che *a priori*, si possono dare interpretazioni geometriche diverse del tensore elettromagnetico $F = \text{Rot } \varphi$. Mi valgo di questa arbitrarietà per introdurre nella maniera più semplice il potenziale elettromagnetico φ , identificandolo col quadrivettore della curvatura geodetica media del reticolo Einsteiniano. Tale interpretazione coincide con quella proposta da Einstein.

Indicando con c_i le componenti del vettore φ secondo la ennupla locale di R_4 , abbiamo⁽³⁾:

$$(1') \quad c_i = \varphi_i \lambda_i^{\nu} \quad \text{e} \quad \varphi_{\mu} = \sum_i e_{ik} c_k \lambda_{k/\mu}.$$

È noto, che la quaderna delle equazioni di Maxwell:

$$\text{Div}^* F = 0$$

(1) Berlin. Ber. 1929, IX, p. 137.

(2) E. WIGNER, « ZS. f. Phys. », 53, 592, 1929; H. WEYL, « Proc. Nat. Ak. », april 1929; « ZS. f. Phys. », 56, 330, 1929; Y. TAMM, « Proc. », Amsterdam, 32, juni 1929; V. FOCK, « C. R. », 189, 25, 1929; « ZS. f. Phys. », 57, 261, 1929.

(3) Adoperiamo le notazioni usate da LEVI-CIVITA, loc. cit.

oppure

$$(2) \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè F ammetta un vettore potenziale φ :

$$F = \text{Rot } \varphi$$

oppure

$$(3) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Le componenti F_{ik} di F secondo l'ennupla del reticolo Einsteiniano si calcolano facilmente:

$$\begin{aligned} F_{ik} &= F_{\mu\nu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu = \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sum_r e_r c_r \lambda_{r/\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sum_s e_s c_s \lambda_{s/\mu} \right) \right] \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu = \\ &= \sum_r e_r \frac{dc_r}{ds_i} \lambda_{r/\nu} \lambda_k^\nu - \sum_s e_s \frac{dc_s}{ds_k} \lambda_{s/\mu} \lambda_i^\mu + \sum_r e_r c_r \lambda_{r/\nu/\mu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu - \sum_s e_s c_s \lambda_{s/\mu/\nu} \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu \end{aligned}$$

donde, facendo uso della formola

$$\gamma_{rki} - \gamma_{rik} = \left[\frac{\partial \lambda_{r/\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \lambda_{r/\mu}}{\partial x_\nu} \right] \lambda_i^\mu \lambda_k^\nu$$

si ottiene:

$$(4) \quad F_{ik} = \frac{dc_k}{ds_i} - \frac{dc_i}{ds_k} + \sum_r e_r c_r (\gamma_{rki} - \gamma_{rik}).$$

Nelle considerazioni seguenti identifichiamo, come si è già detto, il potenziale elettromagnetico φ con il quadrivettore di componenti c_l :

$$(5) \quad c_l = \sum_j e_j \gamma_{jlj}$$

ove γ_{ikl} sono i coefficienti di rotazione di Ricci ⁽¹⁾. Questo vettore (5) misura notoriamente la curvatura geodetica media del sistema delle 4 congruenze Einsteiniane. Come si vede tale interpretazione differisce da quella proposta da Levi-Civita (loc. cit.) ⁽²⁾. Ma nel caso (esaminato da Levi-Civita) di assenza dei campi elettromagnetici e gravitazionali si ha evidentemente anche nella ipotesi (5) la possibilità di scegliere il reticolo delle 4 congruenze in modo, che esso risulti cartesiano e pseudo ortogonali (tutte le γ_{ikl} nulle). In altre parole la ipotesi (5) è compatibile col risultato ottenuto dal Levi-Civita

(1) Questo quadrivettore viene considerato anche da T. Boggio come vettore VQ_2 della omografia di 2° ordine Q_2 , che riassume i coefficienti di rotazione di Ricci, introdotta da BOGGIO nei *Fondamenti di Geometria differenziale* (Zanichelli, Bologna 1930) di imminente pubblicazione.

(2) Ma rimane in accordo perfetto col metodo generale dato da Levi-Civita per l'interpretazione geometrica del tensore F [cfr. (4)].

nella sua interpretazione del tensore F , ma l'interpretazione attuale è più generale nel senso, che ammette anche altre soluzioni.

Consideriamo la Lagrangiana L come somma di tre termini:

$$L = L^{(s)} + L^{(q)} + L^{(g)}$$

ove $L^{(s)}$ è la parte della funzione L corrispondente alle onde elettromagnetiche, la $L^{(q)}$ si riferisce alle equazioni di Dirac, e la $L^{(g)}$ è il termine corrispondente alle equazioni gravitazionali.

Poniamo per $L^{(s)}$ e $L^{(g)}$ le espressioni usuali introdotte nella relatività generale da Lorentz, Hilbert, Klein e Weyl:

$$(7) \quad L^{(s)} = \frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \sum_{k,l} e_k e_l F_{kl}^2$$

ove g è il determinante delle $g_{\mu\nu}$, e $F_{\mu\nu}$ sono le componenti del tensore elettromagnetico F ;

$$L^{(g)} = \sqrt{-g} G$$

ove

$$(8) \quad G = G_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \sum_k e_k G_{kk} = \sum_{h,k} e_h e_k \gamma_{kh, hh}$$

è l'invariante della curvatura Riemanniana (uso le notazioni di Levi-Civita, loc. cit.).

Per $L^{(q)}$ poniamo:

$$(9) \quad L^{(q)} = \sqrt{-g} \sum_{h,k,l} \left[e_h e_k e_l \alpha_{hk}^l \tilde{\psi}_k \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \nabla_l + \frac{e}{c} c_l \right) \psi_h - m c e_k e_h \alpha_{kh}^l \tilde{\psi}_k \psi_h \right]$$

ove le ψ_k sono le 4 funzioni di Dirac, le $\tilde{\psi}_k$ sono le funzioni complesse coniugate delle ψ_k ; α_{kh}^l sono le componenti delle matrici di Dirac (a 4 orizzontali e 4 colonne), $e_0 = 1$, $e_x = e_y = e_z = -1$, e ∇_l è l'operatore di derivata covariante nella direzione l introdotto per le ψ_k da Fock e Weyl ⁽¹⁾.

Si noti che le $L^{(s)}$, $L^{(q)}$, $L^{(g)}$ appaiono come delle densità tensoriali (prodotti di invarianti per $\sqrt{-g}$). Abbiamo già detto che dovremo variare la L nella (1) rispetto alle c_l le ψ_k e le $g^{\mu\nu}$, considerando tutte queste funzioni come indipendenti ⁽²⁾.

Esaminiamo anzitutto le equazioni che si ottengono variandone le c_l .

(1) V. FOCK, l. c.; WEYL, « Zeitschr. f. Phys. », 56, 330, 1929. Le leggi particolari di trasformazione che valgono per le ψ_k e per le matrici di Dirac inducono a definire ∇_l come l'operatore:

$$\nabla_l = \frac{d}{ds_l} - \frac{1}{4} \sum_{n,r,s} e_r e_s \alpha_{rn}^r \alpha_{sn}^s \gamma_{rs l}.$$

(2) È possibile dimostrare che la L si può far dipendere in definitiva soltanto dalle quantità ψ , $\bar{\psi}$, $g_{\mu\nu}$ che vengono variate,

Un facile calcolo fa vedere, che la derivata Lagrangiana di $L^{(s)}$ rispetto a c_l si riduce alla componente l^{ma} del vettore $\text{Div } F$, cioè a

$$\chi_l = \sum_k e_k \frac{dF_{lk}}{ds_k} - \sum_{h,k} e_h e_k (\gamma_{lhk} F_{hk} + \gamma_{khk} F_{lh}).$$

Queste espressioni sono notoriamente le componenti locali del vettore di cui le componenti controvarianti sono:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Se si varia rispetto a c_l la $L^{(q)}$, si ottengono le espressioni:

$$(10) \quad \sqrt{-g} \frac{e}{c} e_l \sum_{h,k} e_h e_k \alpha_{kh}^l \tilde{\psi}_k \psi_h = S_l$$

che secondo la teoria di Dirac devono essere interpretate come le componenti « reticolari » (Beinkomponenten) del quadrivettore S della *densità* (S_0) e del *flusso* (S_1, S_2, S_3) degli elettroni. Precisamente, $S_0 d\tau$ indica la probabilità di trovare nel volume $d\tau$ un elettrone, e la componente di (S_1, S_2, S_3) normale ad una superficie σ misura la probabilità dell'evento, che l'unità di questa superficie venga attraversata da un elettrone.

Concludendo, se nella (1) si varia rispetto alle c_l si ottengono dalla (1) le classiche equazioni Maxwelliane:

$$(10') \quad \text{Div } F = S$$

ove S è il vettore della corrente elettrica (Viererstrom) con le componenti S_i date dalle (10) conformemente alla teoria di Dirac⁽¹⁾.

Variando nella (1) le $\tilde{\psi}_k$ ⁽²⁾, che compaiono soltanto nella $L^{(q)}$ si ottengono facilmente le equazioni:

$$(11) \quad \sum_{h,l} \left[e_h e_l \alpha_{kh}^l \left(\frac{h}{2\pi i} \nabla_l + \frac{e}{c} c_l \right) \psi_h - m c e_h \alpha_{kh}^l \psi_h \right] = 0$$

che sono precisamente le 4 equazioni di Dirac⁽³⁾.

In quanto alle equazioni gravitazionali, non sono riuscito ad ottenerle senza l'uso dei potenziali $g^{\mu\nu}$. Queste equazioni possono essere derivate

(1) Il vettore $\text{Div } F$ (secondo la notazione di Laue) viene spesso denominato gradiente dell'omografia F , secondo le notazioni introdotte da Burali-Forti e Marcolongo.

(2) Le $\tilde{\psi}_k$ sono le coniugate delle ψ_k . È indifferente per il risultato di variare le une o le altre. Variando le ψ_k si ottengono le equazioni di Dirac coniugate delle equazioni (11).

(3) La forma (11) di queste equazioni differisce alquanto da quella usata da Wigner e da Fock a causa del significato geometrico attribuito al vettore φ . È importante osservare che le equazioni (11) sono covarianti sia rispetto a un cambiamento di coordinate sia rispetto a un cambiamento del reticolo.

dalla (1) variandone $g^{\mu\nu}$ col procedimento solito. Si deducono anzitutto le equazioni Einsteiniane nella loro forma covariante:

$$(12) \quad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G \cdot g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$$

ove le componenti $T_{\mu\nu}$ del tensore energetico risultano composte di due termini:

$$T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$$

il primo, proveniente da $L^{(q)}$, corrisponde al tensore energetico relativo alla materia ($\tau_{\mu\nu}$ è eguale alla derivata Lagrangiana di $L^{(q)}$ rispetto a $g^{\mu\nu}$); il secondo, ottenuto da $L^{(s)}$ in modo analogo, risulta eguale:

$$\sigma_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left[F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} g^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right].$$

Dalle (12) si otterranno facilmente le equazioni gravitazionali riferite alla ennupla locale di R_4 :

$$(12') \quad G_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} G = k T_{ik}.$$

Resterebbe da scrivere in modo esplicito l'espressione di $\tau_{\mu\nu}$. A noi basterà, data la complessità di questa formola, di indicare la via con cui si può eseguire il calcolo. La $L^{(q)}$ nella (9) appare come prodotto di $\sqrt{-g}$ per un'espressione invariante nella quale entrano le componenti di vari tensori locali (lokale Beintensoren). Questo invariante è facilmente trasformabile in un'espressione, in cui compaiono soltanto le coordinate generali x_ρ , le $g^{\mu\nu}$ e le derivate prime $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho}$. Basta allora calcolare la derivata Lagrangiana di $L^{(q)}$ rispetto a $g^{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial L^{(q)}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial}{\partial x_\rho} \frac{\partial L^{(q)}}{\partial \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\rho} \right)}$$

per ottenere l'espressione cercata di $\tau_{\mu\nu}$.

§ 2. Sebbene la riduzione esposta nel § 1 del complesso delle equazioni differenziali, usate nella teoria dei quanti e nella relatività, a un principio variazionale non porti con sè nulla di sostanzialmente nuovo, tale deduzione mi è sembrata opportuna perchè serve ad illuminare in una maniera particolarmente chiara le tre tesi seguenti:

1° I campi elettromagnetici della teoria maxvelliana devono essere considerati come derivanti dalla distribuzione del quadrivettore corrente S , che caratterizza una distribuzione *media* degli elettroni e dei protoni, o meglio

caratterizza la distribuzione delle relative *probabilità*, unita alla assegnazione del numero totale di elettroni coinvolti nel fenomeno che si considera.

2° I campi gravitazionali vengono determinati anche da certe distribuzioni di elettroni e quanti di luce (vedi il significato di $T_{\mu\nu}$). I valori delle $g_{\mu\nu}$ vengono a dipendere, in base alle (12), dalle funzioni di Dirac e dalle onde elettromagnetiche, e acquistano un significato puramente statistico.

3° Le leggi, alle quali ubbidiscono le funzioni di Dirac ψ_k e i potenziali elettromagnetici c_i , risultano dipendenti dai potenziali gravitazionali $g_{\mu\nu}$. Il ciclo si chiude perchè questi potenziali $g_{\mu\nu}$, influendo sulle ψ_k e c_i determinano a loro volta il comportamento statistico dei corpuscoli. Si giunge così alla conclusione: i tre gruppi di equazioni non possono essere trattati separatamente, se non a condizione di trascurare l'influenza reciproca fra i fenomeni rappresentati da questi gruppi. Per i fenomeni atomici viene generalmente trascurata l'influenza dei campi gravitazionali.

È stato giustamente rilevato da Weyl e Fock, quale importanza potrà avere l'applicazione della relatività generale a questi fenomeni. Un risultato sembra già acquisito: i potenziali gravitazionali $g_{\mu\nu}$ hanno alla pari di $F_{\mu\nu}$ e di ψ_k un significato puramente statistico.

Fisica matematica. — *Sul complesso 4^d della molecola di Elio.* Nota di E. FERMI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sulla variabilità di Y Canes Venatici.* Nota ⁽¹⁾ di M. MEROLA, presentata dal Corresp. A. BEMPORAD.

Questa stella è riportata nel Catalogo di variabili del Prager ⁽²⁾ con le indicazioni seguenti:

$\alpha = 12^h 38^m 18^s$ (1855)	Periodo ?	Spettro N _b
$\delta = + 46^\circ 14'.0$ (1855)	Mass. luce 4.8 min. luce 6.0	Ep. mass. 1927-28
		sconosciuta

I vari osservatori in generale confermano il sospetto di variabilità emesso la prima volta dallo Schmidt nel 1873 e mettono in evidenza la irregolarità delle variazioni di luce con un'amplitudine media intorno a una grandezza (Schmidt, Luizet, Pickering, Săfaříks, ecc.).

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1929.

(2) R. PRAGER, *Katalog und ephemeriden veränderlicher Sterne für 1927*. Berlin 1926. Idem pel 1928.

Il periodo, solo da qualcuno assegnato, non sarebbe costante e mentre Schmidt ritiene per esso il valore medio 386^d per le osservazioni fino al 1876, Luizet dà, per le osservazioni dal 1898 al 1903, un periodo medio di 285^d . Hornig infine troverebbe, per le sue osservazioni del 1912, un periodo di circa $3^d.5$, risultato non confermato da Hoffmeister⁽¹⁾.

Le nostre osservazioni che si estendono dall'8 giugno al 17 settembre del 1927 e dal 24 marzo all'8 settembre del 1928 mostrano un massimo ben pronunziato a 1928 luglio $27.3 = 2425455.3$ d. J. ($5^m.05$) e due minimi rispettivamente a 1927 agosto $3.4 = 2425096.4$ d. J. ($6^m.13$) e 1928 ottobre $15.7 = 2425535.7$ d. J. ($6^m.07$) insieme con fluttuazioni irregolari che non lasciano scorgere alcun periodo.

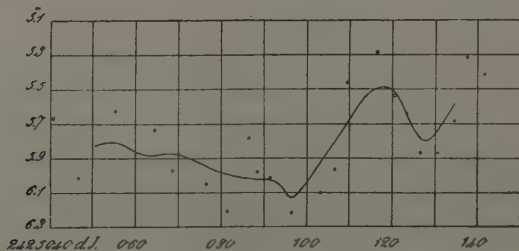
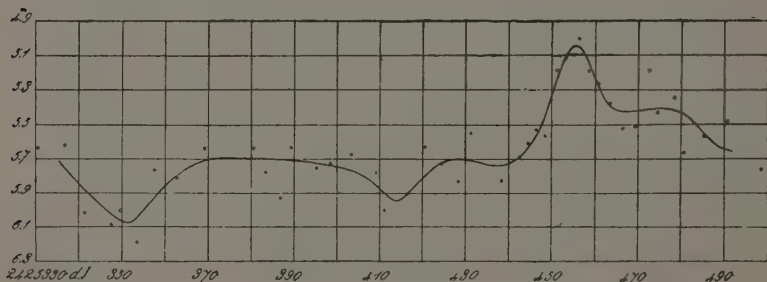
Risulta confermata la colorazione rossa della variabile che da noi è precisamente stimata R della scala di Potsdam.

Stelle di confronto (Draper).

BD + $45^\circ.1847$ $\alpha = 13^h 1^m 22^s$ $\delta = +45^\circ 48'.2$ (1900) $5^m.72$ Spettro K₀

» + $45^\circ.1805$ $\alpha = 12^h 33^m 48^s$ $\delta = +45^\circ 46'.1$ (1900) $7^m.09$ » F₃

Dai nostri confronti risulta per la seconda stella la grandezza, ammessa per le riduzioni, 7.02.



(1) G. MÜLLER und E. HARTWIG, *Geschichte und Literatur des Lichtwechsels*. I Band. Leipzig 1918.

1927 giugno 8-settembre 17		1928 marzo 24-giugno 30		1928 luglio 3-settembre 8	
J. D. T. M. G.	Gr.	J. D. T. M. G.	Gr.	J. D. T. M. G.	Gr.
2425040.4	5.66	2425330.3	5.63	2425431.4	5.55
047.4	6.02	336.3	5.62	438.4	5.83
055.4	5.62	341.3	6.01	442.4	5.69
064.4	5.74	347.4	6.08	444.3	5.90
068.4	5.97	349.4	6.00	446.3	5.53
076.4	6.05	353.3	6.19	448.3	5.57
081.5	6.11	357.4	5.77	451.3	5.19
086.4	5.78	362.3	5.82	453.3	5.12
088.4	5.98	369.3	5.64	456.4	5.00
091.4	6.02	380.3	5.64	458.4	5.19
096.4	6.22	383.3	5.78	460.4	5.27
103.4	6.10	386.4	5.93	463.4	5.38
106.3	5.97	389.4	5.64	466.4	5.53
109.3	5.47	395.4	5.76	469.3	5.52
116.4	5.28	398.4	5.73	472.3	5.18
120.3	5.54	403.4	5.72	474.3	5.44
123.3	5.64	409.4	5.78	478.3	5.35
126.3	5.87	411.4	6.00	480.3	5.67
130.3	5.87	416.3	5.91	485.4	5.57
134.3	5.68	420.3	5.63	490.3	5.48
137.3	5.31	424.3	5.74	498.3	5.76
141.3	5.48	428.3	5.84		

In una prima riduzione delle osservazioni del 1927 abbiamo fatto anche uso della stella di confronto BD + 46°.1814, 6^m.94, Spettro A₂ (Draper), poi abbandonata per alcuni scarti rilevanti a cui dava luogo. Notevole il fatto che dalle nostre osservazioni risulta per tale stella la gr. 6.89 (quando si scelga a riferimento la BD + 45°.1847) mentre la « Photometrische Durchmusterung » di Potsdam fornisce per la medesima la grandezza 7.32

Geodesia. — *Nuova determinazione della deviazione locale in latitudine e in longitudine all'Osservatorio Astronomico di Palermo.*
Nota di P. TORTORICI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ANGELITTI.

I. Il prof. Venturi nel 1889-90 collegò l'Osservatorio Astronomico di Palermo alla rete di primo ordine dello Stato usando un metodo indiretto.

Essendo visibili da Palermo tre punti di primo ordine della rete e precisamente Monte Alfano, Monte Pellegrino, Monte Cuccio, il prof. Venturi, fissata la base Monte Alfano-Monte Pellegrino e osservando da tre stazioni (M. Pellegrino, Osservatorio Valverde, Torretta della Martorana) costruì e calcolò una piccola rete e dedusse così indirettamente le coordinate geografiche ellissoidiche dell'Osservatorio e la deviazione locale in latitudine e longitudine.

Io ho pensato di procedere allo stesso collegamento in maniera diretta stazionando in due almeno dei suddetti punti di primo ordine ed all'Osservatorio, cercando di superare quelle difficoltà che consigliarono il Venturi a rinunciare a questa ultima stazione.

Avevo scelto dapprima, come vertici del triangolo da determinare: M. Pellegrino, M. Alfano e l'Osservatorio (centro della grande cupola).

Avendo trovato, nel settembre del 1928, a M. Alfano soltanto qualche traccia della piramide indicante il punto di primo ordine, ricercai il segnale ma non trovai nulla, all'infuori di un moncone di canna, interrato a qualche profondità.

Comunque, scelto questo moncone come centro, vi feci costruire sopra un pilastro per stazionarvi, salvo poi a determinare la eccentricità di questo pilastro rispetto al punto di primo ordine.

Le pessime condizioni di reciproca visibilità tra M. Alfano e l'Osservatorio, dopo lunghi e ripetuti tentativi che condussero a scarsi risultati, consigliarono di abbandonare la scelta di M. Alfano come uno dei vertici e sostituirla con M. Cuccio.

Il Venturi, nella sua Monografia ⁽²⁾, riferisce di aver mirato su M. Cuccio la piramide segnale di 1° ordine. Oggi quella piramide non esiste più e, dalle indagini da me fatte, risulta che venne abbattuta dallo Zona per co-

(1) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(2) A. VENTURI, *Determinazione della deviazione locale in latitudine e in longitudine dell'Osservatorio di Palermo*. «Giornale di Scienze Naturali ed Economiche», vol. XX, Palermo 1890.

struire al posto di essa, sulla vetta del monte, un rifugio e che allora (forse nel 1901) il segnale si fece coincidere con una colonnina posta sul colmo del frontone orientale del rifugio stesso. Le coordinate geografiche di questo segnale sono precisamente quelle registrate dallo Istituto Geografico Militare.

Disgraziatamente però, alcuni anni or sono, il fulmine abbattè il rifugio e, quando questo venne ricostruito, non si pensò più al segnale di 1° ordine del quale non rimase traccia alcuna!

In tanta incertezza, pensai di assumere, almeno in via provvisoria, come segnale il vertice più alto del frontone orientale del nuovo rifugio, ritenendo probabile che questo sia stato costruito identico al primo.

Le misure dimostrarono che effettivamente il vertice suddetto, se non coincide proprio col punto di primo ordine disperso, deve essergli vicinissimo.

È da sperare che il benemerito Istituto Geografico Militare voglia provvedere a che siano ripristinati, con tutta la sicurezza desiderabile, i due segnali di M. Alfano e di M. Cuccio, come pure che sia mantenuto in ordine quello di M. Pellegrino ove esigenze di stabilità hanno costretto prima a sostituire l'asta semaforica che fa da segnale e successivamente a rinforzarla mediante venti.

Certo è che attualmente l'asta non è verticale e, quindi, non è nelle condizioni più favorevoli per funzionare da segnale di primo ordine.

Sento il dovere di esprimere i più vivi ringraziamenti al chiarissimo prof. Angelitti, direttore dell'Osservatorio, per la cortese ospitalità accordatami permettendomi di fare tutte le misure e le osservazioni che si resero necessarie, nonchè al chiarissimo prof. C. Mineo, direttore dell'Istituto di Geodesia, che cortesemente mi ha permesso di adoperare gli strumenti dell'Istituto e mi è stato largo di suggerimenti e consigli.

2. In questa Nota preliminare io esporrò le conclusioni alle quali sono pervenuto. Aggiungerò ancora che, avendo notato come collimando la cupola (sia dimezzandola col filo verticale del reticolo, sia collimando i due bordi di essa e prendendo la media delle due letture) gli errori di fase sono notevolissimi, e non essendo fissato nell'interno della cupola stessa alcun punto particolare che fosse consigliabile assumere come vertice del triangolo, stimai migliore partito prendere come vertice il centro del pilastro a nord della grande cupola e di riferire a questo punto tutte le deduzioni.

Pertanto i vertici del triangolo che nel seguito considero sono:

1° Punto di 1° ordine a Monte Pellegrino (asta semaforica).

2° Punto di 1° ordine a Monte Cuccio (ritenuto coincidente col vertice del frontone orientale del rifugio).

3° Centro del Pilastro a nord della grande cupola dell'Osservatorio.

Questi tre punti saranno indicati nel seguito con P, C, O, rispettivamente. Dalle pubblicazioni dell'Istituto Geografico Militare si rilevano le coordinate geografiche φ, ω dei punti P, C che qui riportiamo.

	C	P
$\varphi =$	$38^{\circ}.6'.48''.646$	$38^{\circ}.9'.51''.707$
$\omega =$	$4^{\circ}.20'.38''.96$	$4^{\circ}.25'.56''.808$

Le longitudini (ambidue orientali) sono computate da Genova (Istituto Idrografico della R. Marina) e, inoltre, per la distanza CP valutata in metri, si ha:

$$\overline{CP} = 9578,66.$$

I risultati delle osservazioni da me fatte, mediante un teodolite Starke e Kammerer di 27 cm. di diametro sono i seguenti:

Stazione all'Osservatorio (in centro):

L'azimut Pellegrino-Cuccio, cioè l'angolo PO_1C è stato dedotto come media di 26 coppie di osservazioni coniugate:

$$\widehat{PO_1C} = 87^{\circ}.35'.2''.27$$

e, denotando (ora in seguito) con μ_0 l'errore quadratico della media si trovò:

$$\mu_0 = \frac{1''.972}{\sqrt{26}} = 0''.38.$$

Con quella approssimazione consentita dalle circostanze locali si fissò inoltre, il centro O della cupola equatoriale dell'Osservatorio e si misurarono, per eventuali riduzioni, la distanza OO_1 e l'angolo OO_1P . Si ottenne:

$$\overline{OO_1} = 5^m.226 \quad \widehat{OO_1P} = 166^{\circ}.31'.22''.$$

Stazione a Monte Cuccio (ex-centro):

Detto C_1 il punto stazione si misurò l'angolo O_1C_1P . Come media di 26 coppie di letture coniugate si ottenne:

$$\widehat{O_1C_1P} = 39^{\circ}.1'.58''.70 \quad (\mu_0 = 0''.71).$$

Per l'eccentricità CC_1 e l'angolo CC_1P si trovò:

$$\overline{CC_1} = 5^m.557 \quad \widehat{CC_1P} = 131^{\circ}.51'.55''.$$

Lo strumento fu collocato sopra un tripode della Casa Bamberg gentilmente prestato dal cap. dr. Pietro Gallina dell'Istituto Geografico Militare qui in Sicilia per determinazioni gravimetriche. Questo tripode ha effettivamente corrisposto a quelle condizioni di stabilità assicurate dalla casa costruttrice.

Stazione a Monte Pellegrino (ex-centro):

Si stazionò su un robusto pilastro fatto costruire dal prof. Cicconetti ⁽¹⁾. Detto P_1 il centro del pilastro, per l'angolo CP_1O_1 , come media di 26 coppie di letture coniugate si ottenne:

$$\widehat{CP_1O_1} = 53^\circ. 24'. 6''. 47. \quad (\mu_0 = 0,302)$$

e gli elementi di riduzione in centro essendo ora:

$$\overline{PP_1} = 3^m. 076 \quad \overline{PP_1C} = 92^\circ. 28'. 23''.$$

3. Per le riduzioni in centro, in linea di prima approssimazione, deducendolo dai risultati del Venturi, si assunse come lunghezza di PO m. 6040,12 ed allora, con due successive approssimazioni, si ottennero per gli angoli ridotti in centro e per i lati incogniti del triangolo O_1CP i valori:

$$\widehat{CO_1P} = 87^\circ. 35'. 2''. 27$$

$$\widehat{PCO_1} = 39^\circ. 0'. 51''. 53 \quad \overline{CO} = 7696^m. 593$$

$$\widehat{O_1PC} = 53^\circ. 24'. 6''. 37 \quad \overline{PO} = 6035^m. 072.$$

Una terza approssimazione si dimostrò inutile.

Per l'eccesso sferico Δ del triangolo suddetto si trovò:

$$\Delta \cong 0''. 12$$

e quindi, dati gli errori quadratici nelle medie delle osservazioni, è da riguardare il triangolo stesso come piano.

La somma dei tre angoli ridotti è:

$$180^\circ. 00'. 00''. 17$$

con un errore di chiusura del triangolo molto più piccolo di quanto gli errori quadratici medi potessero far sperare.

Relativamente a questi errori quadratici medi è da osservare che essi non sono eccessivamente grandi, date le mire certamente non ideali (costituite dal vertice del frontone sul rifugio a Monte Cuccio, dall'asta semiaforica non verticale, e da una croce nera in campo bianco all'Osservatorio).

4. Con gli elementi suddetti si poterono trasportare le coordinate geodetiche da P e da C in O_1 . Dette φ_1 e ω_1 la latitudine e la longitudine ellissoidica in O_1 , adoperando gli sviluppi procedenti per le potenze dell'arco di geodetica, si trova:

(1) Cfr. G. CICONETTI, *Determinazione astronomica di azimut eseguita sul M. Pellegrino nel 1920*. «Rendiconti Accademia dei Lincei», vol. XXXI, fasc. 8º, 1922.

	Da M. Pellegrino	Da M. Cuccio
$\varphi_1 =$	$38^{\circ}.6'.35''.956$	$38^{\circ}.6'.35''.954$
$\omega_1 =$	$4^{\circ}.25'.54''.546$	$4^{\circ}.25'.54''.541$

L'azimut ellissoidico della geodetica PO_1 è, in P, $180^{\circ}.31'.31''.94$ trasportando in O_1 si trova per l'azimut $180^{\circ}.31'.30''.537$ mentre l'azimut della geodetica CO_1 in C è $92^{\circ}.53'.13''.540$ e trasportando in O_1 si trova $92^{\circ}.56'.28''.268$. La differenza degli azimut delle geodetiche O_1P , O_1C in O_1 è dunque $87^{\circ}.35'.2''.269$ cioè precisamente l'angolo PO_1C .

5. La latitudine astronomica dell'Osservatorio di Palermo è, secondo la determinazione del Piazzì:

$$38^{\circ}.06'.44''$$

riferita al centro R della cupola meridionale (cerchio di Ramsden).

Avendosi:

$$\overline{RO_1} = 15^m.321 \quad \widehat{PO_1R} = 178^{\circ}.35'.34'',$$

assumendo, inoltre, come è lecito, per direzione nord in R quella in O_1 e trasportando in O_1 , per la latitudine astronomica in O_1 si trova:

$$38^{\circ}.06'.44''.49.$$

Ne segue che in O_1 , la differenza D_φ fra la latitudine astronomica e la geodetica avanti trovata, cioè la deviazione in latitudine in O_1 , risulta:

$$D_\varphi = 8''.54.$$

6. La longitudine astronomica dell'Osservatorio, secondo le determinazioni di Tacchini-Nobile è da Genova:

$$4^{\circ}.26'.3''.575$$

e, quindi, la differenza fra questa e la longitudine geodetica di O_1 risulta di $9''.029$.

Denotando con D_ω la deviazione in longitudine in O_1 si ha:

$$D_\omega = 9''.029 \cos \varphi_1$$

e quindi traesi:

$$D_\omega = 7''.10.$$

7. Infine, con le stesse notazioni del Venturi, denotando con θ l'an-

golo di deviazione del filo a piombo in O_1 e con ψ l'azimut del piano di deviazione, poichè si ha:

$$\theta \cos \psi = D_{\varphi} = 8''.54,$$

$$\theta \sin \psi = D_{\omega} = 7''.10,$$

si deduce:

$$\theta = 11''.10 \quad \psi = 39^{\circ}.44'.20''.$$

Il valore trovato per la deviazione del filo a piombo non è molto discosto da quello trovato dal Venturi ($12''.18$) ma considerevolmente minore di quello trovato dal Venturi ($47^{\circ}.57'$) è l'azimut ora calcolato.

Fisica sperimentale. — *L'effetto Hall con elettrodi estesi.*
Nota III ⁽¹⁾ di F. SCANDONE, presentata dal Socio A. GARBASSO.

1. In due Note precedenti ⁽²⁾ abbiamo studiato l'effetto Hall in una lamina rettangolare, con elettrodi primari estesi a due lati opposti di essa, ed elettrodi secondari estesi spostati comunque rispetto alla posizione centrale. Abbiamo trovato che l'effetto era della forma

$$(1) \quad V = R f\left(\frac{a}{b}, x\right) \frac{HI}{\epsilon}$$

ove R, H, ϵ , hanno i soliti significati, $\frac{b}{a}$ è il rapporto dei lati della lamina, x è lo spostamento degli elettrodi secondari dalla posizione centrale.

La f era della forma:

$$(2) \quad f\left(\frac{b}{a}, x\right) = \frac{a}{b} \frac{[\Phi(1) - \Phi(x)]}{\pi k}$$

ove la Φ è data da

$$(3) \quad \Phi(z, k) = \int_0^z \frac{\log \frac{1-3}{1+3} \frac{1+k\beta}{1-k\beta}}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k^2\beta^2)}} d\beta$$

abbiamo già dato il modo di calcolare facilmente la $\Phi(3)$ e quindi la f , e ottenuti i grafici relativi, mi propongo ora di darne una verifica sperimentale.

(1) Pervenuta all'accademia il 1° agosto 1929.

(2) E. PERSICO e SCANDONE F., *L'effetto Hall con elettrodi estesi*, Nota I e II, « Rend. Accad. Lincei ».

2. Il metodo da me usato in queste esperienze era quello di Koláček che consiste nel sostituire uno degli elettrodi secondari con due elettrodi simmetricamente disposti rispetto alla metà del lato e chiusi sopra un potenziometro, il cursore del quale costituisce il secondo elettrodo (fig. 1). Questo sistema permette di regolare il potenziometro in assenza di campo, in modo da annullare le differenze di potenziale accidentali dovute alle inevitabili dissimmetrie dell'esperienza. Nell'usare però questo metodo occorre rendersi ben conto della perturbazione apportata dalla presenza dell'elettrodo secondario. Sia ξ l'ascissa di uno degli elettrodi secondari, ossia 2ξ la distanza che separa i due conduttori del doppio elettrodo; se l'esperienza fosse perfettamente simmetrica, il potenziale raccolto dal cursore sarebbe la media dei potenziali in N ed M. Poichè gli spostamenti del cursore dal centro servono a compensare gli effetti accidentali, la media suddetta ci rappresenta,

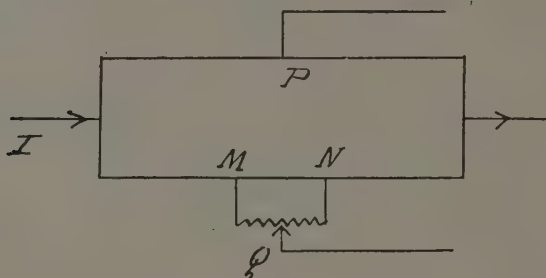


Fig. 1.

a meno di infinitesimi di ordine superiore, il potenziale del secondo elettrodo dovuto all'effetto Hall. Ripetendo la teoria svolta nella Nota precedente, si trova facilmente, per l'effetto Hall, la formula:

$$V_P - V_Q = \frac{a}{b} \frac{\Phi(1) - \frac{1}{2} \Phi(\xi)}{\pi k} R \frac{HI}{\varepsilon}$$

ossia ponendo

$$f\left(\frac{a}{b}, \xi\right) = \frac{a}{b} \frac{\Phi(1) - \frac{1}{2} \Phi(\xi)}{\pi k}$$

si ha

$$V_P - V_Q = R f\left(\frac{b}{a}, \xi\right) \frac{HI}{\varepsilon}$$

Se $\xi \ll 1$ si ha analogamente alla (16) della nota precedente la

formula

$$(7) \quad \frac{f\left(\frac{b}{a}, \xi\right)}{f\left(\frac{b}{a}, 0\right)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{(k-1)}{\Phi(1, k)} x^2$$

che riduce le misure fatte con elettrodo di Kolacek a misure fatte con elettrodo unico.

3. La disposizione del circuito era quella solita e non richiede spiegazioni. Degli inversori permettevono di invertire tanto il campo che la corrente primaria. Il campo H era fornito da una elettrocalamita capace di

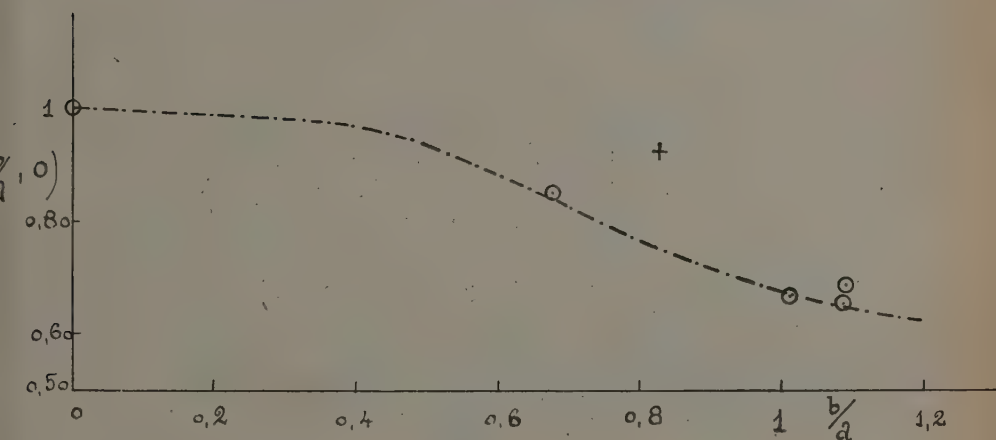


Fig. 2.

fornire fino a 10.000 Gauss ed è stato tarato con un fluxometro in modo da conoscere il campo mediante la lettura dell'amperometro. Il potenziometro era fornito di una scala graduata ed il cursore era fornito di un indice, ed il tutto tarato in modo che leggendo la posizione del cursore si conosceva, dalla semplice consultazione di un grafico, la resistenza inserita nel circuito secondario. La corrente primaria, letta al milliampometro era fornita da una batteria di accumulatori di due elementi. Il galvanometro aveva una piccolissima resistenza interna: $R_G = 2.06 \text{ Ohm}$.

La lamina sperimentata era di bismuto ottenuta per fusione, usando le solite cautele per ottenerla più omogenea ed a struttura più fine che fosse possibile, ed era inizialmente di dimensioni 2×3 centimetri circa, e di spessore 0.048 centimetri.

Per ogni valore del campo si facevano quattro misure, invertendo il campo e la corrente primaria. Delle misure fatte a corrente primaria in-

vertita si fa la semidifferenza per liberarsi dagli effetti quadratici, e così pure per le misure a campo invertito per eliminare le dissimetrie del campo.

Per ogni rapporto dei lati del rettangolo ho fatto 28 misure, quattro per ognuno dei sette valori del campo corrispondenti ai sette bottoni del reostato del circuito dell'elettrocalamita. Come era da aspettarsi per il fatto che la legge fondamentale dell'effetto Hall vale nel bismuto solo per campi deboli, i valori trovati concordano tanto meglio con l'esperienza quanto più debole è il campo: noi riassumiamo qui i risultati per campi di circa 3.000 Gauss.

$\frac{b}{a}$		$f\left(\frac{b}{a}, \xi\right)_{\text{oss.}}$	$f\left(\frac{b}{a}, \xi\right)_{\text{teor.}}$	scarto	err. rel. %
0.676	0.19	0.823	0.825	0.002	0.24
0.832	0.237	0.737	0.126	0.128	17
1.012	0.698	0.549	0.560	0.011	1.96
1.104	0.698	0.547	5.550	0.003	0.546
1.107	0.325	0.682	0.645	0.037	5.74

Come si vede salvo per il caso $\frac{b}{a} = 0.832$ l'accordo con l'esperienza è ottimo. Per campi superiori ai 3.500 Gauss si vede che i valori tendono a scostarsi da quelli teorici, è però notevole che sopra i 5000 Gauss lo scarto tende nuovamente a diminuire. Se noi riduciamo i valori precedenti al caso dell'elettrodo unico, mediante le formule stabilite si ha:

$\frac{a}{b}$		$f\left(\frac{b}{a}, \xi\right)$	$f\left(\frac{b}{a}, 0\right)_{\text{sp.}}$	$f\left(\frac{b}{a}\right)_{\text{teor.}}$	err. %
0.676	0.19	0.823	0.852	0.835	1.7
0.832	0.237	0.865	0.923	0.752	17.1
1.012	0.698	0.549	0.667	0.675	0.8
1.104	0.698	0.547	0.662	0.640	2.2
1.107	0.326	0.682	0.692	0.640	5.2

Per il terzo ed il quarto valore non si è potuto adoperare la formula (7) perchè la ξ è troppo grande, ma si è fatta la correzione mediante i grafici pubblicati nella Nota precedente.

Il confronto fra teoria ed esperienza è mostrato con evidenza dal grafico annesso (fig. 2). Con questo ritengo lo scopo del lavoro completamente raggiunto essendo la teoria svolta senza alcun dubbio concorde con l'esperienza.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati* ⁽¹⁾. Nota V ⁽²⁾, di L. MASCARELLI e D. GATTI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Il rapido succedersi di pubblicazioni sul gruppo del difenile dimostra che esso acquista interesse sempre crescente. I derivati del difenile sono d'ordinario di non facile preparazione. Riportiamo i risultati conseguiti con le prove da noi fatte per avere alcuni derivati o-o'- bisostituiti, i quali, come risulta dalla letteratura e da nostra esperienza, non sempre si possono ottenere seguendo i soliti procedimenti che si applicano per avere i corrispondenti derivati del benzene.

I procedimenti finora da noi studiati sono i seguenti:

1° Riduzione parziale dell'o-o'-di-nitro-difenile, dell'o-o'-di-nitro-ditolile e del m-m'-di-nitro-difenile;

2° Diazotazione parziale del o-o'-di-amino-difenile e successiva applicazione della reazione di Sandmeyer;

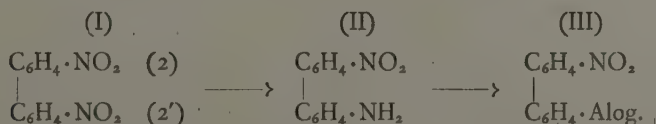
3° Azione del cloruro di tionile sull'o-o'-di-nitro-difenile e su altri di-nitro-difenili;

4° Scomposizione col calore di alcuni sali di difenilenjodonio.

Riferiamo per ora i risultati dei primi due procedimenti.

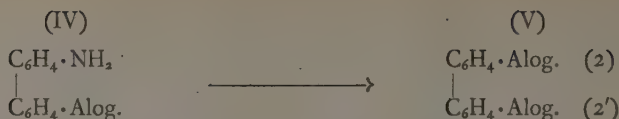
I. RIDUZIONE PARZIALE DELL'O-O'-DI-NITRO-DIFENILE, DELL'O-O'-DI-NITRO-DITOLILE E DEL M-M'-DI-NITRO-DIFENILE. (in collaborazione con E. Jona).

Volevamo ridurre uno solo dei nitrogruppi di questi derivati del difenile (I) per ottenere da prima l'o-nitro-o'-amino-composto (II), dal quale, applicando la reazione diazoica e poi quella di Sandmeyer, si pensava di arrivare agli o-nitro-o'-alogeno-derivati (III), indi, per nuova riduzione, agli o-amino-o'-alogeno-derivati (IV) e finalmente agli o-o'-di-alogeno-derivati (V):



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1929. — Nota IV: «Rend. R. Accad. Scienze», Torino, 64, 31 e «Gazz. chim. ital.», 58, 865 (1928).



È noto infatti che col solfuro di ammonio si riesce con facilità a ridurre parzialmente il p-p'-di-nitro-difenile⁽¹⁾ per avere il p-nitro-p'-amino-difenile cristallino; noi però non siamo finora riusciti ad avere sostanze cristalline nella analoga riduzione dell'o-o'-di-nitro-difenile, dell'o-o'-di-nitro-p-p'-dimetil-difenile (o-o'-di-nitro-ditolile) e del m-m'-di-nitro-difenile. Ottenemmo sempre dei prodotti oleosi che hanno assai poca tendenza a cristallizzare, che purificammo attraverso ai loro derivati acetilici e che, anche da questi, riottenemmo sotto forma oleosa.

Stiamo ora applicando la reazione diazoica a questi prodotti oleosi per continuare lo studio secondo lo schema sopra riportato, e, sebbene i primi risultati avuti parlino in favore di un andamento normale delle reazioni, ci riserviamo di ritornare fra poco sull'argomento.

Anche le prove di riduzione da noi fatte con una soluzione titolata di cloruro stannoso, adoperandone la quantità calcolata per ridurre un solo nitrogruppo, ci hanno dato prodotti oleosi. Tentammo ancora la riduzione con ammoniaca alcoolica, ma con risultati negativi; solo dopo che tale prova era stata fatta venimmo a conoscenza che Burton e Kenner⁽²⁾ già notarono incidentalmente che l'o-o'-di-nitro-difenile non si altera se scaldato a 150° con ammoniaca metilalcoolica. Non usammo solfuro di sodio, perchè già Ullmann e Dieterle⁽³⁾ e poi Duval⁽⁴⁾ dicono di aver ottenuto in questo caso l'o-o'-azossidifenile (difenazon-ossido).

La riduzione dell'o-o'-di-nitro-difenile venne compiuta scaldando la soluzione alcoolica a bagno-maria a 40-50° con la quantità teorica di ammoniaca concentrata e facendovi passare una lenta corrente di acido solfidrico. Avvenuta la riduzione si distillò l'alcool, si estrasse con etere, si dibattè con acido cloridrico diluito: dal cloridrato si spostò con ammoniaca la base evitando l'innalzarsi della temperatura. Si ebbe sempre un prodotto oleoso anche ripetendo varie volte la precipitazione.

L'acetilazione di questo prodotto oleoso, fatta con acetato di sodio anidro e anidride acetica, diede una sostanza che, ricristallizzata dall'alcool di 60°, era in cristalli aciculari giallognoli fondenti a 120-121°. Da una miscela di benzene ed etere di petrolio si ebbe sotto forma di prismi bianchi disposti a ciuffi: p. f. 125°; questo punto di fusione tornò ad abbassarsi a 121-122° in seguito a ricristallizzazione dell'alcool acquoso. L'analisi dimostrò trattarsi

(1) FITTIG. « Ann. », 124, 278 (1862); WILLSTÄTTER e KALB. « Ber. », 39, 3479 (1906).

(2) « J. Chem. Soc. », 121, 495 (1922).

(3) « Ber. », 37, 23 (1904).

(4) « Bull. Soc. Chim. », 7, 487 (1910).

del diacetil-derivato: $\text{NO}_2\text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{N}(\text{COCH}_3)_2$ [trov. %: C 64.11 · H 5.17 · N 9.82; 9.71 · CH_3CO — 28.31 · PM. 284; 287 (Micro-determinazione secondo Rast). Calc. %: C 64.41 · H 4.73 · N 9.40 · CH_3CO —28.85 · PM. 296].

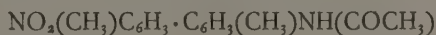
Dalle acque madri alcooliche, da cui ottenemmo il diacetil-derivato, ricavammo un altro prodotto che ha tendenza a separarsi oleoso. Dall'alcool acquoso si ebbe in cristallini bianchi, p. f. 151°; ricristallizzati dal benzene fondevano a 158°, nuovamente cristallizzati dall'alcool acquoso tornarono a fondere a 151–152°. Si tratta del mono-acetil-derivato:

$\text{NO}_2\text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_4\text{NH}(\text{COCH}_3)$. [trov. % C 65.38 · H 5.19 · N 10.98 · CH_3CO — 16.24 · PM. 256; 260. Calc. % C 65.61 · H 4.72 · N 10.93 · CH_3CO — 16.79 · PM. 256].

La saponificazione di questi acetil-derivati, compiuta mediante acido solforico, ci diede un olio che a stento separa (dall'etere di petrolio) cristalli gialli, i quali fondono in modo non netto. Quest'olio, ripreso con acido cloridrico diluito e trattato con acido picrico, ci diede un precipitato che, purificato dall'alcool di 60°, era in cristalli prismatici gialli fondenti a 167°, 5 previo imbrunimento a 163°. Il dosamento dell'azoto confermò che si trattava del picrato di un nitro-amino-difenile: $\text{NO}_2\text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{NH}_2 + + \text{C}_6\text{H}_2(\text{NO}_2)_3\text{OH}$. [trov. %: N 15.97; calc. %: N 15.81].

La riduzione parziale dell'o-o'-di-nitro-p-p'-dimetil-difenile (o-o'-di-nitro-ditolile) si eseguì in modo analogo a quella dell'o-o'-di-nitro-difenile. La riduzione è però più lenta. Il residuo semisolido rossastro avuto dopo l'eliminazione del solvente, venne ripreso con acido cloridrico diluito e caldo: il cloridrato cristallizza da quest'acido oppure da una miscela di alcool ed etere; p. f. 129–130°.

L'acetilazione diede un monoacetilderivato

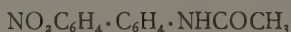


che cristallizza dal benzene, p. f. 145–146° [trov. %: N 10.28 · CH_3CO — 15.42. Calc. %: N 9.86 · CH_3CO — 15.17.] ed un diacetil-derivato $\text{NO}_2(\text{CH}_3)= = \text{C}_6\text{H}_3 \cdot \text{C}_6\text{H}_3(\text{CH}_3)\text{N}(\text{COCH}_3)_2$ che si cristallizzò da etere di petrolio; p. f. 116–117° previa contrazione a 105° [trov. %: N 8.76 · CH_3CO — 26.58. Calc. %: N 8.59 · CH_3CO — 26.89].

La riduzione parziale del m-m'-di-nitro-difenile si fece in soluzione di alcool e toluene a causa della poca solubilità del prodotto in alcool: scacciato il solvente, si riprese il residuo con acido cloridrico diluito, si decolorò con carbone animale, si aggiunse acido cloridrico concentrato che fece precipitare il cloridrato. Ricristallizzato da acido cloridrico o da miscela di alcool ed etere etilico è in aghi bianchi, i quali imbruniscono a 230°, si contraggono a 250° circa, si decompongono a 275–276°. [trov. %: N 11.54 · Cl 14.07. Calc. %: N 11.18 Cl 14.15].

Servono a purificare od a caratterizzare questo m-nitro-m'-amino-difenile anche il solfato (dall'acqua p. f. 156-157°, dopo contrazione a 150°) il nitrato, il picrato (aghi gialli dall'alcool acquoso, imbrunisce a 192-194°, si scompone a 220°), il cloroplatinato (cristalli gialli, anneriscono a 200°, inizio della scomposizione 260° circa, completa a 288°).

Per acetilazione ottenemmo il monoacetil-derivato



che è solubile in acqua bollente da cui si separa in fiocchi bianchi; ricristallizzato dall'alcool acquoso è in cristalli bianchi contraentisi a 115-120° e fondenti a 156-157° [trov. %: N 10.92. Calc. % N 10.93].

II. DIAZOTAZIONE PARZIALE DELL'O-O'-DIAMINO-DIFENILE E SUCCESSIVA APPLICAZIONE DELLA REAZIONE DI SANDMEYER (in collaborazione con C. F. Capello).

Da nostre precedenti ricerche ⁽¹⁾ si sapeva che quando all'o-o'-diamino-difenile si applica la reazione diazoica e poi con joduro di potassio si scompone il tetrazo-derivato così ottenuto, si ottiene con discreto rendimento l'o-o'-di-jodio-difenile assieme a considerevole quantità del suo isomero joduro di difenilenjodonio (C₆H₄)₂ J. J. Quando invece la scomposizione dello stesso tetrazo-derivato si fa con cloruro o con bromuro di potassio, in presenza dei relativi sali rameosi (reazione di Sandmeyer), si ottengono, con un rendimento scarsissimo, l'o-o'-di-cloro oppure l'o-o'-di-bromo-difenile. Questa reazione era già stata tentata ⁽²⁾ per preparare i derivati o-o'-di-alogenati del difenile, ma il risultato fu allora praticamente negativo. Stavamo per studiare le condizioni in cui occorre porsi per avere i prodotti cercati, quando Dobbie, Fox e Hoffmeister ⁽³⁾, a proposito del difenilene, misero in evidenza le difficoltà che s'incontrano nell'applicare la reazione di Sandmeyer al tetrazo-derivato dell'o-o'-di-amino-difenile. È noto del resto che la scomposizione dei tetrazocomposti derivanti da diamine contenenti i gruppi aminici in posizione orto rispetto al legame che unisce i due nuclei, avviene talora in modo capriccioso: così Corbellini e Debenedetti ⁽⁴⁾ nell'applicare la reazione di Sandmeyer al tetrazo-derivato del 2-2'-di-amino-1-1'-di-naftile ottennero il 2-2'-di-cloro-1-1'-dinaftile, mentre notarono un andamento anormale nella scomposizione del solfato tetrazonico per ottenere il corrispondente dinaftolo (β-dinaftolo). Questa stessa reazione venne già tentata da Meisenheimer ⁽⁵⁾ ma senza aver risul-

(1) MASCARELLI, «Gazz. Ch. It.», 38, 619 (1908).

(2) TRECHE, *Andamento anormale della reazione di Sandmeyer nella serie del difenile*. Tesi di laurea. Bologna, luglio 1911.

(3) «J. Chem. Soc.», 99, 683, 1615 (1911).

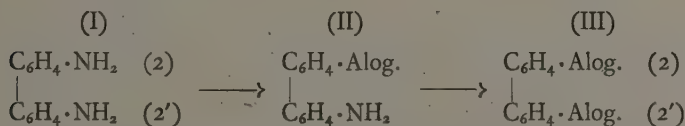
(4) «Gazz. Ch. It.» 59, 394 (1929).

(5) «Ber.», 36, 4155 (1903).

tato. D'altra parte si sa che, scomponendo il cloruro del tetrazo-derivato dell'o-o'-diamino-difenile, si ottiene l'ossido di difenilene ⁽¹⁾ che rappresenta il prodotto normale di deacquificazione dell'o-o'-di-ossi-difenile.

Dobbie, Fox e Hoffmeister ⁽²⁾ hanno anche cercato di preparare l'o-o'-di-bromo-difenile ricorrendo alla o-o'-di-bromo-benzidina a cui tolsero i gruppi aminici, però neanche in tal caso il rendimento è stato migliore. Anche l'acido 6-6'-di-cloro-difenico fu ottenuto per altra via ⁽³⁾ anzichè ricorrendo alla diazotazione del corrispondente di-amino-derivato ed alla clorurazione col metodo di Sandmeyer; così pure non si conosce il metodo di preparazione dell'acido 4-6-4'-6'-tetra-bromo-difenico. Del resto si sa che, mentre l'acido 4-amino-difenico prontamente si diazota, l'acido 6-6'-di-amino-difenico si lascia diazotare uno solo degli aminogruppi, e l'acido 6-amino-difenico non può essere diazotato ⁽⁴⁾.

Noi tentammo un'altra via: quella di cercare di effettuare la reazione diazoica su un solo gruppo aminico dell'o-o'-di-amino difenile (I) indi sostituire il gruppo diazoico con gli alogeni (II); su questo composto si sarebbe potuto nuovamente applicare la reazione diazoica per giungere poi ai derivati o-o'-di-alogenati (III):



La diazotazione parziale di composti diaminici è stata effettuata da Täuber ⁽⁵⁾ e da Bamberger ⁽⁶⁾: entrambi l'applicarono alla benzidina. In questo laboratorio sono già stati provati questi due metodi per ottenere alcuni nuovi derivati del difenile ⁽⁷⁾: il processo Bamberger ha dimostrato di richiedere molte più cure che non quello di Täuber, il quale è stato pure applicato da Gelmo ⁽⁸⁾ per preparare parecchi p-amino-p'-alogeno-derivati del difenile.

Nell'applicare la diazotazione parziale al o-o'-di-amino-difenile constatammo che se questa si compie con una certa facilità sulla benzidina (una considerevole quantità di questa dà però origine al tetrazo-derivato) essa non avviene per il derivato o-o'-di-sostituito.

In soluzione cloridrica si diazotarono grammi 6.25 di o-o'-di-amino-difenile con grammi 5.5 di nitrito sodico, poi si aggiunsero altri 6.25 grammi

(1) TÄUBER e HALBERSTADT, « Ber. », 25, 2745 (1892).

(2) « J. Chem. Soc. », 99, 1619 (1911).

(3) CRIESTIE, JAMES e KENNER, « J. Chem. Soc. », 123, 1948 (1923).

(4) J. SCHMIDT e SCHALL, « Ber. » 38, 3769 (1905).

(5) « Ber. », 27, 2627 (1894).

(6) « Ann. », 390, 160 (1912).

(7) ANGELETTI e GATTI, « Gazz. Chim. It. », 58, 630 (1928).

(8) « Ber. », 39, 4175 (1906).

di diamino-difenile sciolti in acido cloridrico; si lasciò in riposo alla temperatura di 8-10° per due giorni, indi si scompose con grammi 12 di joduro di potassio sciolti in acido solforico diluito (1:10). I successivi trattamenti per isolare i prodotti della reazione dimostrarono che si forma alquanto carbazolo, alquanto fenazone ed in prevalenza o-o'-di-jodio-difenile e joduro di difenilenjodonio. Evidentemente il prodotto di partenza reagisce sotto forma di tetrazo-derivato, poichè queste sostanze sono quelle che più volte abbiamo ottenute quando con joduro di potassio si decompone l'o-o'-tetrazo-difenile.

Fisiologia. — *Ricerche sulla pretesa esistenza della lipodieresi polmonare*⁽¹⁾. Nota di O. CANTONI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. C. FOÀ.

Da qualche anno ricerche e pubblicazioni di Roger, Binet e di altri tendono a dimostrare che il polmone abbia la proprietà di distruggere il grasso circolante.

Secondo gli AA. citati, se ad un animale viene prelevato un campione di sangue del cuore destro ed uno da un'arteria, sia a digiuno che dopo un pasto di grasso o dopo un'iniezione endovenosa di olio emulsionato, si trova costantemente più grasso nel sangue venoso che nell'arterioso: prova di una avvenuta lipodieresi polmonare. Poichè i lavori anzidetti sono, in diversi punti che altrove metterò in evidenza, passibili di critica, ho creduto interessante di ripetere con tecnica accurata gli esperimenti, aggiungendone di nuovi.

Dapprima mi sono servito di grossi cani, ai quali prelevavo il sangue del cuore destro con puntura diretta, e quello arterioso o dalla carotide spostata stabilmente sottocute con un mio metodo⁽³⁾, o dalla femorale, con sottile ago di siringa. I prelievi così fatti possono essere ripetuti più volte, perchè gli animali li subiscono senza risentirne danno alcuno. Tra un prelievo e l'altro ho sempre lasciato intercorrere circa una settimana, perchè la sottrazione di sangue (50 cc.) non influisse sui risultati.

Le emulsioni usate furono preparate con macchina omogeneizzatrice da caseificio, centrifugate e filtrate, così che i globuli avevano dimensioni inferiori a quelle di un globulo rosso.

Il metodo analitico prescelto è stato quello di Kumagawa e Suto, con piccole modificazioni, con prove in doppio fatte su 10 cc. di sangue ossalato. I dati numerici, quali risultano dalla pesata finale, riferiti a 100 cc. di sangue, sono raccolti nella seguente tabella I.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(3) Archivio di Farmacologia XLVII (1929).

TABELLA I.

Cane	Condizioni del prelievo	Sangue	1°	2°
			campione	campione
1. Maschio, Kg. 18	A digiuno da 24 ore	arterioso	0.412	0.416
		venoso	0.408	0.414
	8 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.622	0.620
		venoso	0.620	0.626
	5 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.642	0.642
		venoso	0.638	0.640
	5 ore dopo pasto di grasso di cane	arterioso	0.656	—
		venoso	0.648	0.642
	Alimentazione comune (zuppa di pane)	arterioso	0.680	0.672
		venoso	0.690	0.672
	7 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.818	0.816
		venoso	0.820	0.822
2. Maschio, Kg. 19.5	A digiuno da 24 ore	arterioso	0.570	0.562
		venoso	0.560	0.564
	8 ore dopo pasto di grasso di cane	arterioso	0.782	0.778
		venoso	0.756	0.778
	Iniezione endovenosa di 60 cc. di emulsione di grasso di cane al 6.23 %	arterioso	0.596	0.590
		venoso	0.582	0.576
		arterioso	0.586	0.580
		venoso	0.584	0.576
3. Maschio, Kg. 22	A digiuno da 24 ore	arterioso	0.542	0.522
		venoso	0.546	0.544
	6 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.652	0.662
		venoso	0.648	0.650

Segue: TABELLA I.

Cane	Condizioni del prelievo	Sangue	1° campione	2° campione
Segue: 3. Maschio, Kg. 22	8 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.572	0.584
		venoso	0.576	0.584
	5 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.596	0.602
		venoso	0.598	0.590
	Introduzione endo- venosa di 100 cc. di emulsione di olio di oliva al 6.66 %	Dopo 1 h. arterioso	0.586	0.586
		venoso	0.588	0.590
		Dopo 4 h. arterioso	0.596	0.592
		venoso	0.594	—
4. Maschio. Kg. 20.2	A digiuno da 24 ore	arterioso	0.436	0.438
		venoso	0.434	0.442
5. Femmina, Kg. 20.5	A digiuno da 24 ore	arterioso	0.416	0.418
		venoso	0.412	—
	6 ore dopo pasto di grasso di cane	arterioso	0.628	0.616
		venoso	0.624	0.624
6. Maschio, Kg. 14.7 (prelievi successivi nello stesso giorno)	A digiuno da 48 ore	arterioso	0.426	0.446
		venoso	0.426	0.434
	4 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.526	0.528
		venoso	0.504	0.512
	7 ore dopo	arterioso	0.492	0.486
		venoso	0.490	0.490
7. Maschio, Kg. 27.2	7 ore dopo pasto di grasso di bue	arterioso	0.602	0.600
		venoso	0.598	0.602

Come si vede, in nessuno dei miei esperimenti si trova indizio di lipodieresi.

Per vedere poi se in una prolungata circolazione in circuito chiuso il fenomeno potesse essere messo in evidenza, mi sono servito del preparato cardiopolmonare alla Starling. Per i preparati mi sono valso di cani di piccola mole, così che con il mio apparecchio il sangue totale circolante era

TABELLA II.

Cane	Condizioni dell'esperimento	Tempo dall'inizio	1° campione	2° campione
8. Femmina, Kg. 7.2	A digiuno da 24 ore	20'	0.422	0.416
		1 h. 30'	0.430	0.428
		4 h.	0.414	0.414
		6 h. 30'	0.420	0.424
9. Maschio, Kg. 5.7	Aggiunta di 300 cc. di emulsione di olio di oliva al 4.84 % isotonzata	15'	0.912	0.920
		1 h.	0.944	0.946
		4 h.	0.948	0.942
10. Femmina, Kg. 10.5	8 ore dopo pasto di grasso di bue	30'	0.662	0.654
		2 h.	0.658	0.660
		4 h.	0.648	0.652
11. Femmina, Kg. 8.2	6 ore dopo pasto di grasso di bue	20'	0.688	0.684
		3 h. 30'	0.680	0.686
12. Maschio, Kg. 6.3	Aggiunti al sangue 50 cc. di emulsione di grasso di cane al 6.23 %	15'	0.816	0.812
		1 h.	0.810	0.812
		2 h.	0.820	0.826
		4 h.	0.818	—
13. Femmina, Kg. 7.7	Alimentazione comune con zuppa di pane	30'	0.468	0.466
		2 h.	0.464	0.466

circa un litro e mezzo. Il sangue proveniva da un altro cane tenuto allo stesso regime alimentare.

Nella tabella II ho raccolto i dati sperimentali, per i quali valgono le osservazioni fatte per la precedente. I tempi sono quelli intercorsi dall'inizio della circolazione nell'apparecchio, dopo aver reso ben uniforme il sangue.

Poichè anche dopo queste circolazioni protratte più ore non si riscontra diminuzione del grasso nel sangue, devo concludere che da tutti i miei esperimenti, fatti nelle più varie condizioni, l'ipotesi di una lipodieresi polmonare non viene confermata.

Anatomia. — *Le arterie del cervelletto.* Memoria di L. FAZZARI, presentata dal Socio G. LEVI.

Sarà pubblicata prossimamente.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. G. FANO annunzia che hanno ringraziato per la loro nomina a Soci Nazionali CASTELLANI, HERLITZKA, MARTELLI, PEANO, PELLIZZARI; a Soci Corrispondenti ALOISI, NOBILE, SILVA; a Soci Stranieri BRACHET, BIRKHOFF, CARATHÉODORY, CORRENS, GOLDSCHMIDT, HARRISSON, HILL, OSBORN, SOMMERFELD, SPEMANN.

Informa infine l'Assemblea che durante le ferie accademiche l'Accademia ha subito la dolorosa perdita dei Soci SPICA, CAVARA, RUFFINI ANGELO, BIGNAMI, MOUREU, LINDET, WAGNER. La Presidenza curerà che di tutti si tenga una degna commemorazione nelle prossime sedute.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le pubblicazioni giunte in dono all'Accademia segnalando in ispecial modo le opere del dottore A. M. LUZZATTO e dei Soci ABETTI, d'ACHIARDI, GHIGI, BAGLIONI, CESARO.

Il Socio MARCHIAFAVA presenta in omaggio un suo opuscolo dal titolo « Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua » e ne illustra il contenuto.

Il Socio VOLTERRA presenta i due grossi volumi dei « Proceedings of the International Mathematical Congress » di Toronto del 1924 inviati in

omaggio dal compilatore prof. I. C. Fields presidente del Comitato ordinatore del Congresso. Mette in rilievo la grande importanza di quella riunione scientifica internazionale alla quale l'Accademia fu rappresentata dal Socio PINCHERLE e partecipò attivamente anche per mezzo dei Soci SEVERI, TONELLI, PEANO, FUBINI, GIORGI. Propone che sia inviata al prof. FIELDS una speciale lettera di ringraziamento per l'invio dei due magnifici volumi e per le accoglienze fatte alla delegazione italiana.

Offre quindi in omaggio all'Accademia il VII ed ultimo volume de «Le Opere di Alessandro Volta», leggendo a nome della Commissione Voltiana nominata dalla Accademia dei Lincei e dall'Istituto Lombardo⁽¹⁾, la relazione che la Commissione stessa si onora presentare alla Accademia sull'opera compiuta per eseguire l'incarico che le era stato affidato.

La relazione ricorda la raccolta incompleta fatta dall'Antinori nel 1817 degli scritti del Volta ed il voto formulato nel 1899 durante il Congresso degli Elettricisti in Como, ripetuto poi nel 1903 dalla Sezione scientifica del Congresso Storico di Roma di pubblicare una edizione nazionale delle opere complete edite ed inedite del grande fisico.

I manoscritti del Volta erano stati affidati fino dal 1864 all'Istituto Lombardo il quale, non mandandoli all'Esposizione del 1899 li salvò dall'incendio che distrusse gli altri cimeli voltiani. L'ordinamento dei manoscritti del grande Avo venne compiuto nel 1907 dall'omonimo nipote professore Alessandro Volta e su questo ordinamento venne fatta la presente edizione.

Il Socio VOLTERRA parla delle difficoltà dell'impresa per la scelta del materiale e per la trascrizione dei manoscritti e ricorda la prima Commissione nominata dalla Accademia dei Lincei e dall'Istituto Lombardo⁽²⁾ nella quale entrarono i due bisnipoti dell'illustre scienziato: proff. Carlo Somigliana e Luigi Volta alla cui attività e tenacia si deve in gran parte la riuscita dell'ardua opera ora compiuta. La stampa del primo e del secondo volume venne curata da Luigi Volta unitamente al prof. Fiorentino, ma a partire dal terzo volume la direzione della pubblicazione venne affidata al prof. Francesco Massardi. Il prof. VOLTERRA nella sua relazione parla dell'opera intelligente, zelante ed assidua di quest'ultimo che non indietreggiò dinanzi ad alcuna difficoltà nè ad alcuna fatica consacrando modestamente e silenziosamente tutta la sua attività al lavoro che gli era stato affidato. Animatore dell'opera fu costantemente il prof. Francesco Grassi e l'ing. Giacinto Motta l'aiutò con importanti contributi finanziari.

(1) La Commissione Voltiana è costituita da: Presidenti della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo, e prof. Francesco Grassi, prof. Gino Loria, prof. ingegnere Giacinto Motta, prof. Alfredo Pochettino, prof. Michele Scherillo, prof. Carlo Somigliana, prof. Luigi Volta, prof. Vito Volterra.

(2) Proff. Blaserna, Celoria, Naccari, Somigliana, Volta.

Per ultimo il prof. VOLTERRA espone il contenuto del settimo volume ed in particolare mostra come il Volta abbia aderito alle idee del Lavoisier e se ne sia fatto propugnatore; ricorda il voto emesso dal Congresso Internazionale dei Fisici dello scorso anno di associare i nomi di Gay-Lussac e Volta nella legge di dilatazione dell'aria pel calore e si diffonde ad esporre quanto scrisse il Grassi sulle ricerche delle tensioni dei vapori, in cui non possono disgiungersi i nomi di Volta e di Dalton.

Il Socio VOLTERRA propone che l'Accademia invii una speciale parola di lode al prof. FRANCESCO MASSARDI ed esprima la propria riconoscenza al prof. F. GRASSI e all'ing. G. MOTTA che tanto fecero per la riuscita della grande impresa.

Annunzia quindi che è in progetto la stampa anche dell'Epistolario Voltiano del quale si occupa in particolar modo il sen. SCHERILLO.

Il Presidente sen. FANO ringrazia il Socio VOLTERRA per la sua interessante relazione e lo assicura che la Presidenza curerà che sia data sollecita esecuzione alle sue proposte.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta a nome del Socio G. LEVI, uno studio di I. Fazzari, dal titolo: « Le arterie del cervello » da inserirsi nelle Memorie Accademiche.

Hanno presentato Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci LEVI-CIVITA e VOLTERRA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 novembre 1929

- ABETTI. — Solar Physics. (Sonderabd. aus dem « Handbuch der Astrophysik ». Band. IV, pp. 57-230). Berlin, 1929. 8°.
- AGAMENNONE G. — Il periodo sismico nell'Appennino Ligure Parmense dall'ottobre 1927 all'agosto 1928. (Estr. dal « Bollettino della Società Sismologica Italiana ». Vol. XXVII, 1928). Selci Umbro, 1929. 8°, pp. 1-44.
- ALDRICH J. M. — A Revision of the two-winged Flies of the Genus *Procecidochares* in North America with and allied new Genus. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXVI). Washington, 1929. 8°, pp. 1-13.
- ALDRICH J. M. — Further Studies of Types of American Muscoid Flies in the Collection of the Vienna Natural History Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-34.
- ALEXANDER C. P. — A Revision of the American two-winged Flies of the Psychodid Subfamily Bruchomyiinae. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-9.
- ALFANI G. — Relazione delle osservazioni solstiziali eseguite alla meridiana del Duomo di Firenze negli anni 1927 e 1928. Firenze, 1929. 8°, pp. 1-42.
- ALLIS E. P. — Concerning the Course of the Efferent Mandibular Artery in *Ceratodus*. (Reprint. from the « Journal of Anatomy ». Vol. LXIII). S. l. 1929. 8° fol.
- ALLIS E. P. — Concerning the Pituitary Fossa, the Myodome and the trigemino-facialis Chamber in recent Gnathostome Fishes. (Reprint. from the « Journal of Anatomy ». Vol. LXIII, pp. 95-141). Cambridge, 1928. 8°.
- BAGLIONI S. — Elementi di Fisiologia umana. Parte I-II. Roma, 1926-29. 8°, pp. 1-202, 203-513, 513-700.
- BATTAGLIA M. — Studio su due casi di blastomi maligni. (Estr. dagli « Annali italiani di chirurgia », anno 1929, fascicolo IV). Napoli, 1929. 8°, pp. 1-13.
- BELLIO G. — Note su *Diaspinae* dell'Estremo Oriente con descrizione di nuove specie (Homoptera: Coccidae). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXII, pp. 219-243). Portici, 1929. 8°.
- BERKSON J. — A Probability Nomogram for Estimating the Significance of rate Differences. (Reprint. from the « American Journal of Hygiene ». Vol. IX, pp. 695-699). Lancaster, 1929. 8°.
- BERRY E. W. — Tertiary Fossil Plants from Colombia, South America. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-12.
- BONATTI S. — Due osservazioni sul disegno dei cristalli. (Estr. dai « Processi Verbal della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXVI, 1927). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-7.
- BONATTI S. — Lo Xantogenato di ferro e lo Xantogenato di nichelio. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali residente in Pisa ». Vol. XXXIX). Pisa, 1929. 8°. pp. 1-10.
- BONATTI S. — Resine fossili del bacino lignifero di Figline Valdarno. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXIX). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-10.

- BONATTI. S. — Sopra alcuni sali metallici dell'acido xantogenico. (Estr. dai «Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali». Vol. XXXVII). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-7.
- BOSELLI F. B. — Studii sugli Psyllidi (Homoptera: Psyllidae o Chermidae). (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXII, pp. 13-27). Spoleto, 1929. 8°.
- BÖVING A. G. — Beetle Larvae of the Subfamily Galerucinae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-48.
- BRAZIER HORVELL A. — Contribution to the Comparative Anatomy of the Eared and Earless Seals (Genera *Zalophus* and *Phoca*). (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume LXXIII). Washington, 1928. 8°, pp. 1-142.
- BUCHANAN L. L. — North American Species of the Weevils of the Otiorynchid Genus *Mesagroicus*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXVI). Washington, 1929. 8°, pp. 1-14.
- CANDURA G. S. — Gli insetti del frumento nel granaio. Portici, 1929. 8°, pp. 1-34.
- CASTAGNA P. — La terapia dell'eresipela (Studio clinico-sperimentale). (Estr. dal «Policlinico», anno XXX). Roma, s. d. 8°, pp. 1-9.
- CASTALDINI L. — Scritti biologici. Vol. IV. Siena, 1929. 8°, pp. 1-350.
- CERETTI L. — Sopra la generalizzazione di alcuni teoremi sui determinanti. (Estr. dal «Giornale di Matematiche di Battaglini». Vol. LXVI). Napoli, 1928. 8°, pp. 1-9.
- CESARÒ G. — Sur l'apatites, la fluorine, la cuspidine et d'autres minéraux du Somma et du Vésuve. (Extr. des «Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique». Tome IX). Bruxelles, 1928. 4°, pp. 1-140.
- CHANDLER A. C. — A new Species of Trematode Worms belonging to the Genus *Hasstilesia* from Rabbits in Texas. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-5.
- CHANDLER A. C. — Some new Genera and Species of Nematode Worms, Filarioidea, from Animals dying in the Calcutta Zoological Garden. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-10.
- CIPOLLA F. — Antiche linee di spiaggia sui monti ad occidente di Palermo (Gruppo Billiemi). (Estr. dal «Bollettino della Società di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo». Anno IX). Palermo, 1927. 8°, pp. 1-21.
- COLIZZA C. — Contributo alla conoscenza del Balanino delle castagne. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXII, pp. 244-263). Portici, 1929. 8°.
- COSTA S. — La nuova scienza astronomica. Una serie di scoperte. Grosseto, 1929. 8°, pp. 1-8.
- CUSHMAN R. A. — A Revision of the North American Ichneumon-Flies of the Genus *Mesostenus* and Related Genera. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-58.
- CUSHMAN J. A. and WICKENDEN R. T. D. — Recent Foraminifera from off Juan Fernandez Islands. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-16.
- CUSHMAN J. A. and KELLETT B. — Recent Foraminifera from the West Coast of South America. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-16.
- D'ACHIARDI G. — Celso Walfredo Capacci. Cenno necrologico. (Estr. dai «Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali». Vol. XXXVIII). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-7.
- D'ACHIARDI G. — Ettore Artini. (Estr. dal «Bollettino del R. Ufficio geologico d'Italia». Vol. LIX). Roma, 1929. 8°, pp. 1-16.
- D'ACHIARDI G. — La dachiardite zeolite mi-

- metica dell'isola d'Elba. (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali» residente in Pisa. Vol. XXXIX). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-18.
- D'ACHIARDI G. — Mario Canavari, 27 novembre 1855-20 novembre 1928. (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali». Vol. XXXIX). Pisa, 1929. 8°, pp. 1-XVI.
- D'ACHIARDI G. — Sul modo di formazione dei gruppi mimetici di dachiardite. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Volume IX, pp. 181-187). Roma, 1929. 8°.
- DE CHAURAND DE SAINT EUSTACHE E. — Dichiarazione circa le formole naturali per la densità e pressione negli astri. Firenze, 1929. 8°, pp. 1-8.
- DEL VALLE G. — Il diagramma annulare quale indice climatico. (Estr. dalla Rivista «L'Alpe»). Milano, 1929. 8°, pp. 1-8.
- DENIS J. R. — Notes sur les Collemboles récoltés dans ses voyages par le Prof. F. Silvestri. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXII, pp. 305-320). Portici, 1929. 8°.
- DORE P. — Relazione sulla revisione della meridiana di S. Maria del Fiore in Firenze e sulla istituzione di riferimenti per future verifiche di stabilità della Cupola. Firenze, 1929. 8°, pp. 43-62.
- DUZEE (van) M. C. — Tropical American Diptera or two-winged Flies of the Family Dolichopodidae. (From Central and South America. From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-64.
- DWIGHT MARSH C. — Distribution and Key of the North American Copepods of the Genus Diaptomus, with the Description of a new Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Washington, 1929. 8°, pp. 1-27).
- DYAR H. G. — A new Species of Mosquito from Montana with annotated List of the Species Known from the State. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-8.
- DYAR H. G. — Notes and new Species of American Moths of the Genus Scoparia Haworth. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-9.
- FANTOLI G. — Giudizio sul progetto di bonifica e irrigazione della Bassa Friulana. Milano, 1929. 8°, pp. 1-34.
- FANTOLI G. — In memoria di Carlo Pasquinelli. Milano, 1929. 4°.
- FANTOLI G. — La storica azione del 15 aprile 1929 nei ricordi del Politecnico di Milano. Milano, 1929. 8°, pp. 1-14.
- FOSHAG W. F. — Mineralogy and Geology of Cerro Mercado Durango, Mexico. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-27.
- GATES G. E. — A Summary of the Earthworm Fauna of Burma with Descriptions of fourteen new Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-41.
- GERASIMOVIC B. P. — On the Stability of gaseous Stellar Structures. (Reprint from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XV, pp. 347-353). Cambridge, 1929. 8°.
- GERASIMOVIC B. P. and STRUVE O. — Physical Properties of a gaseous Substratum in the Galaxy. (Reprint from the «Astrophysical Journal». Vol. LXIX). S. l., 1929. 8°.
- GHIGI A., ISSEL R. — Ricerche faunistiche nelle isole italiane dell'Egeo. (Estr. dall'«Archivio Zoologico Italiano». Volumi XII-XIII, 1928-1929). Napoli, 1929. 8°, pp. 1-484.
- GIANELLA V. — Note sur le champ magnétique d'un courant circulaire. (Extr. de la «Révue générale de l'Electricité». T. XXII). Paris, 1927. 4°, pp. 1-29.
- GIANNOTTI C. — Il tracciamento degli assi nei cristalli geminati. (Estr. dagli «Atti della Società Toscana di Scienze Naturali». Vol. XXXIX). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-13.
- GIANNOTTI C. — Sul numero di abiti cri-

- stallini teoricamente possibili in base ad un numero *n* di forme semplici determinate. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXVIII). Pisa, 1928. 8°, pp. 1-17.
- GRASSI F. e MASSARDI F. — Presentazione del vol. VII e ultimo della edizione Nazionale delle Opere di Alessandro Volta; adunanza del 4-8-29. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Vol. LXII, pp. 599-622). Milano, 1929. 8°.
- GUIDI C. — Solenni onoranze a Camillo Guidi (Regia Scuola di Ingegneria). Torino, 1928. 8°, pp. 1-49).
- HAALCK H. — Zu Frage der Erklärung der Kursker magnetischen und gravimetrischen Anomalie. (Sonderabd. aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Bd. XXII, pp. 241-255, 385-399). Leipzig, 1929. 8°.
- HEINRICH C. — Notes on some North American Moths of the Subfamily Eucosminae. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-23.
- HENSEL K. — Ueber Systeme in einfachen Körpern. (Reprint. from the « Journal für Mathematik ». Bd. CLX, pp. 131-198). Berlin, s. d. 4°.
- HOGG F. S. — A Synopsis of Cometary Spectra. (From the « Journal of the Royal Astronomical Society of Canada ». 1929. pp. 55-89). Toronto, 1929. 8°.
- HOOVER, H. — John Fritz Medal. New York, 1929. 8°, pp. 1-6.
- HOWELL A. B. — Mannuials from China in the Collections of the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-82.
- Institut Psychoneurologique Ukranien. (1921-1926). Charkoff. 8°, pp. 1-58.
- IVALDI G. — Nuove ipotesi italiane sulla costituzione della terra. (« Il Lavoro Fascista », 17 ottobre 1929). Roma, 1929.
- JONES M. F. — Tapeworms of the Genera Rhabdometra and Paruterina Found in the Quail and Jellow-Billed Cuckoo. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-8.
- JULIN Ch. et ROBERT A. — Contribution à l'étude de la classification des Phallusiidées. Les genres Phallusia, Axidia et Axidiella. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». N° VIII, pp. 626-636). Bruxelles, 1913. 8°.
- JULIN M. Ch. — Le sac rénal des Molguliidées: son homologie avec le soi-disant « diverticule hépatique » des Céphalochordés. (Extr. du « Compte-rendu de la Association Française pour l'Avancement des Sciences ». 28^{me} session). Paris, 1900. 8°, fol.
- JULIN M. Ch. — Les caractères histologiques des « cellules lumineuses » de *Pyrosoma giganteum* et de *Cyclosalpa pinnata*. (Extr. du « Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. CLV). Paris. 1929. 4°, pp. 1-3.
- JULIN M. Ch. — Nouvelles études sur les phénomènes intimes de la maturation de l'œuf et de la fécondation chez les Tuniciers. (Extr. du « Compte-rendu de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences ». 28^{me} session), Paris, 1900. 8°, fol.
- JULIN Ch. — Quelques reflexions à propos de la note préliminaire de M. le Professeur J. Duesberg sur « Plastosomes et substances organogènes dans l'œuf des Axioliens ». (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique », n. 5 1913, pp. 457-462). Bruxelles, 1913. 8°.
- JULIN Ch. — Recherches sur l'organisation et le développement des orthonectides. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». T. XI). Bruxelles, 1881. 8°, pp. 1-12.
- JULIN Ch. — Sur la formation du mesoblaste et la signification du canal de Lieberkuhn chez le Cobaye. (Extr. des « Comptes-Rendus de l'Association des Anatomistes ». XVIII^e réunion). Paris, 1923. 8°, pp. 1-9.
- KENNELLY A. E. — Historical Outline of the Electrical Units. (Reprint. from the « Journal of Engineering Education ». Vol. XIX, pp. 229-275). Havard, 1928-29. 8°.
- KIMBALL H. H. — Amount of Solar Radia-

- tion that Reaches the Surface of the Earth on the Land and on the Sea, and Methods by Which it is Measured. (Reprint. from «Monthly Weather Review». Vol. LXL, pp. 393-399). Washington, 1929. 4°.
- KIRK E. — *Pagecrinus*, a new Crinoid Genus from the American Devonian. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-4.
- KIRK E. — The Fossil Crinoid Genus *Vasocrinus* Lyon. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-16.
- KNIGHT H. H. and MTEE W. L. — Bugs of the Family Miridae of the District of Columbia and Vicinity. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-27.
- LECAT M. — Coup d'œil sur les applications des déterminants supérieurs. Part. I-II. (Extr. des «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles». T. XLIX. Partie I-II). Louvain, 1929. 8°, pp. 1-24, 1-24.
- LECAT M. — L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant un acide. (Extr. des «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles». T. XLIX, pp. 28-46). Louvain, 1929. 8°.
- LECAT M. — L'Azéotropisme dans les systèmes binaires contenant un phénol. (Extr. des «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles». T. XLIX, pp. 119-143). Louvain, 1929. 8°.
- LECAT M. — Nouveaux Azéotropes binaires, XIII, XIV liste. (Extr. des «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles». T. XLVIII, pp. 113-126; XLIX, pp. 17-27, 109-118). Louvain, 1929. 8°.
- LEONE S. — Profilassi del tracoma e visiva nelle provincie di Agrigento-Catania-Enna-Messina-Ragusa-Siracusa. 1928-1929. Siracusa, 1929. 4°, pp. 1-15, 1-19, 1-13, 1-23, 1-16.
- LOHST M., JULIN Ch. et RUTOT A. — Notice sur Julien Fraipont. Bruxelles, 1925. 8°, pp. 1-69.
- LOVE A. G. — Somatological Norms in Tuberculosis and Heart Disease. (Reprint. from «Human Biology a record of Research». Vol. I, pp. 166-197). Baltimore, 1929. 8°.
- LUIGI L. — Resti di un'antica «tomba a sifone», derivata dall'acquedotto Claudio a Roma. (Estr. dagli «Atti del I Congresso Nazionale di Studi Romani. 1928). Roma, 1928. 8°. pp. 1-12.
- LUZZATTO A. M. — Atrofia giallo-acuta ed adenoma del fegato. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche», fasc. X, 1907). Venezia, 1907. 8°, pp. 1-15.
- LUZZATTO A. M. — Cavernoma del bulbo rachideo associato a siringobulbia. (Estr. dagli «Scritti di Scienze Mediche e Naturali dell'Accademia di Ferrara». 1923). Ferrara, 1923. 8°, pp. 1-15.
- LUZZATTO A. M. — Diabete insipido da emorragia nella neuroipofisi e nel peduncolo ipofisario. (Estr. dallo «Sperimentale», Archivio di Biologia normale e patologica. Anno LXXI, pp. 405-421). Ferrara, 1917. 8°.
- LUZZATTO A. M. — Glioma del terzo ventricolo e gliomatosi ependimale diffusa. Ferrara, s. d. 8°, pp. 124.
- LUZZATTO A. M. — I fondamenti dottrinali della colorazione istologica. (Estr. dalla «Sperimentale», Archivio di Biologia normale e patologica. Anno LXVII, 1913). Parma, 1913. 8°.
- LUZZATTO A. M. — La degenerazione cistica dei reni. Venezia, 1900. 8°, pp. 1-205.
- LUZZATTO A. M. — La semeiotica della regione laterale del torace. (Estr. dal «Giornale del Medico Pratico». Anno V, 1923). Livorno, 1923. 8°, pp. 1-15.
- LUZZATTO A. M. — L'azione dell'alcool sulla pressione del sangue nell'uomo normale. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche», fasc. XII, 1909). Venezia, 1909. 8°, pp. 1-20.
- LUZZATTO A. M. — Le lesioni di guerra dei nervi periferici. (Estr. dagli «Atti delle Riunioni», fasc. II, 1916). Ferrara, 1917. 8°, pp. 1-14.
- LUZZATTO A. M. — Leucemia acuta mieloide con stadio iniziale anemico. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche», Anno XXIX, 1912). Venezia, 1912. 8°. pp. 1-32.

- LUZZATTO A. M. — Paralisi agitante e sclerodermia. (Estr. dal periodico «Il Morgagni». N. XII). Milano, 1904. 8°, pp. 1-22.
- LUZZATTO A. M. — Paralisi radicolare del plesso lombare nel corso della tabe dorsale. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XX, fasc. XII, 1903). Venezia, 1903. 8°, pp. 1-15.
- LUZZATTO A. M. — Per una riforma ai concorsi negli ospedali. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XX, 1903). Venezia, 1903. 8°, pp. 1-9.
- LUZZATTO A. M. — Polineurite malarica. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XIX, fasc. XI). Venezia, 1902, 8°, pp. 1-23.
- LUZZATTO A. M. — Sindrome neurotraumatica di guerra da cavernoma del bulbo associato a siringobulbia. (Estr. dagli «Atti delle Riunioni», fasc. I, 1916). Ferrara, 1916. 8°, pp. 1-7.
- LUZZATTO A. M. — Sopra una forma rara di carcinoma della testa del pancreas. (Estr. dalla «Clinica Medica», 1902). Milano, 1902. 8°, pp. 1-14.
- LUZZATTO A. M. — Su alcuni nuovi lavori riguardanti la patologia della degenerazione cistica dei reni. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XIX). Venezia, 1902. 8°, pagine 1-16.
- LUZZATTO A. M. — Sui rapporti fra leucemia e sarcomatosi. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». 1913). Treviso, 1913. 8°, pp. 1-25.
- LUZZATTO A. M. — Sui rapporti tra lo stato della lingua ed i segni della putrefazione intestinale. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XX. 1903). Venezia, 1903. 8°, pagine 1-19.
- LUZZATTO A. M. — Sulla colorazione a fresco della cellula nervosa. (Estr. dall'«Archivio per le Scienze Mediche». Vol. XXVII, pp. 205-213). Torino, 1903. 8°.
- LUZZATTO A. M. — Sull'anemia grave megaloblastica senza reperto ematologico corrispondente. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XXIV, fasc. V, 1907). Venezia, 1907. 8°, pp. 1-22.
- LUZZATTO A. M. — Sull'aortite pneumococcica. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XXVII). Venezia, 1910. 8°, pp. 1-25.
- LUZZATTO A. M. — Sulle alterazioni del pancreas e della milza nella cirrosi epatica. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche», fasc. VI. 1907). Venezia. 1907. 8°, pp. 1-42).
- LUZZATTO A. M. — Sulle forme di anemia perniciosa da neoplasma. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». fasc. X, 1909). Venezia, 1909. 8°, pagine 1-29.
- LUZZATTO A. M. — Sulle lesioni della coda equina senza disturbi sensitivi. Ferrara, 1908. 8°, pp. 1-9.
- LUZZATTO A. M. — Sull'importanza del megacolon in medicina legale militare (Estr. degli «Atti delle Riunioni», fascicolo I, 1916). Ferrara, 1916. 8°, pp. 1-11.
- LUZZATTO A. M. — Sull'ittero grave con esito in guarigione. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XXIII. fasc. XII). Venezia, 1906. 8°, pp. 1-31.
- LUZZATTO A. M. — Un caso di leucemia acuta trattato col benzolo. (Estr. dagli «Atti dell'Accademia delle Scienze mediche e nat. di Ferrara». 1915-16). Ferrara, 1916. 8°, pp. 1-46.
- LUZZATTO A. M. e CALABRESI A. — Un caso di gigantismo. (Estr. dalla «Rivista di Scienze Mediche»). Treviso, 1914. 8°, pp. 1-12.
- LUZZATTO A. M. e OREFFICE F. — Le basi scientifiche della cura idrominerale della neurastenia. Venezia, 1906. 8°, pp. 1-21.
- LUZZATTO A. M. e RAVENNA F. — Sul comportamento delle emazie granulose in condizioni patologiche differenti dall'anemia. Genova, 1914. 8°, pp. 1-16.
- LUZZATTO A. M. e RAVENNA F. — Sul comportamento numerico delle emazie granulose in stati vari patologici differenti dall'anemia. Roma, 1913. 8°, pp. 1-4.
- LUZZATTO A. M. e RAVENNA F. — Sul numero delle emazie granulose nell'individuo normale. (Estr. dagli «Atti del-

- l'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara». 1911). Ferrara, 1911, 8°, pp. 1-13.
- LUZZATTO A. M. e RIETTI F. — Appunti clinici ed anatomo-patologici sull'encefalite letargica. (Estr. dagli «Atti dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara». 1919-20). Ferrara, 1920, 8°, pp. 1-10.
- LUZZATTO A. M. e VIANA O. — Contributo alla patogenesi della leucanemia. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». Anno XXIV, 1907). Venezia, 1907, 8°, pp. 1-24.
- LUZZATTO A. M. e ZAMBONATI R. — Contributo alla conoscenza delle sindromi nervose da malaria. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». 1914). Treviso, 1914, 8°, pp. 1-12.
- LUZZATTO A. M. e ZAMBONATI R. — Morbo di Banti e iperplasia nodosa del fegato. (Estr. dalla «Rivista Veneta di Scienze Mediche». 1914). Treviso, 1914, 8°, pp. 1-27.
- MALLOCH J. R. — Notes on Some Oriental Sapromyzid Flies (Diptera), with Particular Reference to the Philippine Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1929, 8°, pp. 1-97.
- MANSFIELD W. C. — New Fossil Mollusks from the Miocene of Virginia and North Carolina, with a Brief outline of the Divisions of the Chesapeake Group. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume LXXIV). Washington, 1928, 8°, pp. 1-11.
- MARCHIAFAVA E. — Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua. (Estr. dal «Policlinico». 1929). Roma, 1929, 8°, pagine 1-15.
- MARSHALL W. D. New Fossil Land and Fresh-Water Mollusks from the Reynosa Formation of Texas. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume LXXVI). Washington, 1929, 8°, pp. 1-6.
- MENOZZI C. — Formiche di Cuba e delle Isole Canarie raccolte dal prof. Filippo Silvestri. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore di Portici». Vol. XXIII). Spoleto, 1929, 8°, pp. 1-5.
- MENOZZI C. — Una nuova specie di formica del genere *Aphaenogaster* Mayr del Nord America. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXII. pagine 281-284). Portici, 1929, 8°.
- MERRILL G. P. — A newly Found Meteoric Stone reported by W. B. Lang from Peck's Spring Midland County. Texas (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume LXXV). Washington, 1929, 8°, pp. 1-2.
- MILLER G. S. — The Gums of the Porpoise *Phocoenoides Dalli* (True). (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume LXXIV). Washington, 1929, 8°, pp. 1-4.
- OCHS G. — On some new and interesting Species of Water Beetles of the Family Gyrinidae in the United States National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929, 8°.
- PARKER J. B. — A generic Revision of the Fossorial Wasps of the Tribes Stizini and Bembicini with Notes and Descriptions of new Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929, 8°, pp. 1-203.
- PEARL R. and REED L. J. — The Population of an Area around Chicago and the Logistic Curve. (Reprint. from the «Journal of the American Statistical Association». 1929, pp. 65-67). s. I. 1929, 8°.
- PRICE E. W. — A Synopsis of the Trematode Family Schistosomidae with Description of new Genera and Species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXV). Washington, 1929, 8°, pp. 1-39.
- Proceedings of the International Mathematical Congress. Toronto 1924. Vol. I-II. Toronto, 1928, 4°. pp. 1-935, 1-1006.
- RANZI S. — Embriogenesi e gradienti as-

- siali. (Estr. dalle « Memorie della Pont. Accademia delle Scienze, Nuovi Lincei ». Vol. XII. pp. 201-229). Roma, 1929. 4°.
- RANZI S. — Rapporti tra istogenesi ed organogenesi. (Ricerche di morfologia sperimentale nei Cefalopodi). (Estr. dall'Archivio Zoologico Italiano ». Volume XVIII, fasc. III-IV, pp. 21-23). Napoli, 1929. 8°.
- RATHBUN M. J. — A new Crab from the Eocene of Florida. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°. pp. 1-4.
- REARDON L. — A Contribution to our Knowledge of the Anatomy of the Fresh-Water Mussels of the District of Columbia. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV) Washington, 1929. 8°, pp. 1-12.
- REED L. J. — Correlations between climatic Factors and Death Rates (Reprint. from the « Proceedings of the International Mathematical Congress ». Toronto, 1924. 4°, pp. 881-883).
- REED L. J. and BERKSON J. — The Application of the Logistic Function to Experimental Data. (Reprint. from the « Journal of Physical Chemistry ». Volume XXXIII, pagine 760-779). s. l. 1929. 8°.
- REID DUNN E. — A new Salamander from Southern California. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-3.
- REID DUMM E. — Two new Frogs from Jamaica. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-2.
- RICCHELLO A. — Descrizione e notizie della Mayetiola Avenae March. (Diptera Cecidomyidae) in Italia. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIII, pp. 28-96). Portici, 1929. 8°.
- RILEY J. H. — A Review of the Birds of the Islands of Siberut and Sipora Mentawai Group (Spolia Mentawiensis). (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-45.
- ROE G. C. — A new Nematode, Sincostaberrans, new Genus, and new Species from a Rodent, (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-3.
- ROEWER C. Fr. — Zwei nordamerikanische Höhlen-Opilioneiden. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIII, pp. 10-12). Spoleto, 1929. 8°.
- RUTTEN L. M. B. — Science in the Netherlands Ands East Indies. (Kongl. Akademie von Wetenschappen). Amsterdam. s. d. 4°. pp. 1-VIII, 1-432.
- SANDGROUND J. H. — A new Liver Fluke from a Monkey and new Parasitic Roundworms from various African Animals. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-11.
- SHANNON E. V. — Miargyrite Silver ore from the Randsburg District California (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-10).
- SHANNON E. V. — Tschermigite, Ammoniojarosite, Epsomite, Celestite, and Paligorskite from Southern Utah (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIV). Washington, 1928. 8°, pp. 1-12.
- SHAPLEY H. — Note on the Velocities and Magnitudes of external Galaxies. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Volume XV, pp. 565-570). Cambridge, 1929. 8°.
- SHAPLEY H. — Studies of the Galactic Center. IV, on the Transparency of the Galactic Star Clouds. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XV, pp. 174-177). Cambridge, 1929. 8°.

- SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza degli Japygidae (Thysanura) di Cuba. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXII, pp. 265-281). Portici, 1929. 8°.
- SILVESTRI F. — Contribucion al conocimiento de los Japygidae (Thysan.) de España. (Public. en « Eos » Revista Española de Entomología. Tomo V, pp. 81-95). Madrid, 1929. 8°.
- SILVESTRI F. — Descrizione di nuove specie di Japyx (Thysanura) della regione paleartica. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario ». Vol. XXIV). Portici, 1929. 8°, pp. 1-26.
- SILVESTRI F. — Descrizione di un nuovo genere cavernicolo di Polydesmidae (Myriapoda diplopoda) di Cuba. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Volume XXIII, pp. 6-9). Spoleto, 1929. 8°.
- SILVESTRI F. — Miriapodi chilopodi (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di storia naturale di Genova ». Vol. LIII, pp. 308-312). Genova, 1929. 8°.
- SILVESTRI F. — Note su Tisanuri italiani. 1. Nova specie di Japyx. 2. Il nido e le ova di Japyx solifugus Haliday. (Estr. dal « Bollettino della Società Entomologica Italiana ». Anno LXI, n. VIII, pp. 126-130). s. l. 1929. 8°.
- SPILLER G. — Foundations for a Scientific Longhand. London, 1929. 8°, pp. 1-13.
- TODD W. E. C. — A Revision of the Wood-Warbler Genus Basileuterus and its allies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXIV) Washington, 1929. 8°, pp. 1-95.
- TORREY SIMPSON C. — The Florida Tree Suails of the Genus Ligunus. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-44.
- TORSELLO G. — La cultura fisiologica. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ». Vol. VII, 1928). Lecce, 1929. 8°, pp. 1-7.
- TREADWELL A. L. — Two new Species of Polychaetous Annelids from the Argentine Coast. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXV). Washington, 1929. 8°, pp. 1-5.
- VILLAT H. — Leçons sur l'hydrodynamique. Paris, 1929. 8°, pp. I-III, 1-296.
- VINCENT M. — Essai sur les principes des théories physiques suivi d'une théorie dynamique de la Masse. Paris, 1925. 8°, pp. 1-282.
- VINCENT M. — La gravitation thermodynamique et ses conséquences. Paris, 1926. 8°, pp. 1-216.
- VINCENT M. — Réflexions sur l'utilisation future des énergies naturelles. Paris, 1924. 8°, pp. 1-80.
- VOLCA P. — Un rapidissimo metodo di calcolo per la previsione delle occultazioni lunari. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana del R. Osservatorio Astronomico di Torino ». Vol. IV), Milano, 1929. 8°, pp. 1-27.
- VOLTA A. — Le opere di Alessandro Volta. Vol. VII. Milano, 1929. 4°, pp. I-XIX, 1-549.
- VOLTA L. — Determinazione della differenza di longitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese da Greenwich per mezzo della radiotelegrafia. (Estr. dagli « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXII, pp. 569-583). Torino, 1927. 8°.
- VOLTA L. — Differenze di longitudine fra Genova, Milano, Padova e Napoli determinate nel 1922 con la radiotelegrafia. (Estr. dagli « Annali Idrografici della Regia Marina ». Vol. XII). Genova, 1928. 4°, pp. 1-39.
- WAYLAND VAUGHAN T. — Descriptions of new Species of Foraminifera of the Genus Discocyclus from the Eocene of Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXXVI). Washington, 1929. 8°, pp. 1-18.
- WILLIAMS E. und PAYNE C. H. — Photo-

metry of Hydrogen and Calcium Lines in Stellar Spectra. (Reprint. from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. LXXXIX, page 526-538). Edinburgh, 1929, 8°.

WRIGHT A. H. — Synopsis and Description of North American Tadpoles (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. LXXIV). Washington, 1929, 8°, pp. 1-70.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 novembre 1929 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni di Lorentz*. Nota ⁽¹⁾ del
Corrisp. P. BURGATTI.

1. È ben noto, come già dimostrò il Cayley, che i coefficienti di una trasformazione lineare e ortogonale in un S_n euclideo sono esprimibili razionalmente mediante $n(n-1)/2$ parametri indipendenti.

Questo teorema generalizza quello dello spazio S_3 , del quale si fa grande uso nello studio del moto d'un corpo rigido; i tre parametri sono in tal caso gli angoli Euleriani.

Manifestamente deve sussistere un teorema analogo riguardo alle trasformazioni di Lorentz nel S_4 pseudo-euclideo (spazio-tempo) della relatività ristretta. Benchè coteste trasformazioni siano state studiate da molti autori in vari modi, non trovo che sia stato notato il detto teorema in forma esplicita e data l'esplicita loro espressione col minimo numero di parametri. L'analisi vettoriale si presta molto bene a questo fine e senza uscire dal campo reale.

Vogliamo anzitutto mostrare, anche a chiarimento di ciò che segue, come si giunga in modo semplice al teorema di Cayley. Una trasformazione lineare ortogonale in S_n è definita da una *isomeria vettoriale* σ , caratterizzata dalla proprietà

$$K\sigma\sigma = 1 \quad \text{oppure} \quad K\sigma = \sigma^{-1} \quad (\text{inversa}).$$

(1) Presentata nella seduta del 17 novembre 1929.

Essa conserva le lunghezze e gli angoli; ed è anche questa la sua proprietà caratteristica: dunque

$$(1) \quad (P - O)^2 = (Q - O)^2,$$

dove O è un punto fisso e P, Q i punti corrispondenti.

In altri termini,

$$P - O = \sigma(Q - O)$$

sono le trasformazioni soddisfacenti alla (1).

Ciò posto, la (1) può scriversi

$$(P - Q) \times [(P - O) + (Q - O)] = (P - Q) \times (R - O) = 0.$$

Per soddisfare a questa condizione poniamo in generale

$$(2) \quad P - Q = \gamma(R - O)$$

ove γ è una omografia vettoriale. Avremo

$$\gamma(R - O) \times (R - O) = 0$$

qualunque sia R (poichè P è qualunque); epperò generalmente

$$\gamma u \times u = 0$$

per qualunque u . Ma questa è la proprietà caratteristica delle omografie assiali; dunque γ è *assiale* ($K\gamma = -\gamma$).

Dopo ciò, esplicitando la (2), viene

$$(1 - \gamma)(P - O) = (1 + \gamma)(Q - O);$$

ossia, posto $1 - \gamma = \lambda$,

$$\lambda(P - O) = K\lambda(Q - O),$$

giacchè $1 + \gamma$ è la coniugata di $1 - \gamma$. Di qui si trae

$$P - O = \lambda^{-1} K\lambda(Q - O);$$

epperò si deduce

$$(3) \quad \sigma = \lambda^{-1} K\lambda.$$

Ora $1 - \gamma$ è una *omografia emisimmetrica*, e la γ , essendo assiale, ha soltanto $n(n-1)/2$ componenti distinte quando la si esprime in coordinate (giacchè è rappresentata da una matrice quadrata emisimmetrica-gobba); perciò si ha il teorema di Cayley, che si può ora enunciare così: *Ogni isomeria è il prodotto della coniugata di una omografia emisimmetrica per la sua inversa; per conseguenza gli n^2 elementi che la definiscono rispetto a un sistema di coordinate cartesiane risultano in tal modo espressi razionalmente mediante $n(n-1)/2$ parametri indipendenti.*

Sotto questa forma il teorema è anche comodo per lo sviluppo dei calcoli. Così, ad esempio, sia in S_3

$$K\lambda \equiv \begin{pmatrix} 1 & p-q \\ -p & 1 & r \\ q-r & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \lambda^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1+r^2}{D} & \frac{p+qr}{D} & \frac{pr-q}{D} \\ \frac{qr-p}{D} & \frac{1+q^2}{D} & \frac{pq+r}{D} \\ \frac{pr+q}{D} & \frac{pq-r}{D} & \frac{1+p^2}{D} \end{pmatrix}$$

ove $D = 1 + p^2 + q^2 + r^2$.

Moltiplicando insieme linee per colonne, si hanno gli elementi di $\lambda^{-1} K\lambda$, ossia di σ . Si ritrovano le formule note.

2. Un procedimento analogo al precedente vale per la ricerca delle trasformazioni di Lorentz nello spazio-tempo S_4 e per la loro espressione mediante il numero minimo di parametri, che è 6. In questo caso è la condizione

$$(4) \quad (Q - O)^2 - c^2 t^2 = (Q_1 - O)^2 - c^2 t_1^2$$

a cui bisogna soddisfare con trasformazioni lineari.

Nello spazio euclideo S'_4 , riguardiamo (x, y, z, t) e (x_1, y_1, z_1, t_1) come le coordinate cartesiane dei punti P e P_1 che si corrispondono nella trasformazione. Poniamo per semplicità $ct = u$, $ct_1 = u_1$ e diciamo \mathbf{t} il vettore unitario che definisce l'asse della u (o dei tempi). L'omografia (dilatazione)

$$\lambda_t = 1 - 2 H(\mathbf{t}, \mathbf{t}),$$

ove H è il simbolo di una diade, applicata al vettore $P - O$ dà manifestamente il vettore $M - O$ di componenti $(x, y, z, -u)$; si ha cioè

$$M - O = \lambda_t(P - O)^{(1)}.$$

E parimente per il punto $M_1(x_1, y_1, z_1, -u_1)$ si ha

$$M_1 - O = \lambda_t(P_1 - O).$$

L'omografia λ_t è l'inversa di se stessa, giacchè subito si verifica che è $\lambda_t^2 = 1$; dunque $\lambda_t = \lambda_t^{-1}$.

Dopo ciò la (4) prende la forma

$$\lambda_t(P - O) \times (P - O) = \lambda_t(P_1 - O) \times (P_1 - O);$$

e se da questa si sottrae l'identità

$$\lambda_t(P_1 - O) \times (P - O) = (P_1 - O) \times \lambda_t(P - O),$$

si può anche scrivere

$$\lambda_t[(P - O) - (P_1 - O)] \times [(P - O) + (P_1 - O)] = 0.$$

(1) È equivalente a uno spezzamento, come nel caso analogo dello spazio ordinario.

È il prodotto scalare di due vettori; epperò si soddisfa nel modo più generale, come si è detto nel numero precedente, ponendo

$$(P - O) + (P_1 - O) = \gamma \lambda_1 [(P - O) - (P_1 - O)],$$

ove γ è omografia assiale in S'_4 .

Di qui si ricava

$$P - O - \gamma \lambda_1 (P - O) = - (P_1 - O) - \gamma \lambda_1 (P_1 - O);$$

perciò ponendo

$$(*) \quad \alpha = 1 - \gamma \lambda_1, \quad \beta = 1 + \gamma \lambda_1,$$

si può scrivere

$$\alpha (P - O) = -\beta (P_1 - O),$$

da cui si trae

$$(5) \quad P - O = -\alpha^{-1} \beta (P_1 - O),$$

che, definisce tutte le trasformazioni di Lorentz.

L'omografia $\sigma = \alpha^{-1} \beta$ può chiamarsi perciò l'omografia di Lorentz. La β e α sono omografie orlate a nucleo emisimmetrico, associate fra loro⁽¹⁾; epperò il teorema in discorso può assumere la seguente forma espressiva, simile a quella del teorema di Cayley:

Ogni omografia di Lorentz è il prodotto di una omografia orlata a nucleo emisimmetrico per l'inversa della sua associata.

La σ si esprime mediante la sola α , giacchè si ha $\alpha + \beta = 2$ e quindi

$$\alpha^{-1} \alpha + \alpha^{-1} \beta = 2 \alpha^{-1}, \quad \alpha^{-1} \beta = 2 \alpha^{-1} - 1;$$

cosicchè la (5) diventa

$$(6) \quad P - O = (1 - 2 \alpha^{-1}) (P_1 - O).$$

Questa omografia $1 - 2 \alpha^{-1}$ essendo composta soltanto con γ (giacchè t è vettore fissato), che è omografia assiale in S'_4 , è definita in coordinate da soli sei parametri (una matrice quadrata emisimmetrica-gobba; vedi la nota).

(1) Come facilmente si vede, le γ , α e β sono rappresentate dalle matrici

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & e & f \\ -b & -e & 0 & h \\ -c & -f & -h & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \begin{pmatrix} 1-a-b-c & & & \\ a & 1-e-f & & \\ b & e & 1-h & \\ -c & -f & -h & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ -a & 1 & e & f \\ -b & -e & 1 & h \\ c & f & h & 1 \end{pmatrix}$$

ove a, b, c, e, f, h sono appunto i 6 parametri. Le α e β si possono chiamare associate, giacchè hanno gli elementi uguali e di opposto segno salvo che quelli della diagonale principale. Sono matrici orlate e il loro nucleo (cioè la matrice che resta cancellando l'ultima linea e l'ultima colonna) è una matrice emisimmetrica. La denominazione di omografie orlate a nucleo emisimmetrico mi pare perciò espressiva; ne specifica bene la forma.

Cotesta formula è molto più semplice ed esplicita di quelle del Marcolongo ⁽¹⁾:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} P - O = K\mu(P_i - O) - t' b \\ t = -(P_i - O) \times a + \cdot m t' \end{array} \right.$$

che in coordinate contiene 16 parametri (quelli di μ, a, b, m) legati dalle relazioni (in numero di 10)

$$K\mu\mu = 1 + H(b, b) \quad , \quad K\mu a = m b \quad , \quad a^2 = m^2 - 1 ;$$

onde nelle applicazioni i calcoli si complicano, dovendo tener conto di un certo numero di relazioni che da queste conseguono. Rispetto alle (7), la (6) presenta lo stesso vantaggio delle formule che, nel S_3 ordinario, contengono gli angoli Euleriani in luogo dei 9 coseni legati da 6 relazioni.

3. Le omografie assiali possono essere di tre specie: proprie, degeneri e doppiamente degeneri, secondo che mancano di vettori nulli, o ne hanno uno, o due (e in questo caso infiniti). Stiamo nell'ultimo caso; e sia dunque $\gamma j = 0, \gamma k = 0$, essendo j e k unitari-ortogonali. Sceglieremo i e t in guisa che la quadrupla (i, j, k, t) sia unitaria-ortogonale.

Allora dalla formula generale

$$\alpha v = v - \gamma v + 2(t \times v) \gamma v ,$$

che si deduce dalle posizioni fatte (*), posto successivamente $v = i, j, k, t$, si deduce

$$\alpha i = i - \gamma i \quad , \quad \alpha j = j \quad , \quad \alpha k = k \quad , \quad \alpha t = t + \gamma t .$$

Ma osservando che

$$\gamma i = -m t \quad , \quad \gamma t = m i$$

ove m è un parametro ⁽²⁾, si ha esplicitamente

$$\alpha i = i - m t \quad , \quad \alpha j = j \quad , \quad \alpha k = k \quad , \quad \alpha t = -m i + t ;$$

talchè invertendo risulta

$$\alpha^{-1} i = \frac{i - m t}{1 - m^2} \quad , \quad \alpha^{-1} j = j \quad , \quad \alpha^{-1} k = k \quad , \quad \alpha^{-1} t = \frac{t - m i}{1 - m^2} .$$

Se ora si sviluppa la (6) e si sostituisce, si trova

$$P - O = P_i - O - 2 \left\{ x_1 \frac{i - m t}{1 - m^2} + y_1 j + z_1 k + u_1 \frac{t - m i}{1 - m^2} \right\} ;$$

(1) *Les transformations de Lorentz, ecc.* « Ann. de Toulouse », 1914.

(2) Perchè $\gamma i \times i = 0, \gamma i \times j = -\gamma j \times i = 0, \gamma i \times k = -\gamma k \times i = 0$, ecc.

talchè identificando risulta

$$x = \frac{-(1 + m^2)x_1 + 2m u_1}{1 - m^2}, \quad y = y_1, \quad \tilde{z} = z_1, \quad u = \frac{2m x_1 - (1 - m^2)u_1}{1 - m^2}.$$

Basta porre $m = -\cotg \frac{\theta}{2}$ e poi $\sin \theta = \frac{v}{c}$ per ottenere quella semplice trasformazione di Lorentz che si usa nei primi studi della relatività ristretta. Questo valga come verifica della (6).

Se poi si vogliono distinguere nella (6) le coordinate spaziali dal tempo (come nelle formule di Marcolongo), basta osservare che

$$P - O = (Q - O) + u t$$

$$P_1 - O = (Q_1 - O) + u_1 t,$$

e sostituire. Si ottiene

$$Q - O + u t = \sigma(Q_1 - O) + u_1 \sigma t,$$

avendo scritto per brevità σ al posto di $1 - 2\alpha^{-1}$.

Moltiplicando scalarmente per t si ottiene

$$u = \sigma(Q_1 - O) \times t + u_1(\sigma t \times t)$$

perchè $(Q - O) \times t = 0$; e quindi sostituendo

$$Q - O = \sigma(Q_1 - O) - H(t, t) \sigma(Q_1 - O) - u_1 [H(t, t) \sigma t - \sigma t].$$

Poniamo per comodo

$$(1 - H(t, t)) \sigma = \mu$$

(prodotto di due omografie), e otteniamo

$$\begin{cases} Q - O = \mu(Q_1 - O) + u_1 \mu t \\ u = \sigma(Q_1 - O) \times t + u_1(\sigma t \times t) \end{cases}$$

che hanno la stessa forma di quelle di Marcolongo, ma senza equazioni di condizioni, perchè tutto qui è esplicito, *funzione di quella γ assiale definita da 6 parametri al massimo.*

Il teorema precedente si può manifestamente estendere a uno spazio pseudo-euclideo a un numero qualunque di dimensioni.

Idromeccanica. — *Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi.* Nota ⁽¹⁾ del CORRISP. U. CISOTTI.

1. *Circolazione intorno a un profilo circolare.* — Riferendoci al piano complesso $\zeta = \xi + i\eta$, si consideri il cerchio $|\zeta| \leq 1$, limitato dalla circonferenza γ ove $|\zeta| = 1$; è ben noto che, ponendo

$$(1) \quad f = \frac{C}{2\pi i} \log \zeta \quad , \quad W = U - iV = \frac{df}{d\zeta} = \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} ,$$

in ogni punto $|\zeta| \geq 1$, risultano definiti, in modo complesso, il potenziale cinetico e la velocità (di componenti cartesiane U e V) di una corrente

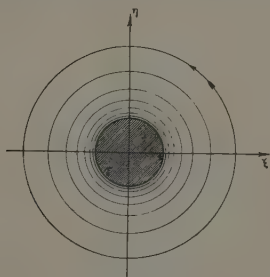


Fig. 1.

piana circolatoria intorno al profilo circolare γ essendo C la circolazione, valutata positivamente nel senso antiorario (fig. 1) ⁽²⁾. Tale corrente diviene evanescente all'infinito, il che esprimeremo dicendo che ha carattere *locale*. La risultante e il momento delle pressioni dinamiche che la corrente circolatoria esercita su γ sono notoriamente nulle. Ciò del resto scende in modo immediato, applicando le note formule di Blasius:

$$(2) \quad R_\eta + iR_\xi = -\frac{\rho}{2} \int_\gamma W^2 d\zeta \quad , \quad M = -\frac{\rho}{2} \Re \int_\gamma W^2 \zeta d\zeta ,$$

nelle quali, R_ξ e R_η sono le componenti cartesiane della risultante, M il momento rispetto al punto $\zeta = 0$ e positivo nel senso antiorario, delle

(1) Presentata nella seduta del 17 novembre 1929.

(2) I disegni delle figure furono cortesemente curati dal prof. A. Masotti.

pressioni dinamiche su γ , e ρ è la densità del liquido. \Re significa « parte reale ».

Ora, per (1), avendosi

$$W^2 = -\frac{C^2}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta^2},$$

si ottiene:

$$\int_{\gamma} W^2 d\zeta = -\frac{C}{4\pi^2} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta^2} = 0, \quad \int_{\gamma} W^2 \zeta d\zeta = -\frac{C^2}{4\pi^2} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{iC^2}{2\pi},$$

per cui da (2) scendono

$$R_{\xi} = R_{\eta} = M = 0, \quad \text{c. v. d.}$$

2. *Rappresentazione conforme di un piano con un foro qualunque su di un piano con foro circolare.* — Sia $z = x + iy$ l'affissa di un punto generico

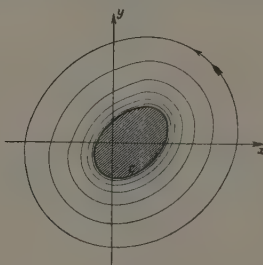


Fig. 2.

appartenente a un piano forato; sia c la linea chiusa che forma il contorno del foro (fig. 2). Vediamo come si possa mettere in corrispondenza biunivoca e conforme il piano forato z e la regione $|\zeta| \geq 1$ di un piano $\zeta = \xi + i\eta$, che è esterna al contorno (fig. 1).

Sui punti di γ si ha $\zeta = e^{i\sigma}$ con $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ e in conseguenza

$$d\zeta = ie^{i\sigma} d\sigma.$$

Sul contorno c del piano z dovrà aversi corrispondentemente

$$dz = |dz| e^{i\vartheta},$$

dove ϑ rappresenta l'angolo della tangente alla linea c coll'asse reale. Dalle due relazioni precedenti si ricava:

$$i \frac{dz}{d\zeta} = \frac{|dz|}{d\sigma} e^{i(\vartheta - \sigma)},$$

dalla quale scende che, se si scelgono i versi di percorrenza dei contorni γ e c in guisa che sia sempre $d\sigma > 0$, la parte reale della funzione

$$-i \log \left(i \frac{d\zeta}{d\zeta} \right)$$

nei punti di γ è $\vartheta - \sigma$. D'altra parte la funzione

$$-i \log \zeta,$$

nei punti di γ , ove $\zeta = e^{i\sigma}$, diviene $-i \log e^{i\sigma} = \sigma$; ne segue che la parte reale della somma delle due precedenti funzioni, cioè

$$(3) \quad F(\zeta) = -i \log \left(i \zeta \frac{d\zeta}{d\zeta} \right)$$

su γ coincide con ϑ . Si rilevi che se $\zeta = \zeta$, cioè c è pure una circonferenza di raggio unitario, dalla (3) risulta $F(\zeta) = -i \log (i\zeta)$.

Chiamando ζ_0 e ζ_0 una coppia di punti corrispondenti dei due piani forati, dalla (3) si deduce

$$(4) \quad \zeta - \zeta_0 = -i \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{iF} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Il problema della corrispondenza biunivoca e conforme tra i due piani forati dipende dunque dalla conoscenza della funzione $F(\zeta)$ ⁽¹⁾. Abbiamo rilevato che la parte reale di F sulla circonferenza γ coincide con ϑ ; ne viene che se si conosce la funzione $\vartheta(\sigma)$ per $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, cioè sui punti di γ , la nota formula di Schwarz permette di determinare la funzione F ⁽²⁾, quando si aggiunga la condizione che all'infinito F diviene logicamente infinita. La ϑ nei punti di γ è nota, ad esempio, quando c è un poligono a lati rettilinei⁽³⁾; in tal caso, mediante la (4), si sa effettivamente stabilire la relazione analitica tra ζ e ζ . Quando c fosse curvilineo si possono estendere al caso in discorso le considerazioni già note relative al problema interno⁽⁴⁾.

3. *Circolazione intorno ad un profilo privo di punti angolosi.* — Supponiamo che lungo c la tangente vari ovunque con continuità, cioè ϑ sia

(1) Per il problema interno, cioè la corrispondenza tra il cerchio $|\zeta| \leq 1$ e l'area piana racchiusa da c , cfr. la mia *Idromeccanica piana*, Milano, Tamburini, 1921, Parte prima, n. 15. Per fori poligonali a lati rettilinei può servire anche l'ultima formula del n. 73.

(2) Cfr. loc. cit., n. 9; in questo caso, problema esterno, vale ancora la (1), dedotta pel problema interno, con un semplice cambiamento di segno al secondo membro.

(3) Cfr. loc. cit., n. 16 e 73.

(4) Cfr. loc. cit., n. 25.

funzione continua di σ ; in tale caso $\frac{d\tilde{z}}{d\zeta}$ non si annulla, nè diviene infinita in alcun punto del piano forato circolarmente, cioè per $|\zeta| \geq 1$; ne consegue che il suo reciproco $\frac{d\zeta}{d\tilde{z}}$, considerato come funzione di ζ , nè si annulla nè diviene infinito per $|\zeta| \geq 1$. Ciò premesso, se nella prima delle (1) consideriamo f come funzione di \tilde{z} per mezzo di ζ , avremo il potenziale di una corrente circolatoria del piano \tilde{z} , intorno al profilo c ; la velocità nel generico punto \tilde{z} sarà definita da

$$w = \frac{df}{d\tilde{z}},$$

ovvero, tenendo presente la seconda delle (1),

$$(5) \quad w = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\tilde{z}} = \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\tilde{z}},$$

dalla quale risulta, per le ipotesi ammesse sopra riguardanti $\frac{d\zeta}{d\tilde{z}}$, che w non diviene mai infinita e si annulla solamente all'infinito.

Applicando le formule di Blasius, le componenti cartesiane della risultante delle pressioni dinamiche subite da c da parte della corrente, sono definite dalla relazione complessa

$$R_y + i R_x = - \frac{\rho}{2} \int_c w^2 d\tilde{z}.$$

Per le (5), avendosi successivamente

$$w^2 d\tilde{z} = w^2 \frac{d\tilde{z}}{d\zeta} d\zeta = - \frac{C^2}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta^2} \frac{d\zeta}{d\tilde{z}} d\zeta,$$

l'integrale della precedente esteso a c si può trasformare in un integrale esteso al corrispondente contorno circolare γ , con che si ottiene:

$$(6) \quad R_y + i R_x = \frac{\rho C^2}{8\pi^2} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{d\tilde{z}} \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

La $\frac{d\zeta}{d\tilde{z}}$ per ipotesi è regolare per $|\zeta| \geq 1$, è dunque sviluppabile in serie assolutamente convergente, contorno incluso, di potenze negative di ζ , ne segue che l'integrale è nullo; si ha dunque, come nel caso di un profilo circolare,

$$R_x = R_y = 0.$$

4. *Circolazione intorno a un profilo con punti angolosi.* - Supponiamo ora che c abbia punti angolosi; per semplicità supponiamo dapprima un

solo punto angoloso, sia esso *saliente* (fig. 3) oppure *rientrante* (fig. 4)⁽¹⁾. In tal caso detto ν l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso (nullo quando è una cuspide) la velocità w diviene ivi infinita di ordine $1 - \frac{\nu}{\pi}$ quando si tratta di saliente e nulla del medesimo ordine quando si tratta di rientrante⁽²⁾.

Riferiamoci al primo caso (fig. 3); dalla (5) scende che, chiamando ζ_0 l'affissa del punto della circonferenza γ che corrisponde al punto angoloso ζ_0 di c , dovrà aversi:

$$(7) \quad \frac{d\zeta}{d\chi} = \frac{\Omega(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^{1 - \frac{\nu}{\pi}}}, \quad (0 \leq \nu < \pi)$$

indicando $\Omega(\zeta)$ una funzione regolare per $|\zeta| \geq 1$ e ivi sviluppabile in

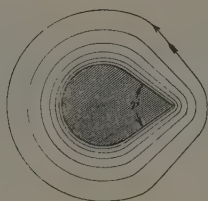


Fig. 3.

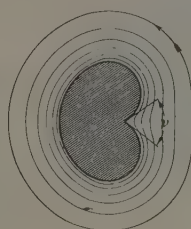


Fig. 4.

serie di potenze negative di ζ , assolutamente convergente in tutto il piano forato, contorno incluso, e tale che $\Omega(\zeta_0)$ non è nullo.

Per la (7) l'applicazione della (6) al caso attuale fornisce

$$R_y + iR_x = \frac{\rho C^2}{8\pi^2} \int_{\gamma} \frac{\Omega(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_0)^{1 - \frac{\nu}{\pi}}}.$$

Se ν è diverso da zero l'integrale è nullo, se $\nu = 0$ si ha, per un noto teorema di Cauchy⁽³⁾,

$$\int_{\gamma} \frac{\Omega(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_0)} = i\pi \frac{\Omega(\zeta_0)}{\zeta_0^2},$$

per cui

$$(8) \quad R_y + iR_x = \frac{i\rho C^2}{8\pi \zeta_0^2} \Omega(\zeta_0).$$

(1) Cfr. loc. cit., n. 74.

(2) Cfr. loc. cit., nn. 73 e 74.

(3) Cfr. HURWITZ-COURANT, *Funktionentheorie*, III Auflage; Berlin, Springer, 1929, p. 335, formula (3).

Ne segue che, essendo $\Omega(\zeta_0)$ diverso da zero, come si è notato sopra, il profilo subisce da parte della corrente un complesso di pressioni *la cui risultante non è nulla*.

Se si tratta di un rientrante (fig. 4), avendosi allora

$$\frac{d\zeta}{d\gamma} = \Omega(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^{1-\frac{\nu}{\pi}}, \quad (0 \leq \nu < \pi)$$

la (6) diviene:

$$R_y + iR_x = \frac{\rho C^2}{8\pi^2} \int_{\gamma} \Omega(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^{1-\frac{\nu}{\pi}} \frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

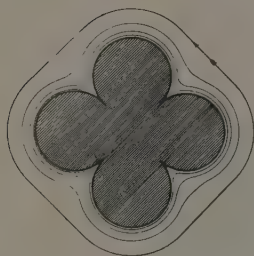


Fig. 5.

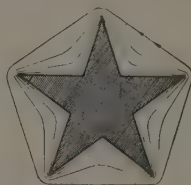


Fig. 6.

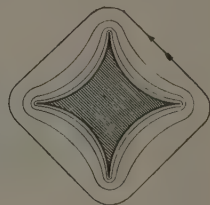


Fig. 7.

l'integrale, in ogni caso, cioè sia per ν diverso da zero, sia per $\nu = 0$, è nullo, per cui $R_x = R_y = 0$.

Concludendo: *se il punto è una cuspidale saliente esiste una risultante non nulla delle azioni dinamiche*⁽¹⁾, in tutti gli altri casi (cioè profilo regolare, oppure con punto angoloso non cuspidale, oppure con cuspidale rientrante) la predetta risultante è nulla.

Se c presenta quantisivogliano punti angolosi e cuspidi rientranti (fig. 5), oppure anche punti angolosi salienti *non cuspidali* (fig. 6) la risultante delle pressioni dinamiche della corrente circolatoria su c è sempre nulla.

Se c ammette più cuspidi salienti $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ (fig. 7) chiamando $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ i corrispondenti punti di γ , la (7) si modifica nella seguente

$$\frac{d\zeta}{d\gamma} = \frac{\Omega(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)\dots},$$

(1) Ecco un esempio semplice che illustra, una volta di più, la già rilevata influenza delle singolarità analitiche nelle questioni idromeccaniche. Cfr. B. FINZI, *Sulle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi*. Comunicazione fatta al Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, settembre 1928. Un breve sunto è pubblicato nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », vol. VII, p. 258. Vedi anche ROSENBLATT, *Sur le théorème de Kutta-Joukowski*. Questi « Rendiconti », vol. V (1° sem. 1927), p. 564.

mentre la (6) fornisce

$$R_y + i R_x = \frac{\rho C^2}{8 \pi^2} \int \frac{\Omega(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots} \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} & \int \frac{\Omega(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots} \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \\ & = i\pi \left\{ \frac{\Omega(\zeta_0)}{(\zeta_0 - \zeta_1)(\zeta_0 - \zeta_2) \dots} + \frac{\Omega(\zeta_1)}{(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \zeta_2) \dots} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

per cui

$$(9) \quad R_y + i R_x = \frac{i \rho C^2}{8 \pi} \left\{ \frac{\Omega(\zeta_0)}{(\zeta_0 - \zeta_1)(\zeta_0 - \zeta_2) \dots} + \frac{\Omega(\zeta_1)}{(\zeta_1 - \zeta_0)(\zeta_1 - \zeta_2) \dots} + \dots \right\}.$$

In tal caso la risultante delle azioni dinamiche è nulla solamente se è nulla l'espressione entro $\left\{ \right\}$, in caso opposto è diversa da zero.

In una prossima Nota mi riservo di applicare i risultati precedenti ad alcuni esempi particolarmente illustrativi.

Chimica. — *L'allumina Blanc* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ del Socio N. PARRAVANO e di E. ONORATO.

In una Nota precedente ⁽³⁾ sono state descritte alcune proprietà dell'allumina che si ottiene per scomposizione dell'esaidrato del cloruro di alluminio e che è stata chiamata col nome di allumina Blanc. Ulteriori ricerche eseguite su questo prodotto hanno permesso di caratterizzarne la natura e di precisarne meglio le proprietà cristallografiche ed il comportamento al crescere della temperatura.

L'ossido di alluminio che si ottiene per demolizione del cloruro esaidrato (180°) è otticamente anisotropo. Ciò nonostante fino a 450° esso

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1929.

(3) N. PARRAVANO e V. MONTORO, «Rend. R. Acc. Lincei», [6], 7, [6], 1° sem., 885 (1928).

non dà spettro di diffrazione dei raggi Röntgen⁽¹⁾. Uno spettro compare invece già a 540° dopo 58 ore di ricottura, ed esso si conserva identico (v. figg. 1, a, b, c) comunque sia stato riscaldato l'ossido, fin verso i 900°. Come si rileva dalla tabella III del lavoro citato, si tratta di una stessa modificazione, la quale però differisce dal corindone, il cui spettro verso i 950° comincia a comparire dopo tre ore di riscaldamento (v. figg. 1, d, e).

— L'allumina preparata tra 180° e 450°, malgrado il carattere amorfo della diffrazione dei raggi Röntgen, è da ritenersi cristallina, perchè birifrangente nel senso normale. Infatti è da escludere che si tratti di doppia rifrazione anomala, quale si ottiene per trazione o per compressione di sostanze isotrope. E questo, sia perchè non potrebbe spiegarsi come la sostanza, liberamente scaldata, possa deformarsi, per effetto della temperatura, in una direzione piuttosto che in un'altra, sia perchè la birifrazione anomala di solito ha un valore basso e perciò richiede un certo spessore per essere osservata.

L'allumina Blanc invece è in minutissimi grani, e, a nicols incrociati ed a luce parallela, presenta il fenomeno della birifrazione molto evidente. È inoltre da escludere che si tratti di doppia rifrazione apparente, come nel caso osservato dal Rinne⁽²⁾ in una argilla fibrosa, perchè, immergendo la la sostanza nell'olio, il fenomeno persiste senza attenuarsi.

Il carattere amorfo, che invece risulterebbe dall'esame röntgenografico, si può ritenere una contraddizione più apparente che reale, giacchè sono noti casi in cui i raggi X possono non rivelare lo stato cristallino.

Restando nel metodo delle polveri, si deduce direttamente dalla legge di Bragg ($n\lambda = 2d \sin \vartheta$) che, se $d < \frac{1}{2}\lambda$, la diffrazione non si verifica qualunque sia n (ordine d'interferenza); se invece d è troppo grande rispetto alla lunghezza d'onda adoperata, non vi può essere sufficiente risoluzione delle righe d'interferenza. L'assenza di uno spettro cristallino può dipendere ancora da un'altra causa che è in relazione all'ampiezza delle vibrazioni termiche degli atomi: infatti il Debye⁽³⁾ per primo teoricamente, ed altri⁽⁴⁾ con esperienze, hanno dimostrato che, aumentando la temperatura, le singole righe d'interferenza di una sostanza cristallina non si spostano, ma diminuiscono di intensità.

(1) Lo spettro riportato nel lavoro citato è stato attribuito all'allumina a 250° per scambio di campioni.

(2) «Zeit. f. Krystallographie u. Mineralogie», 50, 62 (1912).

(3) «Verh. Deutsch. Phys. Gesell.», 15, 738 (1913); «Ann. d. Physik», 43, 49 (1913).

(4) I. BACKHURST, «Proc. Roy. Soc.», CII, 340 (1922); M. LAUE e J. S. van der LINGEN, «Physikal. Zeit.», 15, 75 (1914).

Nel nostro caso le fotografie furono fatte a temperatura ambiente, ma questo non osterebbe una tale interpretazione, potendo le ampiezze delle vibrazioni termiche degli atomi essere sufficientemente grandi, anche a temperatura ordinaria. E questa è la spiegazione che si dà infatti per il potassio, che, pur essendo cristallizzato⁽¹⁾, non dà spettro di diffrazione a temperatura ordinaria, ma a -150° ⁽²⁾.

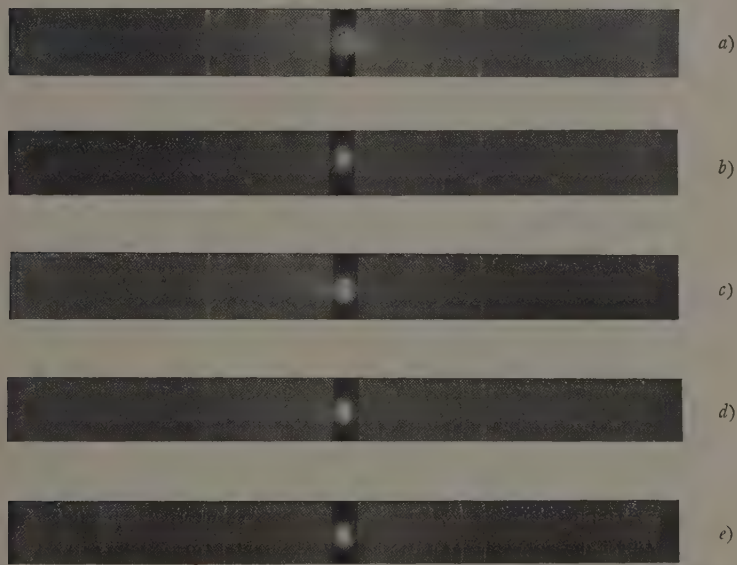


Fig. 1. — Spettro di diffrazione dell'allumina ottenuta per scomposizione dell'esaidrato del cloruro di alluminio. Metodo delle polveri. Radiazioni K del Cu.

a) b) e c) dopo riscaldamento a 550° , 800° e 900° . d) dopo riscaldamento a 950° . e) spettro del corindone.

Che tra queste considerazioni teoriche debba ricercarsi la causa dell'apparente contraddizione osservata per l'allumina preparata tra 180° e 450° , non abbiamo sufficienti elementi per sostenerlo. Tuttavia crediamo più verosimile ammettere che la mancanza dello spettro di diffrazione dei raggi X sia dovuto allo stato « semi-cristallino » di questa sostanza. Più volte è stato osservato lo stesso fenomeno per le allumine e per la silice preparati dalla decomposizione di alcuni minerali, ed il Wychoff⁽³⁾, partendo da osservazioni purtroppo inedite, classifica infatti tali prodotti tra i « semi-cristalli » e cita, come caso

(1) C. E. LONG, « J. Chem. Soc. », 13, 122 (1861).

(2) L. W. MCKECHAN, « Proc. Nat. Acc. Sci. », 8, 254 (1922).

(3) *The structure of Crystals*, 379-382, New-York (1924).

speciale, quello della silice ottenuta dalla decomposizione del minerale gillepsite, silicato complesso di bario e di potassio, per azione dell'acido cloridrico.

— Le difficoltà incontrate per stabilire la simmetria e le costanti cristallografiche dell'allumina preparata tra 540° e 950° sono dovute alla natura stessa della sostanza, che non consente altro metodo d'analisi röntgenografica all'infuori di quello delle polveri. Le possibilità del metodo però in questi casi sono molte limitate. Infatti, per l'interpretazione delle fotografie che così si ottengono, non esiste altro sistema praticamente applicabile che quello grafico di Hull, il quale però è limitato ai sistemi di simmetria aventi al più una sola variabile tra le costanti cristallografiche. Nè l'esame ottico, avendo escluso il monometrico, ha potuto darci ulteriori elementi di giudizio. Ci è stato perciò necessario ricorrere ad altri concetti per limitare il numero delle possibili simmetrie di questa allumina.

Una prima limitazione è stata fatta tenendo conto delle relazioni che esistono tra simmetria e composizione chimica: infatti se i tre atomi di ossigeno sono da considerarsi chimicamente equivalenti, si può escludere la possibilità di una simmetria tetragonale, rombica, monoclina e triclina, non essendovi per i gruppi spaziali di questi sistemi posizioni equivalenti con una periodicità divisibile per tre ⁽¹⁾.

Le simmetrie rombica, monoclina e triclina sono anche da escludersi per l'esiguo numero delle righe d'interferenza.

Seguendo questi criteri abbiamo stabilito, con i grafici di Hull, tutte le possibilità per il romboedrico e per l'esagonale semplice. L'esagonale compatto, data la labilità della fase, è stato messo da parte.

In seguito al calcolo del numero di molecole (m) per ogni possibile cella cristallina trovata, si è potuto ancor oltre diminuire il numero delle possibilità eliminando quelle che davano per m un valore troppo lontano dalle ammissibili approssimazioni a numero intero.

Data l'importanza della densità per questo calcolo, essa è stata determinata nel vuoto, e da più esperienze è risultata uguale a 3,52.

Nella tabella I sono riportate perciò le possibilità rimanenti per il romboedrico e per l'esagonale. Il numero delle interferenze riportate è inferiore a quello che risulta dalle figg. 1, a , b , c , perchè le linee $K\beta$ sono state trascurate. Nella colonna N è indicata la successione delle righe d'interferenza. Le lettere ff, m, d, ecc. sono le comuni sigle per indicare le intensità. Gli indici sono riferiti alla croce bravesiana, perciò il punto sostituisce il terzo indice il quale è uguale alla somma negativa dei primi due.

I punti interrogativi indicano linee indecifrabili del grafico di Hull. Il tratto invece indica che la riga non è ordinabile. Nel caso di una o due

(1) R. WYCKOFF, *The analytical expression of the results of the theory of space groups*, Washington (1922).

TABELLA I.

N.	I	sen α	Romboedrico Indice per 1 : c =					Esagonale Indici per c : =	
			0,28	0,34	0,46	0,57	0,62	2,5	2,84
2	m	0,320	30.0	30.0	12.1	30.0	20.1	10.0	10.0
3	dd	0,338	10.1	—	22.0	—	—	10.1	10.1
5	f	0,3895	20.1	12.1	10.2	20.2	10.2 30.0 12.1	10.2	00.4
7	d	0,5075	13.1	40.1	33.0	13.2	13.1 12.2	—	00.4
8	ff	0,551	33.0	10.2 33.0	24.1	33.0	13.2 00.3 33.0 30.3 23.2 50.1	00.5 11.0	11.0
10	md	0,674	20.2 15.1	13.2	—	?	?	20.2	11.4
12	dd	0,744	13.2	44.0	10.4 ?	33.0 44.0	10.4 50.2 15.1	10.6	20.4
13	md	0,776	40.2	50.2	36.0	40.4	20.4 24.2 60.0	00.7 20.4	00.8
15	ddd	0,843	36.0	11.3 ?	40.4	36.0	— ?	10.7	12.0 10.8
17	md	0,870	15.2	—	?	—	13.4 33.3 ?	11.6	12.2 20.6
18	m	0,954	00.3 ? ?	14.3 ?	?	90.0	20.5 ? ?	11.7 12.4 ?	11.8
Media Co in Å			8,45	8,30	9,04	8,32	6,80	2,776	2,78

TABELLA II.

	1 : c	Co in Å	V ₀	m (calc.)
Romboedrico	0,28	8,45	48,77	1,02
	0,34	8,30	56,12	1,108
	0,46	9,04	98,10	2,06
	0,57	8,32	94,76	1,99
	0,62	6,80	56,28	1,18
Esagonale	2,5	2,776	46,32	0,97
	2,84	2,78	52,84	1,11
Corindone	1,37	4,75	42,27	1

righe deboli non ordinabili abbiamo creduto opportuno non eliminare la possibilità.

Come abbiamo già detto, a 950° questa fase comincia a trasformarsi in corindone le righe del quale cominciano a comparire già dopo tre ore di riscaldamento. Questo valore coincide con quello dato da Hulrich⁽¹⁾ quale punto di trasformazione di un'allumina monometrica ($\gamma \text{ Al}_2\text{O}_3$) che egli identifica con quella solubile negli acidi trovata da Tammann. L'Hulrich però, dopo un accenno fugace, non pare sia ritornato sull'argomento. Potrebbe darsi perciò che l'allumina di Hulrich sia la stessa (romboedrica o esagonale) da noi trovata.

Se ora si cerca di stabilire quale relazione esista tra le due allumine da noi accertate e il corindone, nulla si può dire per l'allumina preparata tra i 180° ed i 450° . Per l'altra è invece evidente che, per qualsiasi possibilità (vedi tabella II), i suoi atomi sono tra loro più liberi di quelli del corindone.

— Da queste indagini rimane pertanto accertata l'esistenza di una allumina semicristallina - per servirci della terminologia di Wyckoff - proveniente dalla scomposizione termica dell'esaidrato del cloruro di alluminio, e di un'altra allumina che si origina da questa a temperatura superiore.

La prima presenta la doppia rifrazione caratteristica delle sostanze cristalline non monometriche, la seconda dà un netto spettro di interferenza con i raggi X il quale porta ad assegnarle una simmetria esagonale o romboedrica. Il passaggio dalla prima alla seconda forma si compie con notevole aumento di densità la quale passa da 2,2 a circa 3,5 ed è pertanto accompagnata da un avvicinamento degli atomi nello spazio che può pensarsi possa intervenire anche fra gli atomi di una stessa cella.

Anche il passaggio dalla seconda forma al corindone è accompagnato da aumento di densità, da 3,5 a 3,9, e dalla tabella II infatti risulta, in base al rapporto tra volume (V_0) e numero di molecole, (m), che nella cella del corindone gli atomi sono fra di loro più avvicinati.

(1) HULRICH, *Saertrykk av Norsk Geologisk Tidsskrift*, 8, 115 (1924).

Oceanografia. — *Il regime delle correnti nello stretto di Bab-el-Mandeb, in epoca estiva.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. F. VERCELLI.

La campagna talassografica 1923-24 ⁽²⁾ aveva portato un largo contributo alle conoscenze delle caratteristiche fisiche e dinamiche del Mar Rosso nell'epoca dei Monsoni invernali (ottobre-maggio); in particolare erano state analizzate le correnti di marea e le coesistenti correnti progressive, e si potè giungere alla compilazione di tavole generali di previsione delle correnti, per qualsiasi epoca desiderata, nella zona di Bab-el-Mandeb.

Nessuna campagna scientifica fu mai eseguita, in Mar Rosso, in epoca di Monsoni estivi (giugno-settembre). Le poche notizie possedute sul regime estivo delle acque sono state recate da navi idrografiche, o commerciali, in transito. Tanto i testi oceanografici, come quelli nautici, deplorano le scarse e incerte conoscenze tuttora esistenti sul regime estivo delle correnti nel Mar Rosso, specialmente nella zona di maggiore interesse: lo stretto di Bab-el-Mandeb e le adiacenze.

Per colmare tale lacuna si trasse profitto, nel corrente anno, della possibilità di svolgere un ciclo di misure estive, presentatasi alla fine di una crociera talassografica svolta in parallelo colla lunga campagna idrografica della R. Nave « Magnaghi ». La crociera era stata compiuta colla R. Nave « Lepanto » e in parte anche colla stessa « Magnaghi ». Per il progettato ciclo di misure estive fu destinata però la piccola cannoniera « Porto Corsini », rivelatasi poi non molto adatta per l'impresa. A parte le accascianti condizioni climatiche nell'epoca dei lavori compiuti fra il 25 giugno e l'8 luglio, nello stretto di Bab-el-Mandeb, ove si volevano compiere le ricerche principali, si trovarono costantemente forti venti da NW e mare agitato, che imposero forzate limitazioni allo sviluppo del progettato programma.

Si poterono compiere due stazioni con nave all'ancora, ognuna per la durata di circa 36 ore, ai due margini della fossa marina sulla linea Assab-Mokha. Restarono invece interrotte, dopo poche ore di osservazioni, due stazioni nella zona di maggior interesse, sulla trasversale di Ras Dumeira (confine coloniale italo-francese), una volta per strappamento dell'ormeggio e l'altra perchè il vento e la corrente, agendo a guisa di coppia, facevano ruotare la nave attorno al punto di ormeggio, attorcigliando la catena.

(1) Presentata nella seduta del 17 novembre 1929.

(2) Campagna idrografico-scientifica in Mar Rosso, R. Nave « Ammiraglio Magnaghi », 1923-24; F. VERCELLI, *Ricerche di oceanografia fisica*, Parti I, II, III e IV; M. PICCOTTI, *Ricerche di oceanografia chimica*, « Annali Idrografici », Genova, voll. XI e XI bis, 1925-27.

Dati molto significativi furono poi raccolti in tre stazioni con nave alla deriva, lungo l'asse della fossa marina, fra Perim e le isole Haycock (a SW delle Hanish).

Il complesso delle ricerche compiute non è sufficiente per una soluzione quantitativa del problema; basta tuttavia per precisare finalmente quali siano i caratteri essenziali dei moti marini, in quella regione, in epoca estiva.

Si è verificato, anzitutto, che scindendo la corrente effettiva osservata nei suoi due elementi componenti, corrente di *marea* e corrente *progressiva*, la prima risulta del tutto conforme alle previsioni fatte nelle citate tavole delle correnti per lo stretto di Bab-el-Mandeb e per le adiacenze. Una delle questioni che ci eravamo proposto, il controllo di dette tavole, per quanto con forzate limitazioni, poté dunque essere svolta con risultato soddisfacente.

Per quanto riguarda le correnti *progressive*, dobbiamo ricordare che esse risultano dalla somma di correnti di *densità*, di *deriva*, di *compensazione*, ecc. Hanno carattere quasi stazionario, in intervalli anche abbastanza estesi di tempo, presentando variazioni assai lente, principalmente di carattere stagionale. Qualunque sia la figurazione data alle correnti, sia essa scalare o vettoriale, la corrente progressiva sovrapposta a quella di marea è resa evidente dalla posizione dell'asse medio attorno al quale si sviluppano le fluttuazioni dei moti di marea. Nell'epoca dei Monsoni invernali si era rilevato che le correnti progressive danno origine a due potenti strati sovrapposti, scorrenti in contrarie direzioni. Quello superiore va dal golfo di Aden al Mar Rosso; tale direzione è concorde tanto per le correnti di densità, quanto per quelle di deriva e di compensazione per le acque evaporate in Mar Rosso, non sostituite da afflussi meteorici e fluviali. La velocità è dell'ordine stesso delle massime velocità dei moti di marea (1, 6 miglia all'ora); essa decresce però rapidamente in profondità e si annulla verso la quota di m. 100. Inferiormente prende origine il secondo strato, con velocità crescenti verso il fondo e rivolte dal Mar Rosso all'Oceano Indiano.

Era dubbio se in estate si avesse ancora un regime analogo; secondo osservazioni di alcune navi idrografiche italiane e notizie date nel portolano inglese ⁽¹⁾, la corrente progressiva superficiale, durante i Monsoni estivi, si invertirebbe, scorrendo dal Mar Rosso al golfo di Aden; ma il fatto non era stato controllato sinora con misure precise. Esso, ad ogni modo, dovrebbe essere associato a mutazioni profonde nel regime dinamico delle acque interne.

La questione può essere ora ben definita sulla base delle nuove misure. Facendo astrazione dai moti alterni di marea, e considerando le sole correnti stazionarie coesistenti, risulta che in regime estivo, a Bab-el-

(1) *Red sea and gulf of Aden pilot*, § 7.

Mandeb e nel contiguo bacino inferiore del Mar Rosso, si hanno tre distinti strati sovrapposti di acque aventi diversi caratteri fisici e opposte direzioni di moto.

a) Il primo strato si estende fra la superficie e una quota di circa m. 30; l'acqua scorre dal Mar Rosso al Golfo di Aden, con velocità debole in superficie (circa mezzo miglio all'ora, al massimo; può darsi però che in luglio avanzato e in agosto si giunga sino a un miglio all'ora, come ammette il portolano inglese); in profondità la corrente si estingue rapidamente.

La massa acquea ha condizioni prossime all'omotermia (31° – 30° fra le quote m. 0–25) e all'omoalinità (37–36.8 ‰ di salinità).

La corrente ha velocità maggiori sulla costa araba che non verso quella africana; presso Ras Dumeira sembra prevalere anzi una controcorrente rivolta verso NW. Risulta chiaramente dimostrato che non solo in epoca invernale, ma anche in regime estivo, è del tutto errata la circuitazione ciclonica ammessa dal Luksch⁽¹⁾ sulla base delle distribuzioni della temperatura e della salinità.

b) Il secondo strato si estende da circa 40 metri a profondità che non abbiamo potuto precisare esattamente, ma che pare prossima alla quota di m. 150. Scorre dal Golfo di Aden verso il Mar Rosso, con velocità elevate nella parte superiore e media. La massa ha i caratteri tipici di acqua oceanica e transita nello stretto e nel Mar Rosso meridionale dopo aver subito un rilevante moto ascensionale di almeno m. 50–100. La temperatura raggiunge 20° – 21° già alla quota di m. 50 e scende a minimi di 17° .2 fra m. 100 e 150. La salinità oscilla fra 36–35.8 ‰.

Nel breve tratto fra circa m. 30–40 avviene dunque un brusco salto di 10° nella temperatura e 1 ‰ nella salinità, come se i due strati contigui, scorrenti in opposte direzioni, fossero limitati da un sottile setto di separazione, nel quale resterebbero localizzati i moti turbolenti e i rimescolamenti dei due distinti tipi di acque.

c) Il terzo strato si estende da circa m. 150 verso il fondo, che nel bacino attiguo allo stretto raggiunge al massimo m. 250. Scorre, come quello superficiale, dal Mar Rosso verso l'Oceano, portando acque tipiche abissali del Mar Rosso, con alta salinità (39–40 ‰) e temperature che si elevano sino a $22^{\circ}.5$, presentando quindi salti di 4° – 5° nella temperatura, e di 4 ‰ nella salinità, rispetto allo strato b).

Secondo la terminologia proposta dal Defant⁽²⁾, i tre strati considerati si comportano come distinti *corpi d'acqua* (Wasserkörper), analogamente a quanto avviene nei moti oceanici stazionari. Fra strato e strato esiste una

(1) J. LUKSCH, *Expedition S. M. Schiff «Pola» in das Rothe Meer.* «Denk. d. kais. Akad. d. Wiss.», Wien, Band LXIV.

(2) A. DEFANT, *Stabile Lagerung ozeanischer Wasserkörper*, ecc. «Veroff d. Inst. f. Meereskunde», n. F., Reihe A, H. 19, Berlin 1929.

sottile zona, assimilabile, come si usa, a una superficie di discontinuità, attraverso la quale i caratteri fisici e dinamici delle acque subiscono bruschi salti.

Il moto convettivo, che è associato a quello advettivo nello strato *b*), porta in Mar Rosso acque emergenti da strati oceanici più profondi, così che tutto lo strato *b*) assume temperature più basse di quelle che, a pari quota, si hanno nel contiguo Oceano. In inverno tali moti convettivi non si sviluppano. Perciò si constata questo fatto paradossale: nel bacino estremo del Mar Rosso, da Perim sino oltre le isole Hanish, le acque interne fra m. 40 e 150 sono da 4° a 5° più fredde che nell'epoca invernale. Nelle precedenti campagne non si erano mai trovate, in quel bacino, temperature inferiori a 22°.7; ora si ebbero minimi di 17°.2, e massimi, presso il fondo, di 22°.5.

Lo strato *b*) mantiene una debolissima componente verticale, sino alla fossa che taglia la piattaforma SW delle Hanish; ivi la refrigerazione è sentita in superficie, ove si hanno solo 30°.4, invece dei 31° che, nell'epoca stessa, dominano altrove; ivi sono pure manifesti il graduale sollevamento delle superficie di discontinuità e un maggiore effetto del rimescolamento interno; risultano attenuati alquanto i salti termici e salini dianzi descritti.

Le misure compiute sulla « Magnaghi », ai margini orientali della piattaforma delle Dahalak, presso l'Isola di Harmil, indicano che l'inversione superficiale delle correnti progressive prende sviluppo già al principio di giugno e si estende sino a quelle latitudini. Forse il fenomeno interessa tutto il Mar Rosso. È noto infatti che un'inversione analoga delle correnti progressive caratterizza il regime stagionale delle correnti nel canale di Suez.

Mentre in epoca invernale gli elementi costituenti la corrente progressiva hanno verso concorde, in estate essi presentano direzioni contrarie. Le correnti di *densità* e di *compensazione* per il dislivello che tende a formarsi per *evaporazione*, scorrono dall'Oceano all'interno del Mar Rosso; la corrente di *deriva*, sviluppata dall'azione dei Monsoni estivi, volge invece in opposta direzione. E poichè il moto risultante è rivolto appunto come la corrente di deriva, segue che questa è chiaramente l'elemento componente di maggiore importanza. Analoga ammissione avevamo già fatto in relazione al regime delle correnti invernali.

In inverno, date le alte velocità della corrente progressiva entrante in Mar Rosso, il moto effettivo, risultante dalla somma dei moti progressivi e di marea, non subisce inversioni in superficie, ove l'acqua entra normalmente sempre in Mar Rosso. In estate invece, essendo assai debole la corrente progressiva, prevalgono superficialmente i moti di marea e si hanno inversioni regolari, facilmente prevedibili colla scorta delle tavole delle correnti.

Dal punto di vista idrodinamico interessa esaminare le condizioni di stabilità nelle zone di discontinuità fra strato e strato. Dall'osservazione risulta che i tre corpi d'acqua considerati hanno ognuno temperature e salinità prossimamente omogenee; le masse acquee conservano cioè, con limitate alterazioni, i caratteri originari delle zone di provenienza; esse si rimiscolano assai lentamente e gradualmente, al crescere della distanza dallo stretto, e ciò per quanto la sovrapposizione di moti progressivi quasi stazionari e di correnti alterne di marea determini complicazioni e alternanze nei moti effettivi, quali sono considerate e illustrate nella Parte IV della citata relazione sulla Campagna 1923-24 ⁽¹⁾. Il passaggio dalle condizioni tipiche di uno strato a quelle dello strato contiguo avviene rapidamente attraverso ad un setto di limitatissimo spessore.

Una semplice spiegazione dei fenomeni dinamici di questo tipo, sia per l'aria, come per l'atmosfera, è data in una recente Nota di Th. Hesselberg ⁽²⁾. Partendo dal concetto di *accelerazione di stabilità* (Stabilitätsbeschleunigung) sulle superficie limitanti distinti corpi d'acqua, o d'aria, si giunge a dimostrare che quando una particella fluida passa da uno ad altro corpo, dopo essersi scostata lievemente dalla superficie di discontinuità retrocede verso la zona di partenza, così da rendere estremamente limitati gli scambi termici e salini fra le due masse contigue. Le superficie di discontinuità esercitano cioè la funzione di strati di sbarramento.

(1) Si veda anche G. SCHOTT, *Ueber die Wasserbewegungen im Bab-el-Mandeb*. « Ann. d. Hydr. und mar. Meteor. », 1929, H. I.

(2) Th. HESSELBERG, *Die Stabilitätsbeschleunigung im Meere und in der Atmosphäre*. « Ann. d. Hydr. und mar. Meteor. », 1929, H. IX.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sulle coordinate geodetiche lungo una linea.*
Nota I di E. BORTOLOTTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. L'uscita di alcuni recenti lavori sulle *coordinate geodetiche* o *cartesiane lungo una curva assegnata* (e su altri argomenti che a questo si connettono)⁽²⁾ m'induce a pubblicare una dimostrazione dell'esistenza di tali coordinate, che ebbi ad esporre (in forma sostanzialmente analoga a quella attuale) in una monografia sul parallelismo, non pubblicata finora⁽³⁾. La mia dimostrazione, di carattere analitico, benchè basata su chiare premesse geometriche, non ha certo la notevole semplicità della dimostrazione data dalla prof. Nalli (loc. cit.); ma credo non inutile indicarla, perchè raggiunge pure abbastanza semplicemente lo scopo che si propone; di stabilire le effettive formule di passaggio da coordinate curvilinee qualunque a coordinate geodetiche lungo la linea assegnata⁽⁴⁾. E insieme, mette in evidenza questo fatto, a cui forse non si è dato finora il dovuto rilievo; che dalle usuali coordinate geodetiche lungo una linea, che diremo: di Fermi, caratterizzate dalle (22) n. 5, vanno distinti altri sistemi di coordinate soggetti a condizioni meno restrittive (le (7) n. 2), ma pure dotati di alcune delle più notevoli proprietà delle coordinate di Fermi: a cui dunque potranno utilmente sostituirsi, quando la natura del problema lo permetta. Tali coor-

(1) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(2) Ved. P. NALLI, *Sopra le coordinate geodetiche*. Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. VII, 1928, pp. 195-198; *Sul parallelismo di Levi-Civita e certe possibili estensioni*. Ibid., pp. 380-383; *Parallelismo e coordinate geodetiche*. Ibid., vol. IX, 1929, pp. 526-530; *Derivazione di un tensore lungo una linea*. Ibid., pp. 616-620; *Sul parallelismo e le coordinate geodetiche*. « Boll. U. M. I. », VIII, 1929, pp. 233-235; J. DUBORDIEU, *Sopra le coordinate cartesiane lungo una curva*. Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. V, 1927, pp. 654-655; *Quelques applications de la théorie des coordonnées géodésiques le long d'une courbe*. Ibid., vol. VII, 1928, pp. 707-709.

(3) *Parallelismo di Levi-Civita e recenti progressi della geometria differenziale*, premiata dalla R. Accademia di Napoli, a cui fu presentata il 31 maggio 1928. Tale dimostrazione ho sviluppato, da un punto di vista un po' diverso, anche nel mio corso di Geometria Superiore tenuto a Bologna nel 1928-29.

(4) Si vedrà che la mia dimostrazione, pure essendo condotta in modo diverso e ispirata ad altre vedute, ha dei punti di contatto con quella data nel 1926 dal prof. LEVI-CIVITA (*Sur l'écart géodésique*. « Mathem. Annalen », B. 97, 1926, pp. 291-320; spec. pp. 298-310). Cfr. anche: L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, New York, 1927, pp. 64-68.

dinate ha introdotto J. A. Schouten, nel 1918⁽¹⁾, e credo perciò doveroso chiamarle *coordinate geodetiche di Schouten* lungo la curva supposta.

2. Siano a_{rs} le componenti (covarianti) del tensore fondamentale della metrica, siano $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ t \end{smallmatrix} \right\}$ i simboli di Christoffel di seconda specie in una V_n riemanniana in cui $x^r (r, s, t, u, v = 1, 2, \dots, n)$ sono coordinate curvilinee. Diciamo *vettori-unità* (controvarianti) di questo sistema coordinato i vettori $e_{(1)}, e_{(2)}, \dots, e_{(n)}$ di componenti (controvarianti) $(10 \dots 0), (01 \dots 0), \dots, (00 \dots 1)$, cioè

$$(1) \quad e_{(r)}^s = a_r^s, \quad (= 0 \text{ per } s \neq r; = 1 \text{ per } s = r) \quad (2)$$

aventi le direzioni delle linee coordinate e i moduli $\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}}, \dots, \sqrt{a_{nn}}$. Se $u^\lambda (\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega = 1, 2, \dots, n)$ è un altro sistema coordinato in V_n ⁽³⁾, e poniamo

$$(2) \quad \theta_\lambda^r = \frac{\partial x^r}{\partial u^\lambda}, \quad \theta_{\lambda\mu}^r = \frac{\partial^2 x^r}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}, \quad \dots; \quad \Theta_r^\lambda = \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^r}, \quad \dots$$

vediamo subito che le θ_λ^r , se si intende che l'indice λ vi assuma un valore fisso ed r soltanto vari, sono le componenti controvarianti, nel sistema x^r , dei vettori-unità (controvarianti) del sistema u^λ ; e le Θ_r^λ sono le componenti covarianti, nel sistema x^r dei vettori $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n)}$ (vettori-unità covarianti del sistema u^λ) le cui direzioni sono in ciascun punto normali alle iper-superficie coordinate, e i moduli $\sqrt{a^{11}}, \sqrt{a^{22}}, \dots, \sqrt{a^{nn}}$. Le componenti controvarianti d'un vettore sono i suoi prodotti scalari coi vettori di tale n-pla $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n)}$. Queste osservazioni ci riusciranno utili fra poco.

(1) *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie*. «Verhandelingen Kon. Akademie van Wetenschappen», Amsterdam; Deel XII, n. 6, 1918; v. pp. 45-46. La distinzione, non propriamente fra i due sistemi coordinati, ma tra gli spazi euclidei di sviluppo e di raccordamento per una varietà curva lungo una linea (v. più oltre, nn. 4, 7) che ad essi corrispondono è fatta nettamente dal Cartan. Ved. *La géométrie des espaces de Riemann*. «Memorial», Paris, 1925, pp. 17-19; *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris, 1928, pp. 105-107. Si troverà forse il primo chiaro ed esplicito accenno ai due sistemi di coordinate geodetiche nella nota (9), pp. 163-164, del mio lavoro: *Scostamento geodetico e sue generalizzazioni*. «Giornale di Matematica», vol. 66, 1928, pp. 153-191 (ove va' corretta una svista: al luogo di $\frac{da_{\lambda\mu}}{ds}$, nella riga 15° della nota deve leggersi $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda & \nu \\ \mu \end{smallmatrix} \right\} \frac{du^\nu}{ds}$).

(2) La denominazione di *vettori-unità*, giustificata da applicazioni nella geometria affine, è quella di uso più frequente, e anche io l'adopero, in mancanza di meglio; è superfluo avvertire che tali vettori non sono unitari in generale.

(3) Useremo gli indici greci per distinguere le componenti in questo nuovo sistema.

Sia data una curva γ in V_n , di equazioni parametriche

$$(3) \quad x^r = F^r(s)^{(1)},$$

$$(4) \quad u^\lambda = \Phi^\lambda(s)^{(1)},$$

(s essendone, ad es. la lunghezza d'arco) nei due sistemi coordinati x^r, u^λ . Indicheremo secondo l'opportunità, con una *sopralineazione* o con l'apposizione dell'indice γ gli elementi di V_n calcolati lungo γ : ad es.

$$(5) \quad \bar{\theta}_\lambda^r = (\theta_\lambda^r)_{(a^\lambda = \Phi^\lambda(s))} ; \quad \left\{ \begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix} \right\}_\gamma = \left(\left\{ \begin{matrix} r & s \\ t \end{matrix} \right\} \right)_{(x^r = F^r(s))}.$$

Diremo che le u^λ sono coordinate geodetiche di Schouten lungo γ , se i vettori-unità del sistema coordinato u^λ si spostano lungo γ per parallelismo⁽²⁾ di Levi-Civita in V_n . Ciò equivale a dire che le direzioni delle linee coordinate di ciascuno degli n sistemi variano lungo γ per parallelismo in V_n , e insieme, che lungo γ le componenti $a_{\lambda\lambda}$ hanno valori stazionari.

È assai facile dare forma analitica alla precedente condizione; perchè lungo γ i vettori-unità del sistema u^λ varino per parallelismo è necessario e sufficiente che sia, in ogni punto di γ ,

$$(6) \quad \frac{de_{(\lambda)}^\nu}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \omega & \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} e_{(\lambda)}^\omega \frac{du^\mu}{ds} = 0,$$

ossia, essendo $e_{(\mu)}^\nu = a_{\mu}^\nu$ (secondo le (1)):

$$(7) \quad \left\{ \begin{matrix} \lambda & \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} \frac{du^\nu}{ds} = 0 \quad \left(\text{lungo } \gamma: \text{ cioè } \left\{ \begin{matrix} \lambda & \nu \\ \mu \end{matrix} \right\}_\gamma \frac{d\Phi^\nu}{ds} = 0 \right).$$

Queste sono le condizioni cercate, necessarie e sufficienti perchè le u^λ siano, lungo γ , coordinate geodetiche di Schouten.

Dalle (7) risulta questa proprietà molto notevole: che è *caratteristico dei sistemi coordinati geodetici di Schouten lungo una curva γ il fatto che le derivate assolute (o cogredienti) dei vettori o tensori applicati al punto variabile di γ rispetto al parametro cui questo punto variabile è riferito, calcolate in questi sistemi, si riducono a derivate ordinarie*⁽³⁾.

(1) Intenderemo che le $F^r(s)$, $\Phi^\lambda(s)$, e così le altre funzioni che introdurremo nel seguito, ammettano tutte quelle derivate che ci occorrerà di considerare.

(2) O più esattamente, per equipollenza. Ma è ormai nell'uso parlare di trasporto per parallelismo non solo delle direzioni, ma anche dei vettori qualunque.

(3) Ved. SCHOUTEN, loc. cit., ibid. Si noti che se si vogliono prendere in considerazione soltanto i campi di vettori o tensori applicati ai punti di γ , senza ricorrere a un vero e proprio sistema di coordinate curvilinee in V_n può bastare il riferimento a un' n -pla di vettori indipendenti, che si spostino lungo γ per parallelismo. Il fatto sopra notato sussiste anche in questa ipotesi.

3. Per dimostrare analiticamente l'effettiva esistenza di tali sistemi coordinati, che geometricamente è intuitiva, procederemo così: cercheremo di determinare delle formole di trasformazione con le quali da un sistema curvilineo qualunque si passi ad un sistema u^λ del tipo voluto, cioè pel quale valgano lungo γ le (7).

Anzitutto, per una proprietà sopra osservata, in coordinate x^r la condizione perchè i vettori unità del sistema u^λ si spostino lungo γ per parallelismo si scrive:

$$(8) \quad \frac{d\bar{\theta}_\lambda^r}{ds} + \left\{ \begin{matrix} s & t \\ r & \gamma \end{matrix} \right\} \bar{\theta}_\lambda^t \frac{dF^t}{ds} = 0; \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

queste equazioni differenziali determinano le $\bar{\theta}_\lambda^r$, cioè i valori delle θ_λ^r lungo γ (in funzione di s) purchè si assegnino i loro valori in un punto iniziale P_0 di γ : e basterà che ivi gli n vettori iniziali $(\theta_\lambda^r)_0$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) siano indipendenti tra loro, ed $n-1$ qualunque di essi dal vettore unitario tangente a γ , perchè la stessa proprietà sussista in tutto un tratto, opportunamente limitato, di γ comprendente P_0 : che indicheremo con γ_p . Determinate lungo γ_p , nel modo detto, le $\bar{\theta}_\lambda^r$, possiamo poi determinare le funzioni $\Phi^\lambda(s)$, anch'esse incognite naturalmente, non essendo conosciuto il sistema u^λ . Per questo basta notare che le (3), (4) danno per derivazione, tenuto conto delle (2), (5)

$$(9) \quad \frac{dF^r}{ds} = \bar{\theta}_\lambda^r \frac{d\Phi^\lambda}{ds},$$

il che ha un ovvio significato geometrico. Detto $\bar{\Theta}_r^\lambda$ l'elemento reciproco di $\bar{\theta}_\lambda^r$ nel determinante $|\bar{\theta}_\lambda^r|$, che è diverso da zero in γ_p , abbiamo dalle (9):

$$(10) \quad \frac{d\Phi^\lambda}{ds} = \bar{\Theta}_r^\lambda \frac{dF^r}{ds};$$

onde per quadrature si ottengono le $\Phi^\lambda(s)$, a meno di costanti additive arbitrarie. E ora si tratta di scrivere delle formole di trasformazione

$$(11) \quad x^r = x^r(u^1, u^2, \dots, u^n) \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

tali che le nuove coordinate u^λ lungo γ_p si riducano alle funzioni $\Phi^\lambda(s)$, e che le derivate $\theta_\lambda^r = \frac{\partial x^r}{\partial u^\lambda}$ lungo γ_p si riducano alle $\bar{\theta}_\lambda^r(s)$. Per questo: osserviamo che in nessun punto di γ_p , per quanto poco sopra si è detto, la tangente a γ è normale a uno dei vettori $E\omega$; cosicchè, per le (10); in nessun punto di γ_p una componente $\frac{d\Phi^\lambda}{ds}$ si annulla. In particolare

lungo γ_p è sempre $\frac{d\Phi^n}{ds} \neq 0$; onde possiamo assumere, lungo γ_p , anche u^n come parametro per $\gamma^{(1)}$. Cioè la funzione

$$(12) \quad u^n = \Phi^n(s)$$

si potrà invertire in γ_p :

$$(13) \quad s = f(u^n).$$

Poniamo

$$(14) \quad F^r\{f(u^n)\} = F_T^r(u^n); \quad \theta_\lambda^r\{f(u^n)\} = \theta_{T\lambda}^r(u^n); \quad \Phi^\lambda\{f(u^n)\} = \Phi_T^\lambda(u^n); \text{ ecc.}$$

onde sarà in particolare

$$\Phi_T^n(u^n) = u^n.$$

La più generale trasformazione di coordinate curvilinee in V_n può rappresentarsi, in un conveniente intorno della linea γ (o meglio della porzione γ_p di essa) mediante sviluppi di Maclaurin accorciati dalle funzioni

$$x^r(u^1, u^2, \dots, u^n)$$

considerate come funzioni delle sole u^1, u^2, \dots, u^{n-1} :

$$(15) \quad x^r = F_T^r(u^n) + c_\alpha^r(u^n)\{u^\alpha - \Phi_T^\alpha(u^n)\} + \frac{1}{2}c_{\alpha\beta}^r(u^n)\{u^\alpha - \Phi_T^\alpha(u^n)\}\{u^\beta - \Phi_T^\beta(u^n)\} + \\ + \Psi_3^r(u^1 - \Phi_T^1(u^n), u^2 - \Phi_T^2(u^n), \dots, u^{n-1} - \Phi_T^{n-1}(u^n), u^n) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n-1)$$

Le somme rispetto ad $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ si intendono qui (e nel seguito) estese da 1 ad $n-1$. Con $c'_\alpha, c'_{\alpha\beta}$ abbiamo indicato delle funzioni arbitrarie di u^n , tali soltanto (le prime) che il determinante Δ , in cui le c'_α sono gli elementi delle prime $n-1$ colonne e le $\frac{dF_T^r}{du^n}$ quelli dell'ultima colonna, sia sempre diverso da zero in γ_p ; il che basta per assicurare alle (15) il carattere di una vera e propria trasformazione di coordinate in un intorno di γ_p . Le $c'_{\alpha\beta}$ si supporranno *simmetriche* rispetto ad α, β ; il che non è affatto una restrizione. Le Ψ_3^r dovranno infine annullarsi con le loro derivate prime e seconde rispetto ai primi $n-1$ argomenti indicati in ogni punto di γ_p , essendo del resto arbitrarie.

Dalle (15) appare manifesto che le c'_α sono i valori delle derivate $\frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha} = \theta_\alpha^r$ lungo γ . Sarà dunque *condizione necessaria* perchè le (15) diano una trasformazione che conduca alle coordinate volute, che nelle (15)

(1) Cfr. LEVI-CIVITA, loc. cit., pp. 308, 305.

al posto delle c_α^r s'intendano poste le $\bar{\theta}_{T\alpha}^r$, le $\bar{\theta}_\lambda^r$ essendo un sistema di soluzioni delle (8) corrispondenti a condizioni iniziali per le quali valgano le limitazioni poco sopra precisate. (E insieme che le $\Phi^\alpha(s)$, da cui sono ricavate le $\Phi_T^\alpha(u^n)$, siano un corrispondente sistema di soluzioni delle (10)).

Ma tali condizioni *sono anche sufficienti*. Infatti dalle (15) derivando successivamente, e ponendo poi $u^\alpha = \Phi_T^\alpha(u^n)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$), abbiamo:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}_{T\alpha}^r = c_\alpha^r, \\ \bar{\theta}_{Tn}^r = \frac{dF_T^r}{du^n} - c_\alpha^r \frac{d\Phi_T^\alpha}{du^n}; \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}_{T\alpha\beta}^r = c_{\alpha\beta}^r, \\ \bar{\theta}_{T\alpha n}^r = \frac{dc_\alpha^r}{du^n} - c_{\alpha\beta}^r \frac{d\Phi_T^\beta}{du^n}, \\ \bar{\theta}_{Tnn}^r = \frac{d}{du^n} \left(\frac{dF_T^r}{du^n} - c_\alpha^r \frac{d\Phi_T^\alpha}{du^n} \right) - \frac{dc_\alpha^r}{du^n} \frac{d\Phi_T^\alpha}{du^n} + c_{\alpha\beta}^r \frac{d\Phi_T^\alpha}{du^n} \frac{d\Phi_T^\beta}{du^n}. \end{array} \right.$$

Di qui, tenendo presenti le (8), (9), (14), ricaviamo senza difficoltà

$$(18) \quad \left(\bar{\theta}_{\lambda\mu}^r + \left\{ \begin{array}{c} s \ t \\ r \end{array} \right\}_\gamma \bar{\theta}_\lambda^s \bar{\theta}_\mu^t \right) \frac{d\Phi^\mu}{ds} = 0.$$

Ma per le note formule di Christoffel si ha

$$(19) \quad \left(\bar{\theta}_{\lambda\mu}^r + \left\{ \begin{array}{c} s \ t \\ r \end{array} \right\}_\gamma \bar{\theta}_\lambda^s \bar{\theta}_\mu^t - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \ \mu \\ \nu \end{array} \right\}_\gamma \bar{\theta}_\nu^r \right) \frac{d\Phi^\mu}{ds} = 0.$$

Dal confronto di queste con le (18), ricordando che $|\bar{\theta}_\lambda^r| = 0$ in γ_p , abbiamo appunto le (7). Ciò prova quanto volevamo.

4. Al risultato ottenuto possiamo dare forma più geometrica. Diciamo *spazio euclideo di sviluppo* ⁽¹⁾ per V_n lungo γ uno spazio euclideo a cui la varietà s'intenda riferita, biunivocamente almeno in un conveniente intorno della curva γ e della sua trasformata γ^* , sotto la condizione che *nella corrispondenza i moduli dei vettori di V_n applicati a punti di γ restino inalterati, e si conservi il parallelismo (ed equipollenza) dei vettori lungo γ* . Riferiti la V_n e lo spazio euclideo, R_n , a coordinate curvilinee u^λ corrispondenti, e contrassegnati con * gli elementi di R_n , alla condizione precedente può darsi

(1) Cfr. CARTAN, loc. cit. *La Géométrie...*, pp. 17-18; *Leçons...*, pp. 105-106. Il CARTAN non introduce esplicitamente la denominazione da me adottata; e la costruzione dello « spazio euclideo di sviluppo » da lui indicata si differenzia nettamente dalle caratterizzazioni geometriche che io qui espongo.

questa forma analitica: che sia, lungo γ (o nella porzione di questa che consideriamo):

$$(20) \quad a_{\lambda\mu}^* = a_{\lambda\mu}$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{matrix} \lambda & \nu \\ \mu \end{matrix} \right\}^* \frac{du^\nu}{ds} = \left\{ \begin{matrix} \lambda & \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} \frac{du^\nu}{ds}.$$

Si vede subito che basta anche aggiungere alle (21) le (20) quali *condizioni iniziali*, da supporre verificate in un punto P_0 di γ .

Le (21) e le (7) ci mostrano che R_n è uno spazio euclideo di sviluppo per V_n lungo γ se è possibile ridurre *simultaneamente* i sistemi (corrispondenti) di coordinate curvilinee in V_n e in R_n a coordinate geodetiche di Schouten lungo γ e γ^* . Ora: in R_n , lungo una linea qualsiasi, un qualunque sistema cartesiano è manifestamente un sistema geodetico di Schouten. Dunque si riferisca (come è possibile in infiniti modi) V_n a coordinate geodetiche di Schouten lungo γ : allora le $a_{\lambda\mu}$ hanno valori *costanti*

lungo γ (perchè $a_{\lambda\mu} = e_{(\lambda)} \times e_{(\mu)}$; o anche, perchè dalle (7) consegue $\frac{da_{\lambda\mu}}{ds} = 0$). Tali numeri costanti possono interpretarsi come coefficienti di

un ds^2 euclideo, riferito a coordinate cartesiane. Facendo corrispondere due punti di V_n e di un R_n euclideo a cui si attribuisca questo ds^2 , quando le coordinate curvilinee del primo sono uguali alle coordinate cartesiane del secondo, si fa dell' R_n appunto uno spazio euclideo di sviluppo per V_n lungo γ . Possiamo concludere:

Esistono infiniti spazi euclidei di sviluppo per una V_n lungo una linea; e notare la seguente proprietà fondamentale: La derivazione vettoriale (o co-grediente) in V_n lungo questa linea non è che la derivazione ordinaria eseguita in un (qualunque) spazio euclideo di sviluppo. Basta questo per mostrare come, per una buona parte delle applicazioni che sino ad ora si sono date delle coordinate geodetiche di Fermi lungo una linea, siano sufficienti le coordinate di Schouten, soggette a condizioni meno restrittive: o in forma più precisa e più geometrica, come basti, nella trattazione di tutte le questioni in cui interviene una linea γ di V_n riemanniana insieme col suo intorno di 1° ordine — in particolare: insieme con un campo di vettori o tensori di V_n applicati ai suoi punti — operare in uno *spazio euclideo di sviluppo* lungo γ anzichè in uno spazio euclideo di *raccordamento* lungo la stessa linea, cioè *osculatore* in tutti i suoi punti. Degli spazi di raccordamento e delle (corrispondenti) coordinate geodetiche di Fermi verrò a parlare nella Nota II, che sotto lo stesso titolo dell'attuale Nota I sarà prossimamente pubblicata in questi « Rendiconti ».

Geometria. — *Un problema sul sistema nullo osculatore ad una congruenza W.* Nota di R. CALAPSO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

In una Memoria di P. Calapso, *Sulle reti e congruenze coniugate e sulle trasformazioni delle superficie per congruenze W* [« Annali di Matematica », serie 4^a, to. IV, 1926-1927] l'autore associa ad ogni congruenza W, aderente ad una data superficie S, una rete a invarianti uguali [rete (M)]. Questa rete, che è individuata data che sia la congruenza W, si ottiene nel seguente modo:

Si costruisca il piano passante per una tangente asintotica di S e parallelo alla tangente corrispondente della seconda focale S_1 ; si costruisca il piano analogo per l'altra tangente asintotica di S; la retta comune ai due piani genera una congruenza coniugata ad una rete (M) della superficie S. La retta analoga pei punti di S_1 genera una congruenza coniugata ad una rete (M_1) di S_1 , la cui corrispondente su S è la rete, ad invarianti tangenziali uguali, armonica ad (M).

Inversamente una qualunque rete a invarianti uguali di una superficie è associata, nel senso anzidetto, ad infinite congruenze W.

Qui ci proponiamo di ottenere le reti (M) attraverso un problema sul sistema nullo osculatore alla congruenza W, problema che enunciamo nel seguente modo:

Sia (Γ_1) una congruenza armonica alla superficie S_1 , e (Γ) la congruenza coniugata ad S che si ottiene trasformando ogni volta la retta Γ_1 nella sua reciproca Γ rispetto al sistema nullo osculatore. Quando si corrispondono le sviluppabili di (Γ) e (Γ_1)?

Si soddisfa nel modo più generale al problema proposto assumendo per (Γ) una qualunque congruenza coniugata alla rete (M) di S associata alla congruenza W.

§ I. — RICHIAMO DELLE FORMOLE GENERALI SULLE CONGRUENZE W.

Per la risoluzione del problema proposto ricordiamo alcuni risultati fondamentali sulla teoria delle congruenze W di assegnata prima falda focale⁽²⁾. Riferiamo una superficie S alle linee asintotiche, sicchè le coor-

(1) Nella seduta del 17 novembre 1929.

(2) Vedi P. CALAPSO, *Sulle reti e congruenze coniugate ecc.*, « Annali di Matematica », serie 4^a, to. IV, 1926-1927. Cfr. anche con FUBINI e ČECH, *Geometria proiettivo-differenziale*, Bologna, Zanichelli, to. I, pp. 244 e sgg. Vedasi anche a p. 250 il teorema di ČECH.

dinate x, y, z del punto P di S sono soluzioni di un sistema della forma

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial x}{\partial v}; \end{cases}$$

indi si assuma una soluzione

$$h, k, \Phi, \Omega, \lambda, \mu$$

del sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u} = -ah - \frac{k}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - 1 + \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial v} = -pk - \frac{h}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial k}{\partial u} = -bh - \frac{k}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \\ \frac{\partial k}{\partial v} = -qk - \frac{h}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - 1 - \Omega \\ \frac{\partial \Omega}{\partial u} = -\frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \Omega - \frac{h\lambda}{\Phi} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Omega + \frac{k\mu}{\Phi} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = a \frac{\partial \Phi}{\partial u} - b \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \left(\frac{\partial b}{\partial v} + bq \right) \Phi + \lambda \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp \right) \Phi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = q \frac{\partial \Phi}{\partial v} - p \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \left(\frac{\partial p}{\partial u} + ap \right) \Phi + \mu \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = b\mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} = p\lambda \end{cases}$$

e le formole

$$(5) \quad x_i = x + h \frac{\partial x}{\partial u} + k \frac{\partial x}{\partial v}$$

danno una nuova superficie S_1 che con S forma la focale completa di una congruenza W .

Le funzioni x_1, y_1, z_1 soddisfano ad equazioni analoghe alle (1) in cui

$$(6) \quad \begin{cases} a_1 = a - \frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{h\lambda}{\Phi \Omega}, & b_1 = -b + \frac{k\lambda}{\Phi \Omega} \\ p_1 = -p - \frac{h\mu}{\Phi \Omega}, & q_1 = q - \frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{k\mu}{\Phi \Omega}. \end{cases}$$

§ 2. — RICHIAMO DI ALCUNE PROPOSIZIONI

SULLE CONGRUENZE CONIUGATE OD ARMONICHE AD UNA SUPERFICIE ⁽¹⁾.

Ricordiamo ancora che si ottiene nel modo più generale una congruenza (Γ) coniugata alla superficie S conducendo per il punto P di S la retta i cui parametri direttori l, m, n sono dati dalle formole

$$(7) \quad l = \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \rho \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

essendo ρ una funzione arbitraria; le sviluppabili di tale congruenza sono rappresentate dall'equazione

$$(8) \quad \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - a \frac{\partial \rho}{\partial u} + b \frac{\partial \rho}{\partial v} - \left(\frac{\partial b}{\partial v} + b q \right) \rho \right] du^2 - \\ & - \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} - q \frac{\partial \rho}{\partial v} + p \frac{\partial \rho}{\partial u} - \left(\frac{\partial p}{\partial u} + a p \right) \rho \right] dv^2 = 0. \end{aligned}$$

Questa, interpretata sulla superficie S , dà una rete coniugata, nel senso di Guichard, alla congruenza (Γ) .

In particolare prendendo $\rho = \Phi$, la (8) diventa

$$(9) \quad \lambda du^2 - \mu dv^2 = 0$$

e dà la rete a invarianti uguali associata alla congruenza W secondo la costruzione sopra richiamata.

Similmente si ottiene una congruenza (Γ_1) armonica alla superficie S_1 , prendendo come retta Γ_1 la congiungente i punti

$$(10) \quad x_1 - \frac{\psi}{\frac{\partial \psi}{\partial u}} \frac{\partial x_1}{\partial u}; \quad x_1 - \frac{\psi}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} \frac{\partial x_1}{\partial v},$$

(1) Vedi FUBINI e ČECH, loc. cit., to. I, § 25.

essendo ψ una funzione arbitraria. Le sviluppabili di tale congruenza sono rappresentate dall'equazione

$$(11) \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - a_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} - b_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) du^2 - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - p_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} - q_1 \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) dv^2 = 0.$$

§ 3. - IL PROBLEMA FONDAMENTALE SUL SISTEMA NULLO OSCULATORE.

Richiamate queste generalità, siamo in grado di rispondere alla seguente domanda: *nell'ipotesi che la congruenza (Γ) sia dedotta da (Γ_1) trasformando ogni volta la retta Γ_1 nella sua reciproca rispetto al sistema nullo osculatore, quando si corrispondono le sviluppabili delle dette congruenze?*

L'ipotesi che Γ si ottenga da Γ_1 trasformando ogni volta la retta Γ_1 nella sua reciproca rispetto al sistema nullo osculatore, si traduce nella relazione

$$(12) \quad \rho = \Phi \psi$$

e l'equazione (8) delle sviluppabili di (Γ) [facendo uso delle (3)] prende la forma

$$(13) \quad A du^2 - B dv^2 = 0$$

in cui

$$(14) \quad \begin{cases} A = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \left(a - \frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} + b \frac{\partial \psi}{\partial v} + \lambda \frac{\psi}{\Phi} \\ B = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(q - \frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial v} + p \frac{\partial \psi}{\partial u} + \mu \frac{\psi}{\Phi} \end{cases}$$

Similmente l'equazione (11) delle sviluppabili di (Γ_1) (ove per a_1 , b_1 , p_1 , q_1 si pongano i valori (6)) prende la forma

$$15 \quad P du^2 - Q dv^2 = 0$$

in cui

$$(16) \quad \begin{cases} P = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \left(a - \frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} + b \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\lambda}{\Phi \Omega} \left(h \frac{\partial \psi}{\partial u} - k \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \\ Q = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(q - \frac{2}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial v} + p \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\mu}{\Phi \Omega} \left(h \frac{\partial \psi}{\partial u} - k \frac{\partial \psi}{\partial v} \right); \end{cases}$$

ed allora la condizione del problema dà

$$(17) \quad \frac{P}{A} = \frac{Q}{B}.$$

Intanto dalle (14) e (16) si ha:

$$(18) \quad \begin{cases} P - A = \frac{\lambda}{\Phi\Omega} \left(b \frac{\partial\psi}{\partial u} - k \frac{\partial\psi}{\partial v} - \Omega\psi \right) \\ Q - B = \frac{\mu}{\Phi\Omega} \left(b \frac{\partial\psi}{\partial u} - k \frac{\partial\psi}{\partial v} - \Omega\psi \right) \end{cases}$$

e queste differenze non sono nulle se le congruenze (Γ) e (Γ_1) sono distinte.

Dalla (17) scrivendo

$$\frac{P - A}{A} = \frac{Q - B}{B}$$

ed osservando le (18) risulta

$$\frac{\lambda}{A} = \frac{\mu}{B}$$

cioè: si soddisfa al problema assumendo una qualunque congruenza (Γ) coniugata (nel senso di Guichard⁽¹⁾) alla rete (M) di S associata (secondo Calapso) alla congruenza W .

Matematica. — *Sur les réperes mobiles dans l'espace fonctionnel.*

Nota di GR. C. MOISIL, presentata⁽²⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

L'étude de la Mécanique analytique des systèmes à une infinité de degrés de liberté⁽³⁾ nous a conduit à étudier les espaces fonctionnels doués d'une métrique riemannienne⁽⁴⁾. M. Akitsugu Kawaguchi, dans une Note récente⁽⁵⁾ a esquissé l'étude de différentes connexions dans l'espace des fonctions, dont celle étudiée par nous est un cas particulier.

Dans cette Note nous nous proposons de donner deux exemples, l'un tiré de la géométrie fonctionnelle, l'autre de la théorie des groupes infinis, dans lesquels s'introduisent des systèmes de référence mobiles dans l'espace à une infinité de dimensions. L'utilité de l'extension du calcul tensoriel et de la méthode du repère mobile à l'espace fonctionnel est ainsi justifiée par leurs applications.

(1) Quando una congruenza è coniugata ad una superficie le sue sviluppabili, per definizione, corrispondono ad una rete della superficie. Secondo le denominazioni di Guichard, la congruenza si dice allora coniugata alla detta rete.

(2) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(3) Gr. C. MOISIL, *La mécanique analytique des systèmes continus* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

(4) Gr. C. MOISIL, *Sur les variétés fonctionnelles* (« Comptes rendus », to. 187, p. 796).

(5) M. AKITSUGU KAWAGUCHI, *Sur les différentes connexions de l'espace fonctionnel* (« Comptes rendus », to. 189, p. 436).

1. Considérons une variété à une infinité de dimensions V plongée dans l'espace E des fonctions $y(s)$ de carré sommable :

$$(1) \quad y(s) = f|[x(\sigma)/s]|$$

et supposons que

$$\delta y(s) = \int_0^1 f'_{x(\sigma)}(s) \delta x(\sigma) d\sigma$$

$f'_{x(\sigma)}(s)$ est de carré sommable, fermé en σ . L'élément d'arc

$$(2) \quad \delta l^2 = \int_0^1 [\delta y(s)]^2 ds$$

sur la variété V est

$$(3) \quad \delta l^2 = \int_0^1 \int_0^1 g(s^*t) \delta x(s) \delta x(t) ds dt.$$

La décomposition en carrés de la forme quadratique (3) est possible en considérant les fonctions fondamentales $e_i(s)$ du noyau $g(s^*t)$

$$g_i e_i(s) = \int_0^1 g(s^*t) e_i(t) dt$$

qui forment une suite de fonctions orthogonales et normales :

$$(4) \quad e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s), \dots$$

En développant $\delta x(s)$ suivant cette suite

$$(5) \quad \delta x(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega^i e_i(s)$$

on trouve

$$(6) \quad \delta l^2 = \sum_{i=1}^{\infty} g_i (\omega^i)^2.$$

Les expressions $e_i(s)$ sont des fonctionnelles du point $x(s)$. Pour une variation infiniment petite en moyenne $\delta x(s)$, $e_i(s)$ varie de $\delta e_i(s)$, qui est supposée de carré sommable donc développable suivant $e_i(s)$:

$$(7) \quad \delta e_i(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^i e_k(s).$$

La suite (4) constitue un repère mobile dans la variété V . Les relations (5) et (7) définissent la connexion des deux repères R et R' attachés aux points infiniment voisins $x(s)$ et $x'(s)$. A l'aide de ces repères on

peut généraliser le calcul de Ricci et Levi-Civita aux variétés plongées dans l'espace fonctionnel. Cette idée sera développée dans un autre travail.

2. Considérons un groupe à une infinité de paramètres (a^1, a^2, \dots) de transformations de l'espace ponctuel (x^1, x^2, \dots, x^n) ,

$$(8) \quad \bar{x}^k = f^k(x^1, \dots, x^n; a^1, \dots)$$

Nous supposons, que l'espace des paramètres (a^1, a^2, \dots) est un espace hilbertien

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a^i)^2 = \text{convergente}$$

et que l'ensemble (8) forme un groupe

$$f^k(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n; b^1, \dots) = f^k(x^1, \dots, x^n; c^1, \dots).$$

où

$$(9) \quad c^i = \varphi^i(a^1, \dots; b^1, \dots).$$

La série $\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi^i)^2$ est supposée convergente si les séries $\sum_{i=1}^{\infty} (a^i)^2$ et $\sum_{i=1}^{\infty} (b^i)^2$ sont convergentes. Les fonctions f^k, φ^i sont dérivables, les paramètres sont essentiels (le système

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial f^k}{\partial a^i} \delta a^i = 0$$

n'admet aucune solution $(\delta a^1, \dots)$ dans $H = \sum_{i=1}^{\infty} (\delta a^i)^2$ convergente - non nulle). La correspondance (9) entre les a et les c , entre les b et les c , entre les a et les b , est localement biunivoque. Par exemple la matrice $\left\| \frac{\partial b^h}{\partial a^k} \right\|$

$$\delta b^h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial b^h}{\partial a^k} \delta a^k$$

est bornée (elle transforme un point $(\delta a^1, \dots)$ de H dans un autre point $(\delta b^1, \dots)$ de H) et réversible (la matrice $\|\theta_i^k\|$

$$\delta a^k = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i^k \delta b^i$$

existe et elle est bornée).

On peut conclure facilement que

$$(10) \quad \delta \bar{x}^i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^i(\bar{x}) \omega^k$$

où les séries $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^i)^2$ sont convergentes et ω^k forment un système de formes pfaffiennes à une infinité de variables

$$(11) \quad \omega^k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k(a) \delta a^i$$

la matrice $\|\alpha_i^k\|$ est bornée et réversible

$$(12) \quad \delta a^i = \sum_{k=1}^{\infty} {}^* \alpha_k^i(a) \omega^k.$$

Les relations (10) introduisent une infinité de transformations infinitésimales :

$$(13) \quad X_i = \xi_i^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi_i^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

A chaque point (a^1, a^2, \dots) on associe un ensemble de transformations infiniment petites $T_{a+\varepsilon u} T_a^{-1}$ où $\sum_{i=1}^{\infty} (u^i)^2 =$ convergente, ε est un infiniment petit. Cette transformation est représentée par ses coordonnées $(\varepsilon u^1, \dots)$. La même transformation infiniment petite est représentée par ses composantes $(\varepsilon \omega_u^1, \dots)$ suivant le repère mobile (13)

$$\omega_u^i = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h^i u^h.$$

Nous dirons, en utilisant la terminologie de M. E. Cartan (*La géométrie des groupes de transformations* dans le « Journal des mathématiques pures et appliquées », 1927, pp. 1-120) que deux transformations infiniment petites $(\varepsilon u^1, \dots)$ et $(\varepsilon' u^1, \dots)$ attachées aux points (a^1, \dots) et (a'^1, \dots) infiniment voisins $a'^i = a^i + \delta a^i$ sont équipolentes si

$$T_{a+\varepsilon' u} T_a'^{-1} = T_{a+\varepsilon u} T_a^{-1}.$$

On conclut

$$(14) \quad \delta \omega_u^i = 0.$$

Cette équation définit une connexion affine dans l'espace H. Le transport par parallélisme est défini par (14) ou

$$(14') \quad \delta u^i + \sum_{k=1}^{\infty} u^k \left(\sum_{j=1}^{\infty} {}^* \alpha_j^i \delta \alpha_k^j \right) = 0.$$

C'est un parallélisme absolu ou à distance, car l'équation (14) est complètement intégrable. On peut donc attacher aux points de H des repères R

parallèles. La transformation infiniment petite $T_{a+\delta a} T_a^{-1}$ est représentée par $\sum_{i=1}^{\infty} \omega^i X_i$. Donc le repère 'R attaché au point 'a = a + δa est obtenu du repère R attaché au point a par une translation de composantes (ω^1, \dots) suivant le repère R.

Cette connexion est sans courbure mais avec torsion. La translation associée à cycle fermé (δ_1, δ_2) a les composantes $[(\omega^1)', (\omega^2)', \dots]$, où

$$\omega' = \delta_1 \omega_{\delta_2} - \delta_2 \omega_{\delta_1}.$$

Je suppose que α_i^k sont dérivables $\delta \alpha_i^k$ sont linéaires en δa^b la matrice $\|\delta \alpha_i^k\|$ est bornée. L'intégrabilité du système (10) conduit à

$$(15) \quad (X_i X_j) = \sum_{v=1}^{\infty} c_{ij}^v X_v.$$

Les relations (10) et (15) généralisent le premier et le second théorème de S. Lie. La généralisation des équations de Maurer-Cartan,

$$(16) \quad (\omega^i)' + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^i [\omega^m \omega^n] = 0$$

introduit les constantes de structure c_{mn}^i qui représentent la torsion de la connexion.

Matematica. — *Sopra il comportamento assintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere.* Nota⁽¹⁾ di O. ONICESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota collo stesso titolo della presente, pubblicata in questi « Rendiconti », vol. V, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 4, febbraio 1927, io ho creduto di potere dimostrare che la derivata di una funzione intera

$$\int_0^M h(s) \sin \chi s ds,$$

qualunque sia $h(s)$ positiva, ha tutti gli zeri reali. Il prof. G. Pólya ebbe la gentilezza di attirare la mia attenzione su vari esempi, in cui la mia affermazione non è valida. Per semplicità si può prendere

$$\sum_{n=1}^{n=k} h_n \sin n\chi, \quad \text{con } h_n > 0.$$

Ciò viene dal fatto che le curve γ da me introdotte non hanno sempre il comportamento che io supponevo.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1928.

Matematica. — *Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate.* Nota di PIA. NALLI presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Un criterio di scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali.* Nota di G. SUPINO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. In una comunicazione, che porta questo stesso titolo, letta al Congresso Internazionale dei Matematici (Bologna, settembre 1928), ho considerato il seguente problema:

Sia dato un solido elastico limitato dalla superficie σ . Se dividiamo σ in due zone, σ_1 e σ_2 , e supponiamo dati sull'una la distribuzione delle forze o degli spostamenti, sull'altra la risultante e il momento risultante delle forze, si sa che la sollecitazione elastica non è univocamente determinata.

Ma in molti casi non si possono conoscere con maggiore precisione le forze (specialmente quando si tratti di reazioni dovute al terreno o agli appoggi); in che modo potremo allora scegliere la soluzione preferibile tra le infinite soluzioni che soddisfano alle condizioni poste?

Quando la zona σ_1 , su cui sono date le sole risultanti, sia abbastanza piccola, la scelta può dipendere da considerazioni puramente analitiche, perchè, applicando il postulato del Saint-Venant, si può poi affermare che le sollecitazioni provocate divengono, a breve distanza da σ_1 , sensibilmente indipendenti dalla soluzione scelta; ma se σ_1 non sia trascurabile in confronto a σ_2 , mi sembra preferibile fissare un criterio di scelta in base a considerazioni fisiche: propongo quindi di considerare come soluzione *fondamentale* quella che, soddisfacendo alle condizioni assegnate, renda minimo il lavoro di deformazione.

Questo criterio, che può essere inquadrato nella teoria dell'Elasticità come una estensione del teorema di Menabrea, si collega in parte a lavori e idee già espresse; e mi riferisco con ciò alla Memoria del prof. Puppini, *Il principio della conservazione delle sezioni piane in relazione col principio del minimo lavoro*⁽²⁾ nella quale è mostrato come la ricerca di una distribuzione di tensioni normali che, soddisfacendo alla legge del Bach ($\sigma = \epsilon^k$, $k = \text{cost.}$), renda minimo il lavoro di deformazione, porta a quella

(1) Nella seduta del 17 novembre 1929.

(2) « *Monitore Tecnico* », 1915.

soluzione che conserva le sezioni piane. Anche il prof. Signorini mi ha comunicato di essere partito da concetti analoghi a questi per ritrovare la soluzione del Saint-Venant nella trave; il suo risultato, soggetto a qualche restrizione, è però ancora inedito.

In questa Nota, riferendomi al concetto stabilito più sopra di soluzione fondamentale e a giustificazione di esso, dimostrerò (insieme a criteri generali di ricerca) che la soluzione del *Saint-Venant* nella trave e quella del *Prandtl* per la flessione negli archi sono soluzioni fondamentali. In una prossima Nota farò vedere che la stessa proprietà appartiene alla soluzione del Lévy per le dighe.

CRITERI DI RICERCA. — SOMMA DI SOLUZIONI FONDAMENTALI.

2. I metodi che seguo nella determinazione della soluzione fondamentale sono sostanzialmente due. Il primo di essi si fonda sull'ipotesi, fisicamente evidente, della esistenza di questa soluzione; allora, con procedimenti di simmetrizzazione assai semplici, si giunge rapidamente alla dimostrazione voluta. Il secondo procede per mezzo di una verifica; assunta cioè come soluzione fondamentale una soluzione nota, si aggiunge a questa una seconda soluzione che dia luogo a risultanti nulle in σ_1 , a forze (o spostamenti) nulli in σ_2 , e si mostra che il potenziale elastico dovuto alla somma delle due soluzioni è maggiore di quello corrispondente alla sola prima soluzione che risulta così essere effettivamente *fondamentale*.

In tutti e due i procedimenti si fa uso frequente del seguente teorema:

« Se in un solido elastico S sono date due soluzioni fondamentali, e se per le due sollecitazioni coincide la suddivisione delle zone σ_1 e σ_2 (ed inoltre le condizioni assegnate su σ_2 sono dello stesso tipo⁽¹⁾), la somma delle due soluzioni fondamentali è una soluzione fondamentale ».

Dimostrerò di questo enunciato supponendo, per fissare le idee, che per le due soluzioni fondamentali (di cui indicheremo rispettivamente con $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \tau'_{xy}; \epsilon'_x, \epsilon'_y, \dots, \gamma'_{xy}$ e $\sigma''_x, \sigma''_y, \dots, \tau''_{xy}; \epsilon''_x, \epsilon''_y, \dots, \gamma''_{xy}$ le componenti di tensione e deformazione) sia assegnata la distribuzione delle forze su σ_2 . Considerando il potenziale elastico Φ dovuto alla somma di esse con una terza sollecitazione corrispondente ad una distribuzione di forze nulle su σ_2 , a risultanti nulle su σ_1 , dovrò allora dimostrare che Φ è maggiore del potenziale elastico Φ_1 , dovuto alla somma delle due soluzioni fondamentali.

(1) Con questa locuzione intendo specificare che se per la prima soluzione è data su σ_2 la distribuzione delle forze anche per la seconda soluzione è data la distribuzione delle forze; se per l'una sono dati su σ_2 gli spostamenti anche per l'altra sono dati gli spostamenti.

Ora, indicando con $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}; \epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}; \varphi$ le componenti di tensione e deformazione ed il potenziale elastico dovuti alla terza sollecitazione, si ha

$$\Phi = \Phi_1 + \varphi + \frac{I}{2} \int_S (\sigma_x \epsilon'_x + \sigma'_x \epsilon_x + \dots + \tau_{xy} \gamma'_{xy} + \tau'_{xy} \gamma_{xy}) dS + \\ + \frac{I}{2} \int_S (\sigma_x \epsilon''_x + \sigma''_x \epsilon_x + \dots + \tau_{xy} \gamma''_{xy} + \tau''_{xy} \gamma_{xy}) dS;$$

cioè, tenendo conto della reciprocità,

$$(1) \quad \Phi = \Phi_1 + \varphi + \int_S (\sigma_x \epsilon'_x + \sigma_y \epsilon'_y + \dots + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dS + \\ + \int_S (\sigma_x \epsilon''_x + \dots + \tau_{xy} \gamma''_{xy}) dS.$$

Ma la soluzione dipendente dalle componenti $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$ corrisponde per ipotesi a forze nulle in σ_2 ; quindi per la definizione stessa di soluzione fondamentale è

$$\varphi + \int_S (\sigma_x \epsilon'_x + \sigma_y \epsilon'_y + \dots + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dS \cong 0 \\ \varphi + \int_S (\sigma_x \epsilon''_x + \sigma_y \epsilon''_y + \dots + \tau_{xy} \gamma''_{xy}) dS \cong 0,$$

cioè

$$(2) \quad \varphi + \frac{I}{2} \int_S (\sigma_x \epsilon'_x + \sigma_y \epsilon'_y + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dS + \frac{I}{2} \int_S (\sigma_x \epsilon''_x + \dots + \tau_{xy} \gamma''_{xy}) dS \cong 0.$$

Si osservi ora che la (2) è valida per ogni soluzione soddisfacente alle condizioni poste per la terza sollecitazione su σ_1 e σ_2 ; sicchè valendo per la soluzione corrispondente alle tensioni $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$ vale anche per quella corrispondente alle componenti di tensione $\sigma_{\frac{x}{2}}, \sigma_{\frac{y}{2}}, \dots, \tau_{\frac{xy}{2}}$; scrivendo la (2) per queste, si deduce

$$\frac{\varphi}{4} + \frac{I}{4} \int_S (\sigma_x \epsilon'_x + \dots + \tau_{xy} \gamma'_{xy}) dS + \frac{I}{4} \int_S (\sigma_x \epsilon''_x + \dots + \tau_{xy} \gamma''_{xy}) dS \cong 0;$$

cioè in virtù della (1)

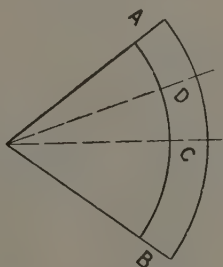
$$\Phi \cong \Phi_1$$

c. d. d.

ALCUNE SOLUZIONI PARTICOLARI.

3. Come primo esempio cercheremo la soluzione fondamentale per la flessione in un arco ad asse circolare, con sezione, normale all'asse, costante. Siano A, B le sezioni (normali) estreme dell'arco e si consideri la sezione normale nel punto di mezzo C dell'asse. Costruita una soluzione per la flessione, sia φ_1 il potenziale elastico del tronco AC, φ_2 quello del tronco BC e supponiamo per fissare le idee che sia $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

Si costruisca allora il sistema simmetrico di AC rispetto al raggio per C (vedi fig.); questo sistema soddisfa alle condizioni ai limiti ed a quelle necessarie per la validità del teorema di Menabrea ed ha potenziale minore od uguale a quello della soluzione primitiva. Vi sarà dunque un sistema



elastico congruente che soddisfa alle condizioni ai limiti date, ha potenziale minore od uguale a $2\varphi_1$, ed è simmetrico rispetto al piano normale all'asse per il punto C.

Consideriamo questa seconda soluzione e ripetiamo la costruzione esposta riferendoci invece che al raggio per C ed all'arco AB, al raggio per D punto di mezzo dell'arco AC, ed all'arco AC; troveremo così una terza soluzione che ha lavoro di deformazione minore od uguale a $2\varphi_1$, e dà luogo a sollecitazioni eguali in punti simmetrici rispetto ai raggi per C e per D. Così proseguendo si giunge a mostrare che se esiste la sollecitazione elastica minimante, questa deve essere indipendente da θ .

Il risultato è valido per la flessione negli archi ad asse circolare e sezione normale all'asse costante considerati sia nel piano che nello spazio; poichè per questi ultimi non si conosce nessuna soluzione elastica potrebbe servire come punto di partenza per eventuali ricerche. Invece, per il problema in due dimensioni si giunge subito alla soluzione del Prandtl, osservando che le componenti di tensione nel piano dipendono da una funzione biarmonica F per mezzo di relazioni che in coordinate polari divengono

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$$

e se $\sigma_r, \tau, \sigma_\theta$ non dipendono da θ la F ha forma

$$F = f_1(r) + Ar \cos \theta + Br \sin \theta + a\theta.$$

I termini in $\sin \theta$ e $\cos \theta$ non hanno influenza sulle tensioni: resta così, poichè $f_1(r)$ è biarmonica, la soluzione

$$F = a\theta + b \log r + cr^2 + dr^2 \log r$$

e tenendo conto delle condizioni ai limiti segue

$$a = 0 \quad b = \frac{M}{D} 4 R^2 R_1^2 \log \frac{R}{R_1} \quad c = \frac{M}{D} (R^2 - R_1^2 + 2 R^2 \log R - 2 R_1^2 \log R_1) \\ d = \frac{M}{D} 2 (R^2 R_1^2) \quad D = (R^2 - R_1^2)^2 - \left(2 R R_1 \log \frac{R}{R_1} \right)^2.$$

Qui R e R_1 sono i raggi d'estradosso e d'introdosso dell'arco; M è l'intensità del momento flettente.

4. Un ragionamento sintetico può essere svolto anche per il problema del Saint-Venant. Servendoci del teorema del n. 2 potremo considerare separatamente i vari casi particolari di sollecitazione; basterà allora ripetere il ragionamento svolto al numero precedente per concludere che la torsione, la flessione e la tensione semplice costituiscono altrettante soluzioni fondamentali. Qualche particolare considerazione richiede invece la flessione composta perchè, in essa le risultanti variano da sezione a sezione (pur considerando soltanto sezioni normali all'asse).

Indichiamo con \bar{z} l'asse della trave, con x, y due assi ortogonali perpendicolari alla \bar{z} e giacenti nel piano della base Ω . Le condizioni ai limiti date su Ω sono

$$\int_{\Omega} \sigma_{\bar{z}} d\Omega = 0 \quad \int_{\Omega} x \sigma_{\bar{z}} d\Omega = M' \quad \int_{\Omega} y \sigma_{\bar{z}} d\Omega = M \\ \int_{\Omega} \tau_{\bar{z}x} d\Omega = \mathcal{C}' \quad \int_{\Omega} \tau_{\bar{z}y} d\Omega = \mathcal{C} \quad \int_{\Omega} (y \tau_{\bar{z}x} - x \tau_{\bar{z}y}) d\Omega = 0$$

mentre sull'altra base Ω' a distanza l da Ω avremo per l'equilibrio

$$\int_{\Omega'} \sigma_{\bar{z}} d\Omega' = 0 \quad \int_{\Omega'} x \sigma_{\bar{z}} d\Omega' = -M' + l\mathcal{C}' \quad \int_{\Omega'} y \sigma_{\bar{z}} d\Omega' = -M + l\mathcal{C} \\ \int_{\Omega'} \tau_{\bar{z}x} d\Omega' = \mathcal{C}' \quad \int_{\Omega'} \tau_{\bar{z}y} d\Omega' = \mathcal{C} \quad \int_{\Omega'} (y \tau_{\bar{z}x} - x \tau_{\bar{z}y}) d\Omega' = 0.$$

Utilizziamo ancora il teorema del n. 2 ed aggiungiamo alla sollecitazione fondamentale cercata due soluzioni fondamentali a flessione semplice

rispetto agli assi x e y le cui risultanti \mathcal{M} e \mathcal{M}' soddisfino alle condizioni

$$\begin{aligned} M + \mathcal{M} &= -(M + \mathcal{M}) + l\mathcal{C} & \text{cioè} & \quad \mathcal{M} = -M + \frac{l\mathcal{C}}{2} \\ \mathcal{M}' &= -M' + \frac{l\mathcal{C}'}{2}. \end{aligned}$$

La nuova soluzione fondamentale così costruita è simmetrica rispetto alla mezzaria della trave; potremo dunque studiarla nella trave di lunghezza metà; ma, aggiungendo alla base di questa due sollecitazioni a flessione semplice definite dalle caratteristiche

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= -(M + \mathcal{M}) + \frac{l\mathcal{C}}{4} \\ \mathcal{M}'_1 &= -(M' + \mathcal{M}') + \frac{l\mathcal{C}'}{4} \end{aligned}$$

(si tenga presente che la trave è ora lunga $\frac{l}{2}$) avremo ancora una sollecitazione fondamentale simmetrica che può essere studiata nella trave di lunghezza metà rispetto a quella ora considerata (cioè in una trave di lunghezza $\frac{1}{4}$ della primitiva).

Così possiamo proseguire giungendo al risultato che in una sezione perpendicolare alla z la soluzione fondamentale cercata differisce da quella di un'altra sezione generica solo per l'intensità delle sollecitazioni a flessione semplice che intervengono a formarla; e poichè quando il momento flettente è indipendente da z anche le corrispondenti componenti di tensione sono indipendenti da z , in questo caso che il momento flettente dipende linearmente da z concluderemo senz'altro che le componenti di tensione (nella parte che contribuisce al momento flettente e soltanto in quella parte) dipendono linearmente da z . Così si deduce che σ_z dipende linearmente da z mentre ne sono indipendenti τ_{xz} e τ_{yz} . Allora le equazioni indefinite dell'equilibrio si spezzano nelle seguenti:

$$(3) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Ma le (3), unite alla relazione di congruenza

$$(m+1) \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right\} = \Delta'_2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \left[\Delta'_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]$$

non sono altro che le condizioni relative ad un sistema elastico piano⁽¹⁾; e poichè sulla superficie laterale le forze esterne sono nulle, così è nulla la sollecitazione dovuta a queste; si ha cioè $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ che insieme con le (4) rappresenta la posizione caratteristica del problema di Saint-Venant e dà luogo, nel caso che ci interessa, alla flessione composta.

Giova osservare esplicitamente che le dimostrazioni finora esposte presuppongono l'esistenza della soluzione minimamente. Un esempio del procedimento di verifica indicato al n. 2 sarà svolto in una prossima Nota per dimostrare che la soluzione del Lévy per le dighe è una soluzione fondamentale.

Astronomia. — *Il sistema di U Cephei.* Nota⁽²⁾ di G. VIOLA, presentata dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Dal tempo della sua scoperta fino ad oggi è stata la variabile più osservata e studiata da gran parte degli astronomi. Attirarono l'attenzione continua di alcuni osservatori talune peculiarità della sua curva di luce quali sono: la diversa profondità dei minimi (a seconda che essi venivano osservati in stagioni opposte), l'asimmetria della curva rispetto all'epoca del minimo, l'oscillazione di luce durante la fase di totalità (messa in evidenza dal prof. A. Bemporad e confermata poi dopo da altri).

Lo studio più completo sulla U Cephei è stato fatto da R. S. Dugan, che dalle sue osservazioni visuali raccolte tra gli anni 1914-1917 dedusse con la nota teoria di H. N. Russell gli elementi dell'orbita. Anche Harlow Shapley nel suo catalogo dà per questa variabile, gli elementi orbitali ottenuti dalle 695 osservazioni fotometriche di Wendell, delle quali solo 27 abbracciano il ramo di luce costante.

Miss Cummings e R. H. Baker la osservarono fotograficamente durante gli anni 1915-1917; quest'ultimo, in base alle osservazioni raccolte, discusse gli elementi del sistema.

L'ultimo quinquennio fu del tutto dedicato da Gadomski, Hellerich, Campbell ed altri allo studio della durata del periodo di rivoluzione.

Da noi, grazie all'opera svolta dal prof. Bemporad nel campo delle variabili ad eclisse, si possiede un ricco materiale di osservazioni fotometriche, che può senza dubbio considerarsi come preziosa fonte di ricerche e studi in questo nuovo ramo dell'Astronomia.

(1) Si osservi che, per quanto si è ora dimostrato è $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$ e quindi $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1929.

Nella presente Nota utilizziamo quanto è stato raccolto sulla variabile in quistione, dal 1913 in poi, studiando particolarmente le osservazioni del prof. Bemporad. Le osservazioni fotometriche che l'A. gentilmente mi comunicò manoscritte, ammontano a 1064, così distribuite:

I.	osservazioni	196	raccolte	dal	27	dicembre	1910	all'	11	agosto	1911
II.	»	346	»	»	10	maggio	1913	al	7	settembre	1913
III.	»	121	»	»	24	settembre	1913	al	16	febbraio	1914
IV.	»	152	»	»	13	ottobre	1914	al	31	gennaio	1915
V.	»	138	»	»	17	febbraio	1915	al	26	agosto	1915
VI.	»	111	»	»	6	agosto	1920	al	5	settembre	1920.

La prima serie è stata raccolta dall'Osservatorio Astrofisico di Catania, le rimanenti all'Osservatorio di Capodimonte in Napoli. Per le misure di estinzione fu adoperato il fotometro a cuneo di Toepfer, e per i confronti furono adottate esclusivamente le stelle

(a)	B. D. + 81° 30'	Gr. B. D. 8 ^m .3	H. P. 8 ^m .08	P. D. 8 ^m .04
(b)	B. D. + 81° 27'	Gr. B. D. 8 ^m .6	H. P. 8 ^m .44	P. D. 8 ^m .53

ammettendo per la (a) la grandezza 7.85 conclusa da appositi confronti eseguiti a Catania nel 1911. Per gran parte delle osservazioni della serie II e per tutte quelle della serie III venne introdotta la (b), però tutte le osservazioni furono ridotte in base ai confronti colla (a), perchè la (b) molte volte accennò a sospetti di variabilità.

Per il momento studieremo soltanto le osservazioni comprese nel biennio 1913-1915, avendo cura di scinderle in due gruppi; raccogliendo così in uno i minimi osservati nella stagione estiva, nell'altro quelli osservati durante la stagione invernale.

Minimi estivi ed invernali. — Con il valore (2^d.4929047) del periodo ammesso per l'epoca in cui vennero eseguite le osservazioni, abbiamo ridotto separatamente tutti i minimi estivi e gli invernali agli intervalli di tempo medio eliocentrico di Greenw.

D. J. 2420018-2420020.4929047

D. J. 2420529-2420531.4929047

Le osservazioni disposte in ordine dei nuovi tempi ottenuti, e raccolte in gruppi di 4 hanno dato, per i minimi estivi 115 valori normali, e 69 per gli invernali, che a loro volta furono perequati di 5 in 5. In base a questi nuovi valori abbiamo costruito due curve di luce (vedi figg. 1 e 2) che presentano le seguenti particolarità:

- a) sono asimmetriche;
- b) i minimi non hanno uguale amplitudine;

c) il minimo invernale è più stretto dell'estivo;

d) presentano durante la fase di totalità delle oscillazioni variabili in posizione rispetto all'epoca del minimo.

Considerando i tempi corrispondenti a grandezze eguali prese sui rami ascendente e discendente della curva di luce si ha:

Minimi estivi					Minimi invernali				
G ₀	Ramo D.	Ramo A.	Media	Δ	G ₀	Ramo D.	Ramo A.	Media	Δ
7 ^M .00	0 ^d .0290	0 ^d .3550	0 ^d .1920	10	7 ^M .20	0 ^d .1035	0 ^d .3825	0 ^d .2430	13
7 .20	0530	3290	1910	15	7 .40	1200	3635	2417	7
7 .40	0720	3130	1925	15	7 .60	1335	3485	2410	10
7 .60	0875	3005	1940	10	7 .80	1460	3380	2420	10
7 .80	1000	2900	1950	10	8 .00	1560	3300	2430	0
8 .00	1100	2820	1960	35	8 .20	2625	3235	2430	5
8 .20	1210	2780	1995	15	8 .40	1700	3170	2435	10
8 .40	1300	2670	1985	3	8 .60	1780	3110	2445	2
8 .60	1385	2560	1982	13	8 .80	1860	3035	2447	7
6 .80	1515	2475	1995		9 .00	1950	2935	2440	
			Media 0 ^d .1956					Media 0 ^d .2430	

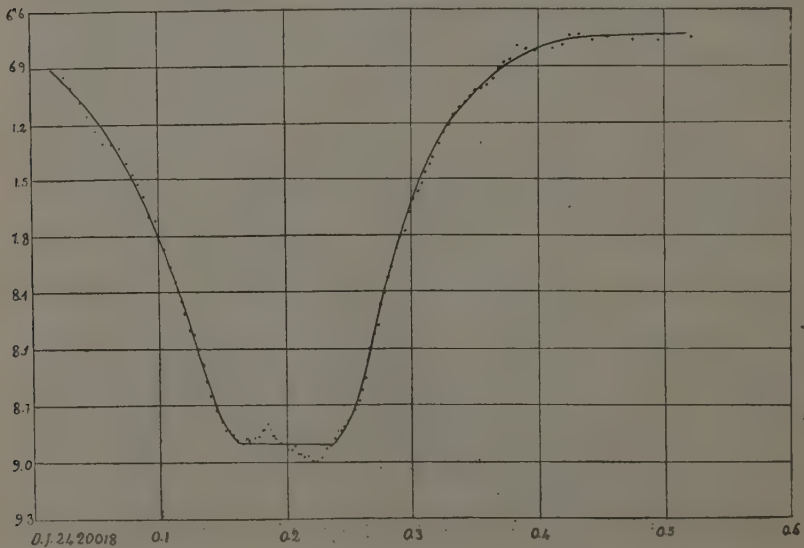


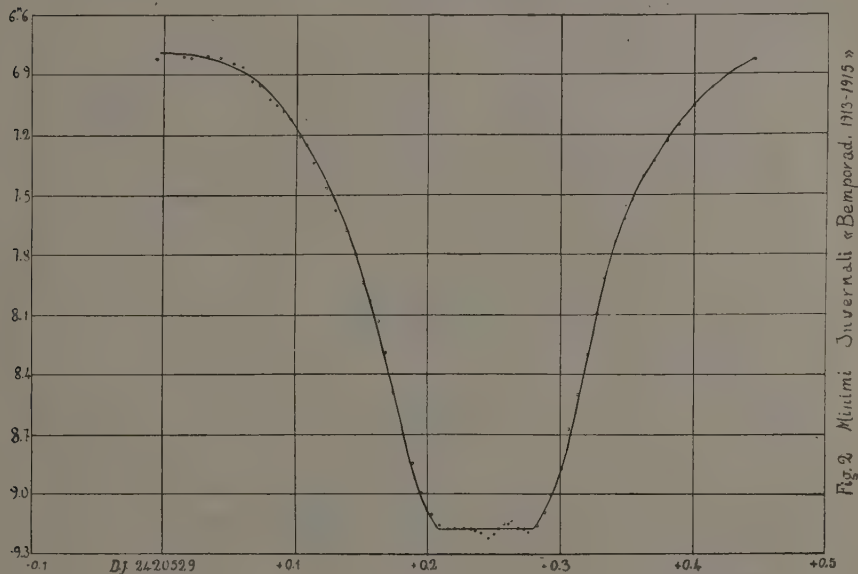
Fig. 1 Minimi Estivi « Bemporad: 1913-1915 »

quindi

Minimo estivo D. J. 2420018.1956

Minimo invernale D. J. 2420529.2430.

La leggiera variazione delle differenze Δ , accusa che le due curve sono asimmetriche, e che tale asimmetria è maggiore per la prima.



Indicando con t_1 e t_2 le epoche dianzi trovate si ha:

$$t_2 - t_1 = 511^d.0474$$

che divisa per il numero dei periodi (205) dà

$$P = 2^d.4929141$$

valore poco diverso da quello ammesso nella riduzione di tutte le osservazioni raccolte nel biennio 1913-1915.

Riferendo gli intervalli di tempo ai quali abbiamo ridotto i minimi estivi e gli invernali ad un'unica origine, si ha, considerando le grandezze (prese sui rami ascendente e discendente delle due curve) corrispondenti alla stessa fase:

Rami discendenti.

Minimi estivi			Minimi invernali			$\Delta(G'_0 - G_0)$
Fase	G_0	ΔG_0	Fase	G'_0	$\Delta G'_0$	
0 ^d .0300	7 ^M .01	0.16	0 ^d .0755	6 ^M .96	0.16	— 0.05
0500	7 .17	0.21	0955	7 .12	0.22	— 0.05
0700	7 .38	0.26	1155	7 .34	0.28	— 0.04
0900	7 .64	0.35	1355	7 .62	0.34	— 0.02
1100	7 .99	0.42	1555	8 .03	0.39	+ 0.03
1300	8 .41	0.38	1755	8 .42	0.58	+ 0.01
1500	8 .79	0.11	1955	9 .00	0.17	+ 0.21
1700	8 .90		2155	9 .17		+ 0.27

Rami ascendenti.

Minimi estivi			Minimi invernali			$\Delta(G'_0 - G_0)$
Fase	G_0	ΔG_0	Fase	G'_0	$\Delta G'_0$	
0 ^d .2200	8 ^M .90	0.02	0 ^d .2655	9 ^M .17	0.05	+ 0.27
2400	8 .88	0.31	2855	9 .12	0.36	+ 0.24
2600	8 .57	0.53	3055	8 .76	0.60	+ 0.19
2800	8 .04	0.43	3255	8 .16	0.48	+ 0.12
3000	7 .61	0.31	3455	7 .68	0.30	+ 0.07
3200	7 .30	0.19	3655	7 .38	0.20	+ 0.07
3400	7 .11	0.14	3855	7 .18	0.16	+ 0.07
3600	6 .97	0.09	4055	7 .02	0.12	+ 0.05
3800	6 .88	0.07	4255	6 .90	0.08	+ 0.02
4000	6 .81		4455	6 .82		+ 0.01

Indicando con a, b, c, d e con a', b', c', d' , i tratti di curva compresi tra i limiti 0^d.03-0^d.11; 0^d.11-0^d.17; 0^d.22-0^d.30; 0^d.30-0^d.40; 0^d.075-0^d.135; 0^d.135-0^d.215; 0^d.265-0^d.344; 0^d.345-0^d.445; si ha per i due minimi:

Minimi estivi:

Il tratto a è più ripido del tratto d ;

Il tratto d è meno ripido del tratto c .

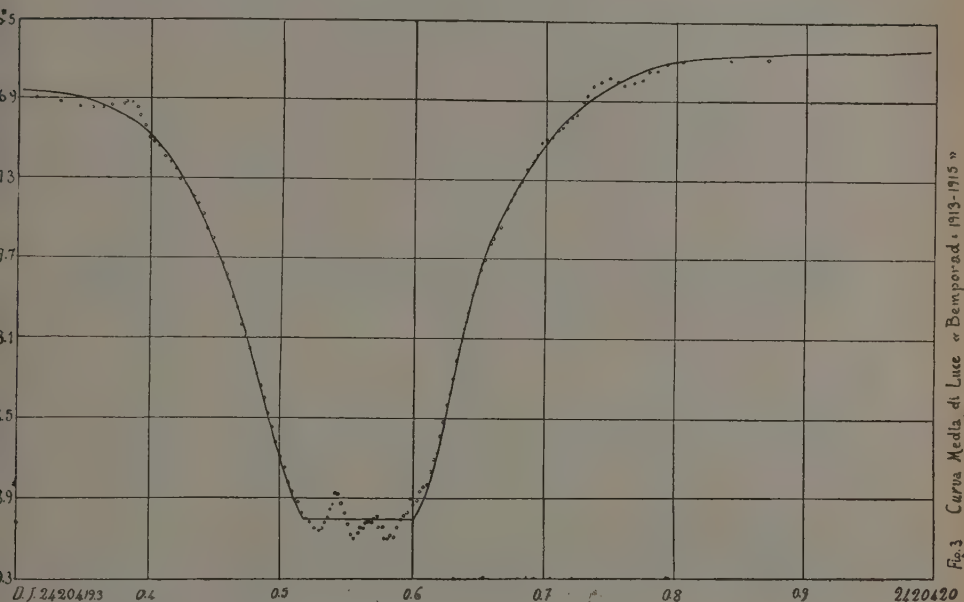
Minimi invernali:

Il tratto a' è più ripido del tratto d' ;

Il tratto b' è meno ripido del tratto c' .

Infine, dal paragone in amplitudine delle due curve, si deduce: i minimi invernali sono più profondi degli estivi (ad eccezione del tratto di curva che abbraccia l'inizio dell'eclisse).

Il massimo divario in amplitudine è di 0.27.



Curva media di luce.

Le precedenti curve di luce non si adattano al calcolo degli elementi orbitali del sistema in esame, perchè si hanno risultati diversi, secondo che si adopera l'una o l'altra. Tale inconveniente si elimina col ricorrere alla curva media di luce.

Le osservazioni (senza distinzione alcuna tra invernali ed estive) vennero ridotte tutte all'intervallo di tempo medio eliocentrico di Greenw.

D. J. 2420419-2420421.4929047.

I valori normali ottenuti, perequati di 5 in 5, e rappresentati graficamente danno luogo alla curva media di luce (vedi fig. 3) che al pari delle precedenti, presenta le seguenti particolarità:

a) è asimmetrica rispetto all'epoca del minimo;

Curva media di luce - Valori perequati.

N.	Fase	G _o	N.	Fase	G _o	N.	Fase	G _o	N.	Fase	G _o
1	od.3128	6M.89	37	od.4812	8M.27	73	od.5732	8M.98	109	od.6628	7M.54
2	3316	6 .91	38	4842	8 .33	74	5740	9 .04	110	6656	7 .54
3	3456	6 .94	39	4868	8 .40	75	5760	9 .04	111	6680	7 .45
4	3548	6 .94	40	4896	8 .47	76	5780	9 .10	112	6708	7 .44
5	3630	6 .94	41	4928	8 .54	77	5804	9 .10	113	6730	7 .40
6	3692	6 .93	42	4958	8 .62	78	5828	9 .01	114	6758	7 .37
7	3792	6 .92	43	4988	8 .69	79	5852	9 .09	115	6786	7 .33
8	3802	6 .91	44	5020	8 .74	80	5878	9 .04	116	6828	7 .31
9	3840	6 .91	45	5050	8 .82	81	5904	9 .00	117	6854	7 .24
10	3880	6 .94	46	5076	8 .86	82	5926	8 .98	118	6892	7 .20
11	3916	6 .98	47	5101	8 .90	83	5948	8 .97	119	6928	7 .17
12	3950	7 .03	48	5128	8 .91	84	5970	8 .90	120	6966	7 .11
13	3988	7 .09	49	5154	8 .97	85	5992	8 .93	121	7002	7 .09
14	4026	7 .11	50	5184	9 .00	86	6020	8 .91	122	7040	7 .08
15	4064	7 .13	51	5216	9 .01	87	6046	8 .86	123	7080	7 .04
16	4102	7 .19	52	5248	9 .05	88	6074	8 .84	124	7120	7 .03
17	4142	7 .21	53	5282	9 .06	89	6102	8 .83	125	7158	7 .00
18	4180	7 .25	54	5306	9 .05	90	6130	8 .76	126	7188	6 .98
19	4218	7 .30	55	5330	9 .02	91	6152	8 .70	127	7234	6 .97
20	4254	7 .32	56	5348	8 .99	92	6178	8 .67	128	7272	6 .90
21	4288	7 .36	57	5366	8 .95	93	6202	8 .58	129	7312	6 .87
22	4322	7 .38	58	5388	8 .93	94	6228	8 .51	130	7362	6 .82
23	4356	7 .42	59	5404	8 .86	95	6252	8 .43	131	7420	6 .80
24	4392	7 .47	60	5424	8 .88	96	6274	8 .37	132	7482	6 .78
25	4430	7 .55	61	5448	8 .93	97	6294	8 .29	133	7540	6 .80
26	4472	7 .60	62	5474	8 .97	98	6318	8 .21	134	7624	6 .82
27	4510	7 .68	63	5498	9 .03	99	6340	8 .14	135	7666	6 .80
28	4544	7 .72	64	5524	9 .01	100	6364	8 .05	136	7726	6 .79
29	4576	7 .78	65	5550	9 .10	101	6390	8 .01	137	7788	6 .74
30	4604	7 .81	66	5576	9 .07	102	6436	7 .96	138	7856	6 .74
31	4630	7 .89	67	5600	9 .04	103	6444	7 .87	139	7928	6 .71
32	4656	7 .94	68	5624	9 .04	104	6474	7 .82	140	8042	6 .73
33	4686	8 .03	69	5646	9 .02	105	6504	7 .75	141	8208	6 .71
34	4738	8 .09	70	5666	9 .02	106	6538	7 .70	142	8426	6 .73
35	4750	8 .14	71	5684	9 .02	107	6572	7 .62	143	8684	6 .72
36	4780	8 .22	72	5702	9 .00	108	6600	7 .61			

b) presenta delle oscillazioni sia durante la fase di totalità, che al principio od alla fine dell'eclisse;

c) la luminosità massima del sistema non è costante.

Da questa, ricavando i valori della grandezza stellare del sistema, per le fasi di massima e minima luminosità, si ha (dal confronto con quelli dedotti da altri osservatori):

	Bemporad	Dugan	Baker	Wendell	Hellerich
Massima luce	6.65	6.90	6.90	6.78	6.90
Minima luce.	9.00	9.19	9.56	9.17	9.28
Amplitudine.	2.35	2.30	2.76	2.39	2.38

Il precedente specchietto mostra il buon accordo tra i valori dell'amplitudine, ricavati rispettivamente dalle curve del Bemporad, Dugan, Wendell, Hellerich.

Fisica. — *Sul complesso 4 d della molecola di elio.* Nota di E. FERMI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

La teoria delle perturbazioni permette di calcolare, per la molecola di elio, l'energia di accoppiamento tra la retta congiungente i due nuclei della molecola e la quantità di moto areale degli elettroni. Se ne deducono le differenze tra i termini $4d\sigma$, $4d\pi$, $4d\delta$ in accordo coi valori sperimentali.

Nelle molecole degli atomi di piccolo peso atomico, particolarmente nelle molecole H_2 ed He_2 , si osservano numerosi gruppi di termini spettroscopici, caratterizzati dallo stesso valore del numero quantico totale n e azimutale l . Si ha così, per es., nell'elio il gruppo dei termini $4d$, aventi numero quantico totale 4 e numero quantico azimutale 2. Il comportamento di questi termini, studiato particolarmente da W. Weizel ⁽²⁾ e G. H. Dieke ⁽³⁾, presenta le seguenti particolarità. Finchè il quanto di rotazione R dei nuclei è piccolo, e cioè per rotazione lenta, il quanto azimutale l si orienta rispetto alla retta congiungente i nuclei, in modo che la sua proiezione λ sopra questa retta assume un valore intero. Nel caso dei termini $4d$, aventi $l = 2$,

(1) Nella seduta del 3 novembre 1929.

(2) W. WEIZEL, «Zs. f. Phys.», 56, 727, 1929.

(3) G. H. DIEKE, «Zs. f. Phys.», 57, 71, 1929.

la proiezione può prendere i valori 0, 1, 2, e si hanno in corrispondenza i termini indicati con i simboli

$$4 d\sigma, 4 d\pi, 4 d\delta.$$

Quando invece la rotazione diventa rapida (R grande), viene a rompersi l'accoppiamento tra l e la retta congiungente i nuclei. Ciò ha per effetto uno spezzamento in due dei termini $4 d\pi$ e $4 d\delta$ (σ -type doubling); infine, al limite per R molto grande, l finisce per accoppiarsi completamente con R .

In questa Nota mi sono proposto di calcolare le differenze tra i termini $4 d\sigma, 4 d\pi, 4 d\delta$ del complesso. Ciò può farsi abbastanza facilmente per mezzo della teoria delle perturbazioni della meccanica quantistica, approfittando del fatto che, avendo i termini in questione dei numeri quantici totale e azimutale abbastanza elevati, le autofunzioni dell'elettone luminoso differiscono per essi abbastanza poco dalle autofunzioni dell'atomo di idrogeno; per modo che si ha in tali autofunzioni una prima approssimazione molto comoda. La legittimità di questo processo è confermata dal fatto che i termini in questione possono rappresentarsi abbastanza bene per mezzo di una formula di Rydberg e la correzione di Rydberg risulta molto piccola. Noi prenderemo dunque come autofunzioni imperturbate per i tre termini $4 d\sigma, 4 d\pi, 4 d\delta$ della molecola di elio le corrispondenti autofunzioni della molecola di idrogeno; e cioè:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = (3 \cos^2 \theta - 1) r^2 \left(1 - \frac{r}{12 r_0} \right) e^{-\frac{r}{4 r_0}} \\ \psi_1 = \sin \theta \cos \theta e^{\pm i \varphi} r^2 \left(1 - \frac{r}{12 r_0} \right) e^{-\frac{r}{4 r_0}} \\ \psi_2 = \sin^2 \theta e^{\pm 2 i \varphi} r^2 \left(1 - \frac{r}{12 r_0} \right) e^{-\frac{r}{4 r_0}} \end{array} \right.$$

in cui $r_0 = 0,53 \cdot 10^{-8}$ cm. rappresenta il raggio della prima orbita dell'idrogeno.

Il potenziale perturbatore V deriva principalmente dal fatto che i due nuclei, invece di essere riuniti nel centro di gravità della molecola, hanno uno dall'altro una certa distanza a . Siccome ciascuno dei due nuclei è accompagnato da un elettrone, la sua carica effettiva sarà e invece di $2e$. Vi è inoltre un terzo elettrone, oltre all'elettone di valenza; siccome però il campo dovuto ad esso verosimilmente non differisce molto da un campo centrale, noi non ne considereremo qui l'azione. Come potenziale perturbatore avremo dunque da considerare il potenziale dovuto a due cariche positive e concentrate in due punti distanti di a uno dall'altro, ed aventi nel

loro punto di mezzo una carica negativa $-2e$. Questo potenziale può svilupparsi in potenze inverse di r ; il primo termine dello sviluppo è:

$$(2) \quad V = \frac{e a^2}{4 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Questa espressione rappresenta bene il potenziale perturbatore per valori abbastanza grandi di r ; siccome però le autofunzioni (1) hanno valori molto piccoli per r piccolo, potremo senz'altro prendere (2) come potenziale perturbatore.

È noto dalla teoria delle perturbazioni che le perturbazioni delle energie dei nostri tre termini, dovute al potenziale perturbatore V , sono date da:

$$(3) \quad \epsilon_0 = -e \frac{\int V |\psi_0|^2 d\tau}{\int |\psi_0|^2 d\tau} \quad ; \quad \epsilon_1 = -e \frac{\int V |\psi_1|^2 d\tau}{\int |\psi_1|^2 d\tau} \quad ; \quad \epsilon_2 = -e \frac{\int V |\psi_2|^2 d\tau}{\int |\psi_2|^2 d\tau}.$$

Sostituendo negli integrali le espressioni (1) e (2) delle ψ e di V , ed effettuando le quadrature si trova:

$$(4) \quad \epsilon_0 = -2 \frac{e^2 a^2}{13440 r_0^3} \quad ; \quad \epsilon_1 = -\frac{e^2 a^2}{13440 r_0^3} \quad ; \quad \epsilon_2 = 2 \frac{e^2 a^2}{13440 r_0^3}.$$

Siccome nella molecola di elio si ha, con grande approssimazione, $a = 2 r_0$, abbiamo

$$\frac{e^2 a^2}{13440 r_0^3} = \frac{e^2}{2 r_0} \frac{1}{1680}.$$

Esprimendo le energie in numeri di onde si ha

$$\frac{e^2}{2 r_0} = 109737 \text{ numeri di onde}$$

poichè $\frac{e^2}{2 r_0}$ rappresenta il numero di Rydberg. Abbiamo dunque infine

$$\epsilon_0 = -130 \quad ; \quad \epsilon_1 = -65 \quad ; \quad \epsilon_2 = 130 \text{ numeri di onde.}$$

Empiricamente sono conosciute le differenze tra i termini $4 d\delta$ e $4 d\sigma$, e tra i termini $4 d\pi$ e $4 d\sigma$. Tali differenze risultano dalla nostra teoria espresse da

$$\epsilon_2 - \epsilon_0 = 260 \quad ; \quad \epsilon_1 - \epsilon_0 = 65.$$

I corrispondenti valori sperimentali sono invece

$$300 \quad \quad \quad 75.$$

Come si vede l'accordo tra teoria ed esperienza è abbastanza buono, siccome la divergenza è di circa il 15 %. Questa differenza residua è verosimilmente dovuta alle ipotesi semplificative della teoria e probabilmente in buona parte al fatto che si è trascurata l'influenza perturbatrice di uno degli elettroni.

Geologia. — *Nuove osservazioni geologiche sulla regione compresa fra il torrente Aurino e il fiume Rienza (Alto Adige)*⁽¹⁾.
Nota III⁽²⁾ di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Durante l'estate scorsa, lo scrivente completò, con la collaborazione del prof. A. Bianchi, il rilievo geologico al 100.000 dei fogli Vetta d'Italia e Monguelfo, per il tratto compreso fra il torrente Aurino ed il fiume Rienza. Nel corso del nostro lavoro di rilevamento sono emerse alcune interessanti novità, che credo utile far conoscere in una breve nota preliminare, facente seguito ai lavori sulla geologia e la petrografia delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti, già pubblicati in questi stessi Rendiconti accademici.

a) *Scaglie del ricoprimento del Picco dei Tre Signori nell'alta Val Rossa e in Val del Vento.* Come si è già accennato in precedenza, sul versante meridionale del M. Riva di Predoi affiora una cinquantina di scaglie tettoniche, costituite da lame discontinue di paragneiss, micascisti, quarziti, scisti filladici, dolomie, calcari bianchi e grigi, calcescisti ed ofioliti; si tratta di una serie molto complessa di ripetute digitazioni appartenenti al ricoprimento del Picco dei Tre Signori, che s'insinuano entro i terreni orogeni del Lias e le intrusioni simiche di età alpina. Il complesso del Picco mostra in definitiva numerose digitazioni dorsali, effetto del movimento di traslazione sopra il Penninico dei ricoprimenti austro-alpini.

b) *Ricoprimento Pizzo Cucchiaio-Punta Merbe.* Al di sopra della Vedretta di Valle Rossa e in corrispondenza alla Punta di Merbe (q. 3090) affiora una complicata zona di scaglie pretriasiche e triasiche, costituite rispettivamente da paragneiss e micascisti sul tipo di quelli appartenenti alla serie del Picco, e da calcari e dolomie. Queste scaglie, associate a lembi sottili di cloritoscisti, poggiano sulle ofioliti alpine che si sviluppano considerevolmente nella media Val Rossa. L'affioramento delle varie lame paleozoico-triasiche è interrotto verso sud dalla Bocchetta di Valle Rossa (q. 2854), ma sulle pendici settentrionali-occidentali di Pizzo Cucchiaio (q. 3132) apparisce, sopra alle prasiniti ed alle anfiboliti, una considerevole massa di serpentine, alla quale sovrastano lame multiple ed irregolari di calcari e dolomie del Trias e di parascisti paleozoici. La zona a scaglie è ricoperta da calcescisti, che si estendono senza interruzione fino alla som-

(1) Lavoro compiuto nell'Istituto Geologico della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1929.

mità di Pizzo Cucchiaio, in modo da ripetere quasi esattamente la struttura presentata dalla Punta di Merbe. È facile seguire anche da lontano il decorso dei calcari e delle dolomie su tutto il versante settentrionale di Pizzo Cucchiaio, sino a che verso est i lembi triasici vanno a finire nell'aria e non è più possibile ritrovarne traccia nell'alta Val Rossa a causa del forte sollevamento assiale verso oriente che si verifica in questa zona.

Le scaglie ora descritte sono separate da quelle che interessano il dorso del ricoprimento del Picco mediante una massa di calcescisti ed ofioliti potente qualche centinaio di metri. Esse andrebbero interpretate, a giudicare almeno dalla loro posizione tettonica e dalle loro caratteristiche petrografiche, come digitazioni superiori del ricoprimento del Picco, analoghe in un certo senso alla Modereckdecke dei Tauri orientali. Il complesso di queste scaglie e insieme del Mesozoico pennidico sovrastante, che si estende dalle cime di Punta Merbe-Pizzo Cucchiaio sino al cristallino antico delle Grisonidi in Val dei Dossi, costituisce, per quanto si è detto, un evidente ricoprimento, che, dal nome delle località ove meglio si manifesta, chiameremo «ricoprimento di Punta Merbe-Pizzo Cucchiaio». Il fenomeno non si limita all'alta Valle Aurina, ma appare esteso, sia pure con modalità diverse, a tutto il settore occidentale-meridionale del Mesozoico pennidico dei Tauri, dove appunto la serie dei calcescisti con pietre verdi appare suddivisa in una quantità di *sous-nappes* da numerosi lembi di Trias e di Paleozoico che la intersecano, soprattutto nelle zone tettonicamente più alte⁽¹⁾ (Dengelstein, Rotwand, Seefeldsp., Dreihornsp., Sattelsp., Wildekreuz-Kramersp., Finsterstern-Trenserjoch, Amthorsp., Weiss-Sp.-Bairnocksp.).

c) *Zona di Matrei*. Questa importantissima «zona» si estende da ovest ad est attraverso tutta la regione studiata, dall'alta Valle Rio d'Arna sino al Passo di Gola, rappresentando senza alcun dubbio l'unità tettonicamente più complessa dell'intera regione. Infatti lame numerosissime quanto irregolari di parascisti, scisti filladici, quarziti, dolomie, calcari, calcescisti, serpentine, prasiniti e anfiboliti si alternano fra loro con una complessità sbalorditiva, tanto da dar luogo non di rado a ripetizioni di decine e decine di elementi strutturali. Il Trias neritico, relativamente poco sviluppato nel settore occidentale, assume uno sviluppo enorme nell'alta Valbona e presso Croda Bianca (versante di Riva); le serpentine presentano pur esse una potenza molto considerevole nel tratto P. Nera-Pianalto (a cavallo fra Val dell'Orso e Val Chiusa Grande). La facies delle varie scaglie risulta in generale tipicamente pennidica e ciò starebbe in accordo con il riferimento della «zona di Matrei» ai più alti complessi tettonici delle Pennidi,

(1) Si consulti il foglio «Bressanone» della Carta Geologica delle Tre Venezie, rilevato da B. SANDER e pubblicato a cura del R. Magistrato alle Acque di Venezia.

come venne proposto qualche anno fa da R. Staub. Su questo importante problema mi riservo però di pronunciarmi definitivamente in seguito.

d) *Ricoprimenti austro-alpini*. Sopra le scaglie della zona di Matrei segue, a sud, il cristallino antico delle Grisonidi (ricoprimenti austro-alpini inferiori), costituito da filladi, micascisti, paragneiss, quarziti, marmi e scisti verdi; a queste rocce, di origine sedimentaria, si accompagnano ortogneiss aplitici ed occhiadini, che in Val di Riva assumono un'importanza affatto secondaria.

Alla Forcella Ciarnil, in Val Casies, affiorano limitati lembi di Trias inferiore e Permiano, che offrono un grande interesse geologico, appartenendo alla zona sinclinale di Secondario e Paleozoico recente (*linea insubrica* della Cornelius-Furlani) che si estende da Kalkstein a Mules, Penserjoch, S. Pancrazio in Val d'Ultimo ecc., in modo da separare i terreni cristallini delle Grisonidi (ricoprimenti austroalpini inferiori) da quelli delle Tirolidi (ricoprimenti austroalpini superiori). Questa zona rappresenta anche secondo le vedute più moderne, le radici dei terreni mesozoici e permiani dell'Ortler, delle Telve Bianche ecc. (Sedimenti austroalpini medii di Staub).

I terreni cristallini delle Tirolidi non sembrano differire essenzialmente da quelli delle Grisonidi, essendo per la massima parte rappresentati da micascisti e paragneiss simili a quelli di Val di Riva e da ortogneiss acidi a facies aplitica, pegmatitica, porfirica e occhiadina ecc. Però verso sud i paragneiss e i micascisti fanno passaggio ad una fillade quarzifera, ben diversa da quella di Cima Dura (Grisonidi) e in tutto simile alle filladi dinariche.

Presso lo sbocco delle valli meridionali, da Prato alla Drava, a Planca di sotto in Val Casies, a Rasùn inferiore, affiora il Mesozoico del « Drauzug » che fu oggetto di uno studio particolareggiato da parte della Furlani. Questo complesso di terreni secondari, che ad ovest riappare al castello di Brunico e ad est si sviluppa enormemente nei monti della Gail, rappresenta una delle più importanti zone tettoniche di tutte le Alpi, separando la serie dei ricoprimenti austro-alpini da quella più meridionale delle Dinaridi. In altri termini il « Drauzug » o « zona della Drava » in questo settore è sinonimo del cosiddetto « limite alpino-dinarico » di alcuni autori, denominazione che, con maggior rigore, potrebbe essere sostituita da quella di « limite tirolico-dinarico ». È chiaro che, secondo tale concezione, sostenuta soprattutto da R. Staub, non si può parlare di un paese « alpino » contrapposto ad un paese « dinarico », ma solo di un'unico sistema alpino, di cui le Dinaridi non sono che la parte più meridionale. Queste ultime presentano infatti il loro zoccolo cristallino costituito dalle medesime filladi e dagli stessi parascisti che formano la parte più alta delle Tirolidi. Sopra queste rocce fan seguito a sud del fiume Rienza i sedimenti del Permiano e del Trias delle Dolomiti.

È interessante osservare come i terreni cristallini delle unità austro-dinariche offrano solo in apparenza una disposizione isoclinale, formando in realtà una serie di pacchetti di pieghe fortemente costipate e laminate. La più saliente caratteristica tettonica delle Grisonidi e delle Tirolidi è in ogni modo costituita da una grandiosa milonitizzazione dei vari terreni, che appaiono spesso energicamente disturbati, laminati e non di rado addirittura brecciati; il fenomeno è soprattutto evidente negli ortogneiss, che, in causa del loro minor grado di plasticità rispetto ai parascisti, furono più facilmente vittime di un'intensa cataclasi. Anche le zone mesozoiche, poco o nulla metamorfosate durante l'orogenesi alpina, risultano disturbate in maniera incredibile, tanto da assumere la struttura di gigantesche miloniti, solcate in tutti i sensi da grandi piani di faglia. In conclusione i ricoprimenti austro-alpini appaiono ben caratterizzati da questa loro struttura cataclastica, che li differenzia in modo evidente tanto dal complesso Dinamico quanto dalle unità Pennidiche.

e) *Ammasso intrusivo delle Vedrette Giganti*. Ho già detto in precedenza che l'ammasso intrusivo delle Vedrette Giganti pare rappresenti una specie di laccolite intrusa nei terreni cristallini delle Grisonidi, nel senso che la roccia plutonica sembra esser penetrata fra i banchi di scisti già fortemente inclinati verso sud e di averli quindi forzati ad adattarsi grossolanamente all'andamento della sua superficie. Difatti l'ammasso tonalitico mostra quà e là (Val Fredda, Riesernock ecc.) cospicui avanzi della coltre scistosa, ed il fenomeno appare chiarissimo e grandioso, guardando da campo Tures verso lo sfondo di Val di Riva.

Se noi riteniamo che l'attuale disposizione tettonica dei monti cristallini pusteresi sia dovuta in massima parte all'orogenesi alpina, bisogna ammettere che l'intrusione abbia disturbato le linee strutturali formatesi durante il Terziario e che quindi la sua età sia da riportarsi al Cenozoico recente. In tal caso, una chiara conferma a questa idea sarebbe offerta dal piccolo nucleo tonalitico di Anterselva, il quale necessariamente deriva dallo stesso bacino magmatico che diede origine all'ammasso delle Vedrette Giganti. È facile inoltre trovar esempi molto evidenti di filoni tonalitici discordanti e perfino normali rispetto ai banchi di scisti (Val Fredda, Val di S. Valburga, presso l'osteria Tobl allo sbocco di Val di Riva ecc.). D'altra parte, mentre gli ortogneiss antichi sono spesso ripiegati con i parascisti (M. Covoni), questo fatto non si verifica mai per la tonalite. Anche la grande analogia litologica e strutturale fra il massiccio delle Vedrette Giganti e quelli post-alpini di Bressanone-Ivigna, M. Croce⁽¹⁾, Adamello, Bregaglia ecc. parlerebbe in favore di una stretta unità genetica fra gli stessi e quindi di un'età recente della tonalite pusterese. Con ciò non si

(1) GIORGIO DAL PIAZ, *Il confine alpino-dinarico dall'Adamello al massiccio di Monte Croce nell'Alto Adige*. « Accad. Veneto-Trentino-Istria », v. XVII, 1926.

vuol dire affatto che l'intrusione sia avvenuta ad orogenesi finita, poichè la roccia eruttiva è in generale fortemente laminata alla periferia, senza però che la sua struttura ne risulti menomamente alterata. Questa laminazione potrebbe dipendere forse da quei medesimi movimenti tardivi che determinarono negli scisti il formarsi di numerose faglie e zone di disturbo, spesso molto intenso, disposte trasversalmente rispetto alla direzione delle massime linee strutturali.

Cristallografia. — *La struttura cristallina degli ioduri anidri dei metalli bivalenti.* — I. *Ioduri di cobalto, di ferro e di manganese* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. FERRARI e F. GIORGI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Gli ioduri dei metalli bivalenti sono nella maggior parte assai igroscopici, e questa proprietà unita alla difficoltà di ottenere cristalli ben formati ci dà ragione delle difficoltà che rendono inapplicabile il metodo goniometrico allo studio della forma cristallina di queste sostanze e la mancanza di conoscenze sulla stessa.

Per le dette ragioni, prima della introduzione dell'esame röntgenografico, erano stati studiati dal punto di vista cristallografico solo gli ioduri di cadmio, piombo e mercurio, che non sono deliquescenti e che danno con relativa facilità cristalli ben formati. I primi due ioduri e la modificazione rossa del secondo sono stati studiati anche coi raggi Röntgen. Gli ioduri di cadmio e di piombo sono esagonali e presentano la struttura definita per la prima volta da Bozorth per l'ioduro di cadmio ⁽³⁾. Da essi differisce invece l'ioduro di mercurio rosso che è tetragonale e presenta una struttura propria ⁽⁴⁾.

L'esame röntgenografico della struttura cristallina degli ioduri dei metalli bivalenti è particolarmente difficile dal punto di vista sperimentale, oltre che per la velocità veramente enorme con la quale questi ioduri assorbono l'umidità atmosferica, anche per il fatto che lo iodio mal riflette la radiazione X proveniente dagli anticatodi di cromo, ferro, rame, nichelio e cobalto comunemente usati per ottenere fotogrammi col metodo delle

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale e di Chimica-fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1929.

(3) « Journ. Am. Chem. Soc. », 44, (1922), 2232.

(4) R. J. HAVIGHURST, « Am. Journ. Science » 10, (1925), 556; J. M. BYVOET, A. CLAASSEN e A. KARSEN, « Koninkl. Akad. van Wetensch. Amsterdam. Wisk en Natk. Afd. », 35, 111-28.

polveri. Pur avendo estesa l'indagine a tutti gli ioduri dei metalli bivalenti, la cui struttura non è nota, non ci è stato possibile definire fino ad ora che i reticoli degli ioduri di cobalto, di ferro e di manganese.

L'ioduro di cobalto è stato ottenuto trattando carbonato di cobalto con acido iodidrico in soluzione, disidratando e fondendo poi il sale idrato in corrente di idrogeno secco mescolato con acido iodidrico gassoso ottenuto facendo passare l'idrogeno caldo sopra iodio metallico leggermente riscaldato. Abbiamo così ottenuto un prodotto che fonde a 515° di color nero che all'analisi dà i valori: cobalto 19.10 %, iodio 81.0 % che coincidono bene con quelli calcolati per CoI_2 : cobalto 18.84 % iodio 81.16 %.

L'ioduro ferroso è stato preparato sciogliendo in acido iodidrico ossido ferrico e riducendo l'ioduro ferrico così formato con ferro metallico in eccesso. Il sale ferroso idrato venne poi disidratato e fuso in corrente di idrogeno ed acido iodidrico come il precedente. Ottenemmo una massa bruno scuro che fonde a 592° e che all'analisi corrispose alla composizione dell'ioduro ferroso (trovato: ferro 18.27 %; iodio 81.42 %; calcolato: ferro 18.03 %; iodio 81.97 %).

L'ioduro manganoso è stato preparato in modo perfettamente analogo a quello di cobalto. Si presenta di color roseo bruno, fonde a 638° , i risultati dell'analisi coincidono abbastanza bene con quelli voluti dalla formula (trovato: manganese 17.93 %; iodio 82.65 %; calcolato: manganese 17.78 %; iodio 82.22 %). L'esame röntgenografico di questi ioduri è stato eseguito usando una radiazione X proveniente da un tubo ad anticatodo di ferro. I fotogrammi ottenuti sono tutti molto deboli e si possono interpretare solo con difficoltà. L'ordinamento dato nella Tabella I è fatto attribuendo a questi tre ioduri una struttura tipo « ioduro di cadmio ». Il rapporto assiale e gli indici dei piani reticolari sono stati determinati mediante i diagrammi di Hull.

Ritenendo più esatte le costanti dedotte dalle ultime linee si possono dare le seguenti dimensioni delle celle elementari di questi tre ioduri;

CoI_2 (nero)	$a = 3.96 \text{ \AA}$	$c = 6.65 \text{ \AA}$	$c/a = 1.68$
FeI_2	$a = 4.04 \text{ »}$	$c = 6.75 \text{ »}$	$c/a = 1.67$
MnI_2	$a = 4.16 \text{ »}$	$c = 6.82 \text{ »}$	$c/a = 1.64$

Le densità che si calcolano confrontate con quelle sperimentali sono:

CoI_2	5.75	sperimentale	5.68 ⁽¹⁾
FeI_2	5.39	»	5.315 ⁽²⁾
MnI_2	5.01	»	4.84

(1) CLARK e BUCKNER, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 44, (1922), 230.

(2) BILTZ e BIRK, « Zeitschr. anorg. Chem. », 134, (1923), 132.

TABELLA I.

Ioduro di cobalto		Ioduro di ferro		Ioduro di manganese		Indici $h_1 h_2 h_3$	Costante reticolare di		
$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2}$	Intensità		CoI_2 $c/a=1.68$	FeI_2 $c/a=1.67$	MnI_2 $c/a=1.64$
3.217	f	3.275	m	—	—	0 0 2	3.86	3.94	—
—	—	1.985	—	2.058	d	1 1 0	—	3.97	4.11
—	—	1.841	d	—	—	1 0 3	—	3.95	—
1.693	m	1.712	m	—	—	1 1 2	3.93	3.99	—
1.647	mf	1.664	mf	—	—	0 0 4	3.93	4.00	—
—	—	—	—	1.726	md	2 0 1	3.93	4.00	4.13
—	—	1.504	m	—	—	1 0 4	—	4.01	—
1.337	d	1.378	d	—	—	2 0 3	3.92	4.04	—
1.268	f	1.286	f	1.333	m	1 2 1	3.94	4.01	4.15
—	—	—	—	1.311	d	1 1 4	3.94	4.03	4.14
—	—	1.252	mf	1.259	m	1 0 5	—	4.03	4.11
—	—	—	—	—	—	1 2 2	—	—	4.14
—	—	—	—	1.233	m	2 0 4	—	—	4.14
—	—	—	—	1.204	m	3 0 0	—	—	4.16
—	—	1.136	m	—	—	1 2 3	—	4.03	—
1.114	m	1.119	m	1.134	mf	0 0 6	3.96	4.04	4.15
—	—	—	—	—	—	3 0 2	—	—	4.16
—	—	1.066	mf	—	—	1 0 6	—	4.04	—
—	—	—	—	—	—	2 0 5	—	4.04	—

Il valore sperimentale della densità dell'ioduro manganoso non era noto ed è stato ottenuto da noi col metodo del picnometro usando come liquido l'olio di vaselina. Esso concide meno bene con quello calcolato di quello dei precedenti ioduri.

Il confronto delle intensità calcolate delle linee con quelle osservate non può essere fatto perchè i fotogrammi sono troppo deboli. La struttura « ioduro di cadmio » che abbiamo attribuito a questi ioduri è però confermata dalle seguenti osservazioni. Assumendo come coordinate degli atomi della cella elementare:

$$\text{Me (ooo)} \quad \text{I } (2/3, 1/3, 1/4; 1/3, 2/3, 1/4)$$

i valori dei fattori di struttura delle diverse facce si riducono a sei.

Se è $h_1 = h_2$ o h_1 e h_2 entrambi divisibili per tre il fattore di struttura assume i valori:

- a) Me^2 se h_3 è dispari;
- b) $(Me + 2I)^2$ se h_3 è divisibile per 4;
- c) $(Me - 2I)^2$ se h_3 è pari non divisibile per 4;

Se h_1 è diverso da h_2 e non entrambi divisibili per tre si hanno i valori:

- d) $(Me^2 + 3I^2)$ se h_3 è dispari;
- e) $(Me - I)^2$ se h_3 è divisibile per 4;
- f) $(Me + I)^2$ se h_3 è pari ma non divisibile per 4;

Me ed I rappresentano i numeri atomici dell'ione metallo e dell'ione iodio. Il fattore di struttura assume i valori minimi nei casi a) ed e). Nei nostri fotogrammi non compaiono infatti le facce i cui indici rientrano nei casi a) ed e) eccezione della 204 e della 300 che troviamo nel fotogramma dell'ioduro manganoso e della 104 che compare nel fotogramma dell'ioduro ferroso. È questo fatto una conferma sufficiente della struttura supposta.

L'esame röntgenografico ha così chiarito finora la struttura di sei ioduri bivalenti dimostrando per cinque di essi un reticolo del tipo « ioduro di cadmio » delle dimensioni:

	raggio dell'ione metallico			
CoI_2	$a = 3.96 \text{ \AA}$	$c = 6.65 \text{ \AA}$	$c/a = 1.68$	0.82 \AA
FeI_2	$a = 4.04 \text{ »}$	$c = 6.75 \text{ »}$	$c/a = 1.67$	0.83 »
MnI_2	$a = 4.16 \text{ »}$	$c = 6.82 \text{ »}$	$c/a = 1.64$	0.91 »
CdI_2	$a = 4.24 \text{ »}$	$c = 6.84 \text{ »}$	$c/a = 1.612$	1.03 »
PbI_2	$a = 4.53 \text{ »}$	$c = 6.93 \text{ »}$	$c/a = 1.53$	1.32 »

Le costanti dell'ioduro di cadmio sono quelle date da Boozorth, mentre quelle dell'ioduro di piombo, sono state calcolate da un nostro fotogramma essendo le costanti del reticolo di questa sostanza, trovate dai precedenti autori, discordanti:

$$\begin{aligned}
 a &= 4.59 \text{ \AA} & c &= 7.02 \text{ \AA} & c/a &= 1.53 & \text{secondo 'A. E. Van Arkel (1);} \\
 a &= 4.59 \text{ »} & c &= 6.78 \text{ »} & c/a &= 1.476 & \text{secondo P. Terpstra e H. G.} \\
 & & & & & & \text{Westenbrink (2).}
 \end{aligned}$$

La densità dell'ioduro di piombo dedotta dalle dimensioni della cella da noi calcolate risulta 6.22, quasi identica quindi a quella che si ottiene dalla cella di Terpstra e Westenbrink 6.18, e pur essendo assai più alta di quella calcolata da van Arkel 5.94, non raggiunge tuttavia il massimo valore sperimentale 6.38.

(1) « Rec. Trav. Chem. Pays-Bas », 45, (1926), 440.

(2) « Koninkl. Akad. van Wetensch. Amsterdam. Wisk. en Natk. Afd. » 35, 75-86.

Dal precedente specchio vediamo che col crescere del raggio dell'ione metallico, mentre aumenta il lato del prisma esagono diminuisce il rapporto assiale. Il lato dell'esagono di base ed il rapporto assiale sono funzione del diametro dell'ione metallico come rappresenta il grafico della fig. 1 e come si deduce facilmente dalla struttura della cella. Non è ancora conosciuta la struttura di parecchi ioduri bivalenti, così l'ioduro di nichelio dà un fotogramma che non siamo riusciti ad ordinare mentre quelli di magnesio, di calcio, di stronzio e di bario non hanno potuto fino ad ora essere fotografati per la loro grandissima deliquescenza. Essendo accertato però che la serie romboedrica comprende ioduri di metalli il cui ione ha

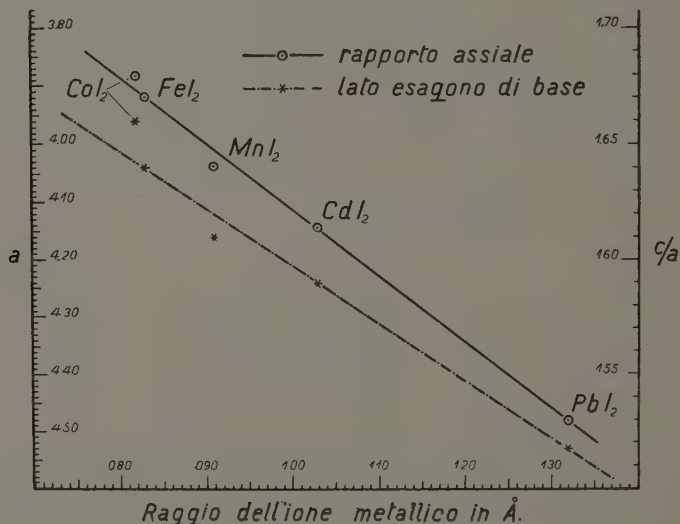


Fig. 1.

diametri molto diversi quale il cobalto ed il piombo, siamo portati a ritenere che la maggior parte degli ioduri dei metalli bivalenti presenti la struttura dell'ioduro di cadmio. L'esistenza nel caso di questi alogenuri di un sol tipo di struttura viene spiegato dal fatto che è l'alogeno di diametro assai grande che determina la struttura del reticolo essendo l'influenza dell'ione metallico trascurabile per le sue dimensioni relativamente piccole rispetto a quelle dell'ione negativo.

Riassumendo:

Si dimostra che gli ioduri di cobalto, di ferro e di manganese presentano una struttura tipo «ioduro di cadmio». La cella elementare di questi ioduri ha le dimensioni:

CoI_2	$a = 3.96 \text{ \AA}$	$c = 6.65 \text{ \AA}$	$c/a = 1.68$	dens. calc.	5.75
FeI_2	$a = 4.04 \text{ »}$	$c = 6.75 \text{ »}$	$c/a = 1.67$	» »	5.39
MnI_2	$a = 4.16 \text{ »}$	$c = 6.82 \text{ »}$	$c/a = 1.64$	» »	5.07

Si calcolano le dimensioni della cella elementare dell'ioduro di piombo per il quale due precedenti autori avevano dato valori discordanti.

Esse risultano:

$$a = 4.53 \text{ \AA} \quad c = 6.92 \text{ \AA} \quad c/a = 1.53$$

Il rapporto assiale da noi calcolato coincide con quello trovato da uno dei precedenti sperimentatori (van Arkel) mentre differiscono alquanto i valori di a e di c .

Mineralogia. — *Nuove ricerche sull'Euclasio.* — *Euclasio di Valle Aurina.* Nota di A. CAVINATO, presentata dal Socio G. BOERIS.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulla utilizzazione di un interessante livello idrico sovrastante la parte nordorientale dell'Altipiano dei Sette Comuni.* Nota di L. MADDALENA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. DAL PIAZ.

A chi giunga per la prima volta nell'amplissima conca di Marcesina (Comune di Enego) che si svolge in dolci ondulazioni per qualche decina di kmq. tra quota di 1200 e 1400 metri, coronata da una serie di cime dal nome che ricorda tutto il sacrificio e l'orrore della grande guerra, desta meraviglia il notare frequentissimi i ciottoli di calcare arrotondati come se costituissero il fondo di un torrente ed il constatare che, scavando, non si incontrano che depositi alluvionali.

Per spiegare questo fenomeno occorre ricordare, come nell'epoca glaciale gran parte dell'Altipiano, fino a quota forse superiore ai 1400 metri, fosse sommerso dal ghiacciaio per opera di due grandi correnti che provenivano l'una dalla Val d'Assa alimentata dal grande ghiacciaio dell'Adige, l'altra dalla Val Brenta, il cui ghiacciaio era potentemente incrementato da un ramo di quello del Piave discendente dalla Valle di Arsìè.

(1) Nella seduta del 17 novembre 1929.

Gli studi del prof. Omboni⁽¹⁾, del cav. Secco⁽²⁾, del prof. Arturo Rossi⁽³⁾, del prof. Taramelli⁽⁴⁾, del dott. Arturo Negri⁽⁵⁾ e del prof. C. De Stefani⁽⁶⁾ hanno ampiamente illustrato questi fenomeni, la cui dimostrazione ineluttabile consiste specialmente nella grande quantità di rocce tipiche delle alte valli Trentine, che si trovano sparse in tanti punti dell'altipiano di Asiago e di Tonezza.

Per citare alcuni esempi ricorderemo che a Tulle, tra Asiago e Monte Interrotto si trovano ghiaie con ciottoli striati, caratteristici dei depositi morenici e con porfidi quarziferi della Valle Isarco. Sul fondo di Val Magnaboschi si trovano frammenti di quarzite bianca, micascisto nero, porfido violetto e porfiriti tipiche della Val di Fassa. Sul fondo di Val Bertigo, tra il paesello di questo nome e Longhini si vedono porfidi e micascisti tra cui anche di quelli zeppi di granati. Lungo la strada di Camporovere presso il Ghertele, porfidi rossi violacei ricchi di quarzo. E si potrebbe moltiplicare gli esempi.

Ma oltre alle masse di ghiaccio provenienti dall'Astico e dal Brenta, anche le cime locali, che superano quasi tutte i 2000 metri, dovevano portare potente contributo di nevi e di ghiacci: così il prof. Omboni ammette che una grande vedretta scendente dai pendii meridionali dei Monti Caldièra, Cima Undici e Monte Soglio occupava la Val di Nos, trovando al suo sbocco sull'Altipiano i due rami di ghiacciaio provenienti dalla Val d'Assa e dal Brenta, si incuneava tra essi e abbandonava qui tutti i frammenti di rocce calcaree e dolomitiche trasportate lungo il suo corso. Così si spiega come per una vasta zona intermedia dell'altipiano manchino i frammenti di rocce alpine che altrove abbondano.

Qualche cosa di analogo deve essere avvenuto nella conca di Marcesina, dove l'anfiteatro di alte cime circostanti costituiva un potente bacino alimentante per la formazione di un locale ghiacciaio di considerevole importanza. Pur ritenendo che la conca sia stata occupata da un ramo del ghiacciaio del Brenta, possiamo supporre che quando questo cominciò a ritirarsi e cessò di penetrare nella conca, essa continuò ad essere invasa dal ghiacciaio locale che poi coprse tutto coi detriti di rocce secondarie calcareo-dolomitiche da esso trasportati.

(1) *Di due antichi ghiacciai che hanno lasciate le tracce nei Sette Comuni.* « Atti Istit. Veneto », 1876.

(2) *Guida geologico-alpina di Bassano e dintorni.* 1880.

(3) *Sulla chiusa di Quero e l'epoca glaciale del Piave e del Brenta.* « Boll. Soc. Veneto-Trentina-Istria », 1881.

(4) *Geologia delle Province Venete.* 1881.

(5) *L'anfiteatro morenico dell'Astico e l'epoca glaciale nei Sette Comuni.* « Atti Istit. Veneto ». 1887.

(6) *Il ghiacciaio del Brenta e gli altri ghiacciai dei Sette Comuni.* « Bollettino del Club Alpino Italiano », Torino, 1913.

Così si spiega la mancanza di frammenti di rocce alpine almeno nella parte superficiale del deposito morenico, mentre certo non mancheranno in profondità.

Premesse queste considerazioni geologiche, vediamo ora quale possa essere la provenienza delle acque sgorganti in vari punti della conca di Marcesina e di quelle abbondanti riscontrate coi lavori per l'acquedotto di Eneo.

È ben noto che l'Altipiano dei Sette Comuni è costituito esclusivamente da calcari secondari in stratificazioni più o meno fessurate, ma sempre permeabilissime, si tratta insomma di un territorio a carattere essenzialmente carsico. Tutte le acque che piovono nella zona penetrano nei calcari e le sorgenti sono scarse e legate ad uno speciale regime idrico magistralmente descritto dal De Marchi (*Sull' Idrografia carsica dei Sette Comuni*, « R. Magistrato delle Acque — Ufficio Idrografico Pubblico, n. 22 », Venezia 1911), che ha studiato la parte occidentale e centrale dell'altipiano.

Ma è pure noto che i grandi ghiacciai lasciano sul fondo delle valli da essi percorse, al momento del ritiro, un limo argilloso essenzialmente impermeabile, che in generale venne asportato dalle grandi alluvioni posteriori alle epoche glaciali, ma che si è conservato alla base dei depositi morenici. L'azione impermeabilizzante di questo limo glaciale è tanto più efficace quanto maggiore è la quantità di elementi argillosi in esso contenuti, che nel nostro caso certamente abbondano data la composizione in predominio silico-alluminosa delle rocce del bacino dell'Adige e del Brenta da cui provenivano i ghiacciai che invasero l'altipiano. La grande conca di Marcesina, al disciogliersi del ghiacciaio, rimase riempita dai depositi morenici e poichè questi non poterono venir asportati per la mancanza di acque scorrenti alla superficie, anche il limo glaciale deve essere rimasto nel fondo della conca impermeabilizzandone la superficie.

Di conseguenza tutte le acque che piovono nella conca non possono penetrare nei calcari sottostanti, ma circolano nei depositi morenici e forse sono anche alimentate da sorgenti coperte che sgorgano alle falde delle alte cime circostanti alla conca in corrispondenza alla fasciatura impermeabile determinata dal deposito di limo argilloso (acque di base del De Marchi).

Verso il termine della conca, ove cessa il deposito dei limi, le acque di troppo pieno si perdono subito nei calcari fessurati lasciando perfettamente asciutta la profonda valle sottostante (Val Gadena):

Gli scavi per l'acquedotto di Eneo vennero eseguiti in corrispondenza a piccole gemicazioni d'acqua e spinti a 5-6 metri di profondità in due rami; si attraversarono ghiaie sciolte essenzialmente calcari con intercalazioni di lenti di conglomerato abbastanza fortemente cementato; queste lenti determinano spostamenti nel livello delle acque, essendo impermeabili.

La sorgente più importante venne riscontrata sotto una prima intercalazione di conglomerato: le variazioni di portata constatate per il periodo

di un anno furono da litri 6 a 4.50 al secondo, misurati a fine di agosto c. a. dopo un periodo di eccezionale siccità; la temperatura dell'acqua, durante i mesi estivi oscilla attorno ai 10° mentre nell'atmosfera se ne hanno 24°. L'altro scavo ha permesso di raccogliere acque di portata più variabile, da litri tre ad uno a fine agosto u. s.

Per facilitare l'afflusso delle acque vennero piantati nel fondo degli scavi dei pali di ferro forati che si arrestarono a m. 3.70 certo in corrispondenza ad una nuova lente di conglomerato.

Questa zona montana ha precipitazioni elevate, come risulta dai dati raccolti dal prof. Eredia nel volume: *Osservazioni pluviometriche raccolte nelle Venezie a tutto l'anno 1915*. Dall'esame dei dati delle stazioni sull'Altipiano di Asiago, di cui riportiamo quelli di Enego:

(medie mensili delle annate 1875-89; 1911-15)

G.	F.	M.	A.	M.	G.	L.	A.	S.	O.	N.	D.
66.0	69.1	94.2	148.3	164.9	147.9	119.1	113.7	163.0	196	164.7	108.2

totale annuo 1535

si può dire che le precipitazioni medie annuali dell'altipiano superano i 1500 millimetri (il De Marchi - op. cit. - valuta la media pioggia annua a 2 metri). Le precipitazioni minime si hanno in febbraio e marzo ed in forma solida; negli ultimi mesi le medie sono pressochè costanti, perciò si può dedurre che, salvo annate eccezionali, la massima magra dovrebbe coincidere piuttosto coll'inizio dello scioglimento delle nevi che coi mesi estivi.

In complesso si può ritenere che le portate finora constatate non abbiano subito forti oscillazioni; in tutti i modi sarà sempre possibile aumentare tali portate creando uno sbarramento impermeabile a valle della presa col fare una serie di sondaggi lungo una sezione trasversale e iniettando opportune miscele cementizie in pressione.

Questo interessante fenomeno di un orizzonte idrico soprastante ad un massiccio carsico, ha riscontro in fatti analoghi di impermeabilizzazione di superficie calcaree più o meno fessurate, che si osservano nella parte orientale dello stesso Altipiano dei Sette Comuni. In vicinanza a Lavarone abbiamo il laghetto omonimo, a quota 1100 circa, in una conca carsica impermeabilizzata dal limo glaciale, e molte altre conche analoghe contengono dei limi essenzialmente argillosi, che si scavano per la fabbricazione di laterizi.

Si è perfino studiata la utilizzazione di una di queste conche, presso Malga Laghetto, per la creazione di un bacino di raccolta delle acque piovane e di qualche sorgente, della capacità di oltre un milione di m³, per un piccolo impianto idroelettrico.

In occasione di tale studio vennero fatti degli assaggi e si riscontrarono:

m. 1.50 di una materia biancastra finissima di natura argilloso-calcareo;

m. 0.16 di ghiaietta calcareo-silicea;

m. 0.80 di argilla giallognola usata per la confezione di tegole;

m. 3.00 di argilla rossiccia usata per la confezione di mattoni.

Sotto a questa serie si raggiungono i calcari grigi del Lias che costituiscono la copertura dell'altipiano il cui massiccio interno è costituito dalla dolomia principale.

L'esame microscopico dei residui della levigazione delle dette argille ha permesso di constatare l'esistenza di elementi cristallini caratteristici del bacino superiore della Valle dell'Adige.

Si può dunque concludere che la funzione conservativa delle acque per opera dei depositi morenici, sopra una regione fessurata, accennata anche dal De Marchi per le sorgenti di Gallio sgorganti dalla morena di Val di Nos e nota per altre regioni carsiche⁽¹⁾, deve riferirsi essenzialmente all'azione impermeabilizzante del *limo glaciale* quando sia, come nel nostro caso, in predominio argilloso.

Morfologia. — *Provocazione della monofilia in « Cannabis sativa L. » mediante traumi.* — Nota di R. SAVELLI e N. SOSTER, presentata dal Socio B. LONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Iconografia botanica. — *Due codici iconografici di piante miniate, nella Biblioteca Reale di Windsor. A proposito di Cimeli Lincei.* Nota⁽²⁾ di G. GABRIELI, presentata dal Corrisp. E. CARANO.

La mia inchiesta, pubblicata or è un anno nell'« Archivio di Storia della Scienza » (IX, 2-3), per rintracciare alcuni cimeli della prima Accademia Lincea (1603-1630), specialmente il Ms. Recchiano del *Novae Hispaniae rerum medicarum Thesaurus* o « Tesoro Messicano » e i tre volumi (testo e tavole in tomi separati) delle *Icones Fungorum* di Fed. Cesi e Giov. Ecchio, è rimasta senza eco e senza frutto diretto, quantunque fosse stata distribuita in estratto piuttosto largamente fra gli studiosi italiani e stranieri di storia della botanica. Tuttavia non posso dire che essa sia riuscita del tutto in-

(1) A. GRUND, *Die Karsthydrographie*. Leipzig, 1903.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1929.

fruttuosa od inutile, se mi ha procurato, mediante i buoni uffici di una gentildonna inglese, studiosa d'arte, Miss Edith Hewett, la soddisfazione di poter esaminare comodamente qui, nella Biblioteca Lincea, due volumi manoscritti di *Piante miniate*, che il Direttore della Biblioteca Reale di Windsor, Mr. Morshead, mi ha gentilissimamente mandati in prestito a mezzo della Ambasciata Britannica. Ritengo che il miglior modo di rendergliene pubblico ringraziamento sia quello di raccogliere qui, ad illustrazione di essi, alcuni appunti che rendano noti a tutti quei due codici di gran pregio.

Appartennero entrambi al Re Giorgio III d'Inghilterra, di cui hanno gli *ex-libris*, ma provengono dalla Biblioteca romana degli Albani; della quale non serbano però nè il bollo nè altro segno di proprietà, ma solo hanno, a piè della prima pagina, un piccolo timbro impresso su cera lacca rossa, rappresentante sotto corona marchesale uno stemma in due quarti con aquila coronata, due serpi (o draghi?) intrecciati attorno a un pozzo (?), una lince, ecc. Questo piccolo stemma, pubblicato in facsimile e ingrandito da Th. Ashby nel vol. VI dei *Papers of the British School at Rom*, ma non decifrato, non può esser che lo stemma personale di Cassiano dal Pozzo Linceo da Vercelli, bibliofilo e mecenate (1583-1657), la cui ricchissima libreria sappiamo fu nel 1714 acquistata dagli Albani e incorporata nella loro, della quale subì le ulteriori ben note vicende.

A) ERBARIO MINIATO.

È un grosso volume in folio (mm. 530 × 275), rilegato in tutta pergamena, impressa, sulle due faccie esterne, della corona reale d'Inghilterra e della sigla G III R (*Georgius tertius rex*). Sul dorso si legge in alto: 58 *Erbario Miniato*; e in basso il n.º VI. Contiene, oltre le carte di guardia (tre anteriori e tre posteriori), 211 carte di varia filigrana (numerazione recente a matita), aventi sul retto di ciascuna una o più figure o disegni colorati di piante con il rispettivo nome botanico (quando non è stato in tutto o in parte tagliato via dal coltello del rilegatore); talvolta invece la nomenclatura botanica è ripetuta sulla stessa pagina in maiuscolo grosso su listino sovrapposto, e quasi sempre con un commento italiano sulle virtù medicinali della pianta raffigurata; più, in fine, 4 carte (212-215) su cui sono scritti, di altra mano, due indici: uno alfabetico, l'altro numerico ascendente delle tavole miniate, le quali sono numerate in alto del verso d'ogni carta, da 499 a 706, mostrando evidentemente che almeno altri due volumi precedenti raccoglievano le tavole o carte 1-498.

Le piante sono disegnate e colorite dal vero, con molta maestria, e talvolta con vero senso d'arte, e per solito con precisione botanica singolare: talvolta sono incollate sulla pagina, essendo state già prima ritagliate da su altro foglio. Le carte 33-51, tavole 531-549, contengono funghi. La tecnica dei disegni e del colore rivelano più mani, almeno due, di diversa abilità e maestria.

L'onomastica e la illustrazione terapeutica a pie' di pagina portano accanto un numero progressivo, che sale da 1112 a 1375, e l'indicazione *Matt.* o *Matthiolo* o *Mattiolo grande*; infatti il numero, la figura, la nomenclatura e la efficacia medicinale corrispondono ai dati della celebre opera del Mattioli; donde sembrano tolte quasi per intero. L'edizione del Mattioli, a cui



Fig. 1. — Pagina miniata d'un Ms. della Biblioteca Reale di Windsor Castle (già Ms. Albani). Sotto la pianta si legge, non più leggibile nell'impronta: *Tabaccho overo l'erba santa portata da lndie nuove il Mattiolo non la' conosciuta.*

ci si riferisce, è quella di Venezia, presso Felice Valgrisio 1585: « *Disconsi nei sei libri di Dioscoride...* », due vol. in folio con paginazione continuativa, a cui appunto corrispondono le citazioni numeriche del presente manoscritto.

In parecchie tavole non vi è riferimento al Mattioli, essendo espressamente notato « non scritto dal Mattioli », ma si rimanda al Dodoneo, al Monardes, all'opera *Eicones*, evidentemente quella del Lobelio: *Icones stirpium*

seu plantarum tam exoticarum quam indigenarum, Antverpiae, ex officina Plantiniana 1591, od altra edizione.

In tutto il volume non abbiamo trovato una indicazione, un cenno che aiuti a identificare l'autore del testo o delle tavole, il tempo preciso della loro esecuzione, la provenienza personale. C'è parso di riconoscere, nello scritto di alcune pagine, la mano di Federico Cesi il principe e fondatore dei Lincei, e quella di Giovanni Ecchio il suo solerte dotto collaboratore in varie opere iconografiche di botanica. Ma è una impressione mia, senza sicuro fondamento.

Riproduciamo a ogni modo una delle tavole da noi fotografate (fig. 1)⁽¹⁾; e notiamo che il prof. Chiovena, uno fra i più sicuri conoscitori della storia degli erbari e della botanica in Italia, dopo aver esaminato (con me e con il prof. Carano) il presente volume, ha espresso la sua impressione ch'esso sia, per fattura iconografica e per l'indole del testo, molto simile agli erbari miniati fiorentini del sec. XVII-XVIII menzionati da G. Targioni Tozzetti nel suo *Prodomo della Corografia e della Topografia fisica della Toscana*; Firenze 1754, sez. III: « Istoria dei progressi e dei miglioramenti della Botanica e dell'Agricoltura, seguiti nella Toscana », pp. 82-141.

B) ERBE MEDICINALI DEL MESSICO o *Libellus de medicinalibus Indorum herbis, quem quidam Indus Collegii S.^{tae} Crucis medicus composuit anno Domini 1552*.

È un volume in folio (cm. 470 × 320) rilegato in tutta pergamena con impressa a rovescio su entrambi i piatti - in oro - la corona di Re Giorgio III, con *ex-libris* di quel sovrano ma diverso da quello del volume precedente. Sul dorso si può a grande stento leggere ancora con molta incertezza: « Erbe Mexicane (?) VIII (?) ». Comprende, oltre 2 e 2 di guardia, 41 carte, e in calce alla prima, nel retto, lo stemmino in cera rossa di Cassiano dal Pozzo. Su ogni carta è riportata e inquartata una carta del ms. originale, che ne contava del pari 41, tutte d'una filigrana medesima (un'ancora bidente chiusa in un cerchio), ma di varie dimensioni (in media cm. 345 × 223), coperte con disegni miniati di piante e con scritti latini, dov'è data la prescrizione dell'uso medicinale di ciascuna pianta. Sono in tutto 180 piante, aventi ciascuna in alto, in caratteri latini, il nome botanico messicano, in basso la virtù terapeutica; tranne le piante 84-110 di cc. 23-25 che hanno solo il nome.

c. 1. - Titolo e dedica dell'opera, che qui riproduciamo per intero:

« *Libellus de medicinalibus Indorum herbis, quem quidam Indus Collegii S.^{tae} Crucis medicus composuit nullis rationibus doctus, sed solis experimentis edoctus. Anno Domini Seruatoris 1552* ».

(1) Un'altra fu pubblicata da noi a p. 309 di « *Capitolium* », anno V, n. 6, giugno 1929, nel nostro articolo: *La romana Accademia Lincea nella Mostra Fiorentina di Storia della Scienza*; era l'effigie di « *Lilach ovvero Seringa* ».

« Clarissimo D.^{no} Francisco de Mendoza illis.^{mi} superioris huius Indiae proregis d.ⁿⁱ Antonij de Mendoza filio optimo Martinus de la Crux indignus servus salutem precatur plurimam, et prosperitatem.

Cum in te omnium virtutum decora atque ornamenta, et bonorum munera, quae a quocuoq. mortali desiderantur, reluceant, D.^{ne} magnificentissime, nescio profecto, quid in te potissimum laudem. Equidem non video, quibus laudibus efferam insignem uestrum amorem: quibus uerbis gratias agam vestro beneficio quam maximo. Pater enim tuus vir Christianissimus simul et pijssimus, uerbis consequi nequeam quam maxime omnium mihi benefecerit. Quicquid enim sum, quicquid possideo, et quicquid nominis habeo, illi debeo. Nihil par, nihilue dignum inuenire possum illius beneficentiae. Ingentes quidem gratias agere possum Mece-nati meo: sed referre minime. Quamobrem me quantulus sum, offero, dedico, consecroque in mancìpium. Neque uero ei soli; sed etiam tibi, D.^{ne} mi claris-sime, obtestantissimum singularis amoris signum, et testimonium. Non enim alia de causa, ut ego quidem suspicor, hunc libellum herbarium, et medicamentarium tantopere efflagitas, quam ut Indos apud Sacram Caesaream Catholicam Regiam Maiestatem, etsi immeritos commendes. Utinam librum Regis conspectu dignum Indi faceremus. Hic enim prorsus indignissimus est, qui ueniat ante conspectum tantae Maiestatis. Sed memineris, nos misellos pauperulos Indos omnibus mor-talibus inferiores esse: et ideo ueniam nostra a natura nobis insita paruitas, et tenuitas meretur. Nunc hunc libellum, quem tuo nomini, Vir magnificentissime, omni iure debeo nuncupare, precor, ut eo animo de manu seruuli tui suscipias, quo offertur; aut, quod non mirabor, ejcias, quo meretur. Vale. Tlacilulci. Anno D.ⁿⁱ Seruatoris 1552.

Tuae excellentiae servus addictissimus ».

*
* *

c. 2. - Indice dei 12 capitoli: « *tabula eorum quae hic continentur* ».

c. 3. - Indice alfabetico dei nomi botanici messicani.

c. 40. - Colofone: « *Finis libelli herbarij, quem latinitate donavit Joannes Badianus natione Indus patria Xuchmilcanus eiusdem Collegij praelector* ». Il quale aggiunge di aver fatto la traduzione per ordine del suo superiore francescano Fra Giacomo da Grado rettore della Chiesa di S. Giacomo, e di averla terminata la festa di S. Maria Maddalena (22 luglio).

L'importanza del codice non può sfuggire: esso è, a mia notizia, il più antico fra quelli del genere provenienti dal Messico e sicuramente datati. Un altro esemplare di esso, e sembra l'originale, trovasi nella Biblioteca Vaticana, nel cod. Barberino Lat. 241 (già VII B. 10). Esso dovette appartenere al cardinale Francesco Barberini Linceo, ed ha una postilla: « *ex libris didaci Cortavila* ». Mi è stato segnalato recentemente dal dr. Ch. U. Clark, e si spera che venga pubblicato dalla Smithsonian Institution. È curioso osser-

vare che a un altro De Mendoza, proprio un secolo dopo, nel 1651, il Linceo Fr. Stelluti dedicava le *Tabulae Phytosophicae* apposte al Tesoro Messicano: era Don Roderigo de Mendoza Duca de Infantado, ambasciatore del Re cattolico presso il pontefice Innocenzo X in Roma.

Questo qui della Biblioteca Reale di Windsor Castle proviene dal Monastero o collegio francescano di Santa Croce in Tlatelolco, su cui abbiamo notizie precise: fondato nel 1536, nel ventennio 1546-1566 (entro cui cade

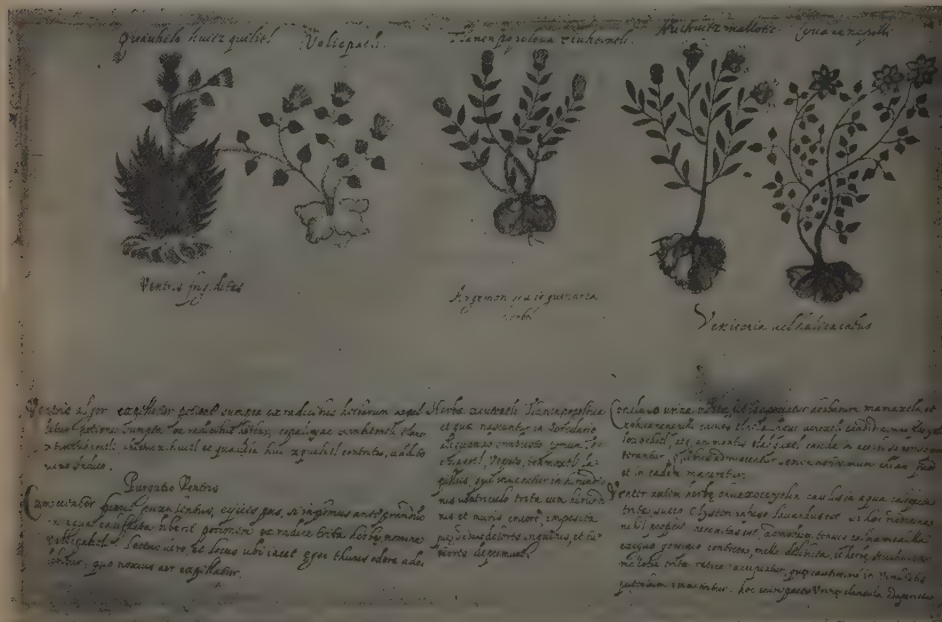


Fig. 2. — Pagina miniata d'un Ms. della Biblioteca Reale di Windsor Castle (già Ms. Albani): *Libellus de medicinalibus Indorum herbis*

appunto la data del codice) si resse da sè, cioè con la direzione di padri indigeni. Vi dimorò a lungo il celebre frate spagnuolo e storiografo del Messico, Bernardino de Sahagùn⁽¹⁾. Il ms. ci rappresenta una compilazione indigena di materia medica, sia nella parte iconografica sia in quella terapeutica, rimasta sin oggi ignota agli studiosi di storia della botanica e della medicina del Messico: v. fig. 2⁽²⁾.

(1) POY Y MARTI, *El libro de las Pláticas etc.*, in «Miscellanea Ehrle» 1924 (Studi e Testi della Biblioteca Vaticana, 39-40), III 281-333.

(2) F. P. T. [cioè Fil. del Paso y Troncoso], *Estudios sobre la historia de la Medicina en Mexico. I: La Botanica entre los Nahuas*, in «Anales del Museo Nacional de Mexico»,

Messo in confronto con il *Tesoro Messicano* dei Lincei, questo trattato veramente ed originariamente messicano *de herbis medicinalibus* ha il vantaggio di essere anteriore di almeno un quarto di secolo al lavoro dell'Hernandez, epitomato poi dal Recchi nella forma edita dai Lincei; e di essere completamente differente (le piante comuni alle due collezioni sono rare), e di avere i colori, elemento sicuro nella rappresentazione iconografica; mentre le moltissime e ricche tavole miniate sia dell'originale hernandeziano sia della epitome recchiana sono andate perdute.

Il ms. di Tlacuilco non fu conosciuto nè dall'Hernandez, che pur si servì d'informatori e trattati indigeni largamente, nè tampoco dagli editori Lincei: nè il Cesi, nè lo Schreck, nè Fabio Colonna che nelle annotazioni botaniche tutto utilizza e menziona quel che ha visto, nè il Faber che mai nelle sue Esposizioni zoologiche omette d'indicarci i propri informatori, specialmente vari frati provenienti dal Messico e dal Perù: nessuno ne fa mai cenno. Come e quando venne esso nelle mani di Cassiano dal Pozzo? Non certo nell'anno della sua andata a Madrid, 1626, addetto alla Legazione del Cardinal Francesco Barberini: viaggio e dimora di cui abbiamo la relazione di Cassiano stesso in un codice del fondo Barberini nella Vaticana; quando egli trasse copia nell'Escorial di alcuni appunti dell'Hernandez sugli animali e minerali del Messico e li mandò al Cesi, che li fece aggiungere nel volume delle *Piante Indiane* o *Tesoro Messicano* già a stampa avanzata. Con quasi altrettanta sicurezza si può dire che il ms. messicano di Windsor non diventò proprietà del Dal Pozzo avanti il 1630; nel qual caso questi non avrebbe mancato di darne notizia a Fed. Cesi, e traccia ne sarebbe rimasta nel carteggio Linceo. Dobbiamo congetturare che Cassiano, gran raccoglitore di documenti eruditi d'ogni genere, d'arte e di scienza, lo acquistasse o come che sia lo avesse negli ultimi anni della sua vita, fors'anche dopo il 1651, anno della pubblicazione definitiva del *Novae Hispaniae Thesaurus*; giacchè altrimenti Francesco Stelluti, che con il Dal Pozzo diede al volume accademico le ultime cure, con pia reverenza verso gli estinti Lincei e in particolare verso il grande Cesi, penso non avrebbe mancato di farne cenno.

*
* *

Colgo l'occasione per aggiungere alla descrizione da me data nel precedente articolo dell'opera *Icones Fungorum* alcuni elementi informativi che il Lanzi, e dopo di lui Pirotta e Chiovenda avevan riprodotti senza precisarne la fonte, e perciò erano stati messi in dubbio da me nella mia ricerca. Essi sono dati per primo (come mi fa sapere il sign. J. Ramsbottom « deputy Keeper of Botany » nel *British Museum*, in una comunicazione al

sign. Morshead della Windsor Castle) da C. Paulet nel vol. I, p. 213, del suo *Traité des champignons*. Dove, riferita la informazione che il Lancisi dava nel 1714 dell'opera Lincea sui funghi, e da noi riprodotta nell'articolo *Alla ricerca di alcuni Cimeli Lincei*, aggiunge in nota quanto segue: « Cet ouvrage, sur lequel on vient d'avoir des renseignemens récents, est aujourd'hui dans la bibliothèque du palais Albani à Rome; il est en 3 volumes *in folio*, contenant chacun environ 200 planches de figures de champignons avec leurs couleurs naturelles, et chaque planche en contient deux ou trois différents; leur nom latin est écrit au bas, à la main et en beaux caractères, d'après la phrase que Federico Cesi, associé de l'Académie de Lincei, ou quelque autre, avait écrite sur chacune de ces planches, au crayon ou à l'encre. À la tête de chaque volume est un index alphabétique des noms des champignons, il n'y a ni frontespice ni notes ».

Queste notizie, trasmesse da Roma al Paulet in data 20 agosto 1785 sono appunto quelle riportate dal Lanzi, e di cui nella mia precedente ricerca io non sapevo spiegarmi la provenienza. Esse provengono da persona che potè in Roma esaminare direttamente i tre volumi originali delle *Icones Fungorum*, e che fu l'ultima probabilmente a prenderne nota, settant'anni avanti che l'opera, alla vendita della Biblioteca Albani (1856), cadesse nelle mani del libraio Corvisieri, e da lui fosse venduta a un ignoto forestiero.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° dicembre 1929 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geologia. — *Sul confine italo-francese tra il Colle del Piccolo S. Bernardo e il Colle della Seigne a sud del Monte Bianco.* Nota del Corrispondente S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante combinazioni lineari di funzioni date.* Nota di GUIDO ASCOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

Si deve a F. Riesz ⁽²⁾ un notevole risultato con cui si stabilisce una condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f_0(x)$ definita e continua in un intervallo $a \leq b$ si possa approssimare uniformemente mediante aggregati lineari di altre funzioni date $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ pure definite e continue in $a \leq b$.

(1) Nella seduta del 5 maggio 1929.

(2) RIESZ F., *Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues.* (« Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris », 1910, t. 150, pp. 674-677). In forma più ampia, in una memoria con lo stesso titolo negli « Annales de l'Éc. Normale Sup. », 1911, t. 21.

La condizione è la seguente: per ogni funzione $\Theta(x)$, a variazione limitata in $a \vdash b$, tale che per ciascuna delle $u_i(x)$ sia:

$$\int_a^b u_i(x) d\Theta(x) = 0,$$

sia anche:

$$\int_a^b f_0(x) d\Theta(x) = 0.$$

Se si ricorda il risultato ormai classico dello stesso Riesz che fissa la forma dei funzionali lineari continui nel campo (C) delle funzioni continue in $a \vdash b$ (la continuità in (C) essendo definita in base al concetto di approssimazione uniforme, ossia all'espressione

$$(f, g) = \max |f(x) - g(x)| \text{ in } a \vdash b$$

come *distanza* di due funzioni f e g), si vede che la condizione indicata può anche espressivamente enunciarsi così: ogni funzionale lineare $A(f)$ continuo in (C), che si annulli per $f = u_i$, qualunque sia i , si annulli pure per $f = f_0$. Viene allora spontaneo il raffronto con il risultato che, nel campo delle funzioni (S) sommabili in $a \vdash b$ insieme con i loro quadrati, risulta dai lavori di Fischer, Riesz, Lauricella, Severini ecc. per l'approssimabilità *in media* di una funzione $f_0(x)$ mediante combinazioni lineari di funzioni $u_i(x)$ date. La nota condizione, che ogni funzione ortogonale alle $u_i(x)$ sia ortogonale a $f_0(x)$ si può infatti, in virtù del teorema di Fréchet sui funzionali continui in (S), porre in termini identici a quelli usati sopra per il campo (C).

La necessità della condizione data dal Riesz è evidente; assai più riposta risulta la sua sufficienza, che il Riesz ricava come corollario da un teorema generale su certi sistemi di equazioni funzionali. La dimostrazione non sembra facilmente estendibile ad altri campi funzionali.

Avendo intrapreso lo studio della questione senza conoscere i risultati del Riesz, sono giunto a dare di essi una nuova dimostrazione che mi sembra di qualche interesse per la sua generalità, che rende certo possibile di applicarla ad altri campi funzionali. Mi limito qui al risultato fondamentale, e al campo (C), rimandando ad altra occasione ulteriori sviluppi.

1. Nell'intervallo $a \vdash b$ siano definite le funzioni continue $u_1(x)$, $u_2(x) \dots u_n(x) \dots$. Essendo $f(x)$ una qualsiasi funzione continua in $a \vdash b$, si definisca un numero $\Omega(f)$ nel modo seguente: $\Omega(f)$ è il limite inferiore dei numeri positivi λ tali che esiste una combinazione lineare di un numero finito delle $u_i(x)$ approssimata ad $f(x)$ a meno di λ (cioè compresa tra $f(x) - \lambda$ e $f(x) + \lambda$). Si verificano facilmente le seguenti proprietà del funzionale $\Omega(f)$:

a) $\Omega(f)$ è sempre finito, positivo o nullo; è nullo allora e allora soltanto che $f(x)$ è approssimabile a meno di ε con aggregati lineari delle $u_i(x)$, per ogni $\varepsilon > 0$.

b) È $\Omega(f) \leq \max |f(x)|$. Basta confrontare $f(x)$ con la combinazione lineare delle $u_i(x)$ identicamente nulla.

c) È $\Omega(f+g) \leq \Omega(f) + \Omega(g)$; $\Omega(\alpha f) = |\alpha| \Omega(f)$; $\Omega(-f) = \Omega(f)$.

d) $\Omega(f)$ è un funzionale continuo; si ha infatti $|\Omega(f+g) - \Omega(f)| \leq \Omega(g) \leq \max |g|$, ecc.

Si può dare a $\Omega(f)$ il nome di *approssimazione limite* della $f(x)$ relativamente al sistema delle $u_i(x)$.

2. LEMMA: Il funzionale $A(f)$, definito nel campo delle funzioni continue (o più generalmente in un dato sistema lineare⁽¹⁾ di funzioni) soddisfi alle condizioni:

$$(1) \quad A(g+h) \leq A(g) + A(h)$$

$$(2) \quad A(\alpha f) = \alpha A(f) \text{ per } \alpha \geq 0.$$

Per ogni funzione f_0 del sistema esisterà allora il funzionale:

$$B(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{A(f_0 + \varepsilon f) - A(f_0)}{\varepsilon}$$

e sarà:

$$(1') \quad B(g+h) \leq B(g) + B(h)$$

$$(2') \quad B(\alpha f) = \alpha B(f) \text{ per } \alpha \geq 0$$

$$(3') \quad -A(-f) \leq B(f) \leq A(f)$$

$$(4') \quad a A(f_0) + b B(f) \leq A(af_0 + bf) \quad (a, b \text{ reali}).$$

Dalle ipotesi segue infatti per $\varepsilon > 0$:

$$A(f_0 + \varepsilon f) \leq A(f_0) + \varepsilon A(f)$$

$$A(f_0) \leq A(f_0 + \varepsilon f) + A(-\varepsilon f) = A(f_0 + \varepsilon f) + \varepsilon A(-f)$$

da cui:

$$(a) \quad -A(-f) \leq \frac{A(f_0 + \varepsilon f) - A(f_0)}{\varepsilon} \leq A(f).$$

D'altra parte il termine medio della (a) è, per $\varepsilon > 0$, funzione non decrescente di ε perchè per $\varepsilon' < \varepsilon$ la disuguaglianza

$$\frac{A(f_0 + \varepsilon' f) - A(f_0)}{\varepsilon'} \leq \frac{A(f_0 + \varepsilon f) - A(f_0)}{\varepsilon}$$

(1) Diciamo *lineare* un sistema di funzioni quando la somma di due funzioni del sistema e il prodotto di una funzione del sistema per un numero reale appartengono ancora al sistema.

si trasforma agevolmente nell'altra, vera per (1):

$$A(\varepsilon f_0 + \varepsilon \varepsilon' f) \leq A(\varepsilon' f_0 + \varepsilon \varepsilon' f) + A(\varepsilon f_0 - \varepsilon' f_0).$$

Da ciò e da (a) segue l'esistenza del limite $B(f)$; e segue anche la (3'). La prova della (2') è immediata; quanto alla (1') essa risulta dalla relazione evidente:

$$2[A(f_0 + \varepsilon g + \varepsilon b) - A(f_0)] \leq [A(f_0 + 2\varepsilon g) - A(f_0)] + \\ + [A(f_0 + 2\varepsilon b) - A(f_0)]$$

dividendo per 2ε , e prendendo i limiti per $\varepsilon \rightarrow +0$.

Vediamo ora la (4'). Essa è immediata nei casi $a = 0, b \geq 0$ e $a > 0, b = 0$, per le (3') e (2). Dimostriamola ora per $a > 0, b \geq 0$. Poichè, come si è visto il rapporto, $[A(f_0 + \varepsilon f) - A(f_0)]/\varepsilon$ per ε positivo decrescente non cresce mai, e ha il limite finito $B(f)$, sarà

$$\frac{A(f_0 + \varepsilon f) - A(f_0)}{\varepsilon} \geq B(f) \quad \text{ossia} \quad A(f_0 + \varepsilon f) \geq A(f_0) + \varepsilon B(f),$$

quest'ultima valida anche per $\varepsilon = 0$. Ponendo $\varepsilon = b/a$ e moltiplicando per a risulta subito la tesi.

La si estende agli altri casi osservando che se essa vale per valori di a o b positivi o nulli, essa vale ancora per i loro opposti. Per il primo caso $a \geq 0$ si ha:

$$A(af_0 + bf) \leq A(-af_0 + bf) + 2aA(f_0)$$

e quindi:

$$-aA(f_0) + bB(f) - A(-af_0 + bf) \leq aA(f_0) + bB(f) - A(af_0 + bf);$$

se perciò il secondo membro è ≤ 0 , tale sarà anche il primo. Se è poi $b \geq 0$ si ha dalla (4'), supposta valida, mutando f in $-f$:

$$aA(f_0) + bB(-f) \leq A(af_0 - bf)$$

e avendosi poi dalla (1'): $B(f) + B(-f) \geq 0$, cioè $-bB(f) \leq bB(-f)$, sostituendo risulta anche in questo caso la tesi.

3. Data la funzione $f_0(x)$ continua in $a \leq b$, esiste sempre una successione $f_0(x), f_1(x) \dots$ di funzioni continue in $a \leq b$, contenente $f_0(x)$ e tale che ogni funzione continua in $a \leq b$ possa approssimarsi a meno di ε , per ogni $\varepsilon > 0$, con aggregati lineari della $f_i(x)$. Basta infatti associare $f_0(x)$ ad una successione avente già tale proprietà, quale la $(1, x, x^2 \dots)$.

Ciò posto, a partire dal funzionale $\Omega(f)$ relativo al sistema $u_i(x)$, definito nel n. 1, possiamo costituire una successione illimitata di funzionali $\Omega_i(f)$ in base alle posizioni seguenti:

$$\Omega_0(f) = \Omega(f) \quad ; \quad \Omega_{i+1}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\Omega_i(f_i + \varepsilon f) - \Omega_i(f_i)}{\varepsilon}.$$

Sono infatti verificate per $\Omega_0(f)$ le condizioni poste per $A(f)$ nel n. 2, e il lemma ivi dimostrato prova che, ove esse sussistano per $\Omega_i(f)$, sussisteranno anche per $\Omega_{i+1}(f)$. Valgono inoltre le proprietà:

$$a) |\Omega_i(f)| \leq \Omega_0(f) \leq \max |f|$$

$$b) |a_0 \Omega_0(f_0) + a_1 \Omega_1(f_1) + \dots + a_n \Omega_n(f_n)| \leq \Omega_0(a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n), \text{ qualunque siano i numeri reali } a_0, a_1, \dots, a_n.$$

La a) vale intanto per $i = 0$ [n. 1, b)]; e se vale per Ω_i vale pure per Ω_{i+1} , in forza della limitazione

$$-\Omega_i(-f) \leq \Omega_{i+1}(f) \leq \Omega_i(f)$$

che risulta dalla (3') del n. 2, per $A = \Omega_i, B = \Omega_{i+1}$. Quanto alla b), essa è una facile estensione della (4') del n. 2. Questa dà infatti:

$$a_{n-1} \Omega_{n-1}(f_{n-1}) + a_n \Omega_n(f_n) \leq \Omega_{n-1}(a_{n-1} f_{n-1} + a_n f_n),$$

$$a_{n-2} \Omega_{n-2}(f_{n-2}) + a_{n-1} \Omega_{n-1}(f_{n-1}) + a_n \Omega_n(f_n) \leq a_{n-2} \Omega_{n-2}(f_{n-2}) + \Omega_{n-1}(a_{n-1} f_{n-1} + a_n f_n) \leq \Omega_{n-2}(a_{n-2} f_{n-2} + a_{n-1} f_{n-1} + a_n f_n)$$

e così via, sino ad ottenere la b) salvo il segno di valore assoluto. Questo si giustifica osservando che se si muta ogni a_i in $-a_i$ il primo membro muta di segno mentre il secondo rimane inalterato.

4. Proveremo ora che *esiste un funzionale lineare continuo* ⁽¹⁾ $O(f)$ (e uno solo) *definito dalle condizioni:*

$$O(f_i) = \Omega_i(f_i)$$

e che *per ogni funzione* $f(x)$ *continua in* $a \leq b$ *è* $|O(f)| \leq \Omega(f) \leq \max |f|$.

Si può estendere anzitutto la definizione di $O(f)$ agli aggregati lineari di un numero finito delle $f_i(x)$ mediante la formula:

$$O(a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n) = a_0 \Omega_0(f_0) + a_1 \Omega_1(f_1) + \dots + a_n \Omega_n(f_n)$$

ed è verificata così oltre la linearità, la disuguaglianza indicata, per la b del n. 3. Si passa al caso generale di una funzione $f(x)$ continua in $a \leq b$, considerandola come limite di una successione $P_n(x)$ di aggregati lineari delle $f_i(x)$, uniformemente convergente, notando che si ha:

$$|O(P_r) - O(P_s)| \leq |O(P_r - P_s)| \leq \max |P_r - P_s|$$

e che quindi gli $O(P_n)$ hanno un limite finito. Nello stesso modo risulta

(1) Per la teoria dei funzionali lineari si veggia, per es. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 2^e éd., 1928, p. 262. I funzionali lineari sono, dal Lebesgue, definiti, oltre che dall'addittività, da una condizione ulteriore $|A(f)| \leq k \max |f|$. Questa risulta poi equivalente alla continuità; osservazione già fatta dal Riesz.

che questo limite è indipendente dalla particolare successione scelta per rappresentare la $f(x)$. Si ha poi:

$$|O(P_n)| \leq \Omega(P_n) \leq \max P_n \text{ e quindi } |O(f)| \leq \Omega(f) \leq \max |f| \text{ c. d. d.}$$

5. Possiamo ora dimostrare il teorema fondamentale: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f_0(x)$ continua in $a \dots b$ sia approssimabile a meno di ε , per ogni $\varepsilon > 0$, mediante combinazioni lineari di date funzioni $u_i(x)$, pure continue in $a \dots b$, è che per ogni funzionale lineare continuo $O(f)$ tale che sia $O(u_i) = 0$, per ogni i , sia anche $O(f_0) = 0$.*

La condizione è chiaramente necessaria.

Viceversa, se essa è soddisfatta, la $f_0(x)$ è approssimabile indefinitamente mediante aggregati lineari delle $u_i(x)$. Se infatti ciò non fosse, sarebbe $\Omega(f_0) > 0$, e costruendo allora il funzionale lineare $O(f)$ definito nel n. 4, si avrebbe $|O(u_i)| \leq \Omega(u_i)$ e quindi $O(u_i) = 0$, giacchè ogni u_i è evidentemente approssimabile indefinitamente; mentre $O(f_0) = \Omega(f_0)$ sarebbe diverso da zero.

Segue il corollario: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni funzione continua in $a \dots b$ sia approssimabile a meno di ε , per ogni $\varepsilon > 0$, mediante combinazioni lineari di date funzioni $u_i(x)$ pure continue in $a \dots b$, è che non esista alcun funzionale lineare continuo, non identicamente nullo, per il quale sia, per ogni i , $O(u_i) = 0$.*

Matematica. — *Sulle coordinate geodetiche lungo una linea.*
Nota II di E. BORTOLOTTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella precedente Nota I, già pubblicata⁽²⁾ (con questo stesso titolo) ho esposto una dimostrazione dell'esistenza di infiniti sistemi di *coordinate geodetiche di Schouten* lungo una curva γ di V_n riemanniana, tali cioè (ad es.) che lungo γ abbiano valori costanti i coefficienti $a_{\lambda\mu}$ del ds^2 , e le linee coordinate di ciascun sistema uscenti da punti di γ abbiano direzioni che variano lungo γ , secondo la legge del parallelismo (di Levi-Civita). Passerò ora (completando la stessa ricerca e quindi usando le stesse notazioni e proseguendo nella numerazione dei paragrafi e delle formule), alle coordinate geodetiche lungo una linea, nel senso che più comunemente vien dato a questa denominazione: cioè, a quelle che io propongo di chiamare *coordinate geodetiche di Fermi*.

(1) Nella seduta del 17 novembre 1929.

(2) In questi « Rendiconti », vol. X, serie 6^a, fasc. 10, 1929, p. 486.

5. Perchè la definizione che ora indicherò per tali sistemi coordinati valga indifferentemente per ogni valore dell'intero $n (\geq 2)$, premetterò che un parametro t a cui sia riferito il punto variabile di una linea Γ può dirsi *geodetico* in un punto P di Γ quando, posto $t = t(s)$, ove s è la lunghezza d'arco di Γ , si ha $t'(s) = 0$ in quel punto. Potremmo dire: quando il parametro t , misurato da quel punto, è *inizialmente* proporzionale alla lunghezza d'arco. Sulla linea u^λ in V_n il parametro u^λ sarà geodetico in un punto se ivi è $\begin{bmatrix} \lambda \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = 0$. Ciò posto:

Diremo sistema coordinato geodetico di Fermi lungo una curva γ un sistema geodetico di Schouten pel quale, per di più, su ciascuna ipersuperficie coordinata $u^\lambda = \text{cost.}$ uscente da un qualunque punto P di γ , le coordinate $u^1, \dots, u^{\lambda-1}, u^{\lambda+1}, \dots, u^n$ sono coordinate geodetiche (o localmente cartesiane) in P .

Cioè: per $n = 2$, quando in ciascun punto P di γ i parametri u^1, u^2 siano parametri geodetici per le linee u^1, u^2 che ne escono; per $n = 3$, quando su ciascuna superficie coordinata $u^1 u^2, u^2 u^3, u^3 u^1$ uscente da un qualunque punto R di γ le coordinate $u^1, u^2; u^2, u^3; u^3, u^1$ sono coordinate geodetiche in P ; e così via. Ma è interessante il fatto che per $n > 4$ è sufficiente anche la condizione che sulle V_3 (anzichè sulle V_{n-1}) coordinate, $u^1 u^2 u^3$, le coordinate u^λ, u^μ, u^ν siano geodetiche nel punto di γ da cui esce tale V_3 . Questo si vede, ad es., ponendo le precedenti condizioni sotto forma analitica: si trova che esse, anche nella forma apparentemente meno restrittiva ora indicata per $n > 4$, equivalgono all'annullarsi, in ciascun punto di γ , di tutti i simboli $\begin{bmatrix} \lambda \mu \\ \nu \end{bmatrix}$, e quindi anche, dei simboli $\begin{Bmatrix} \lambda \mu \\ \nu \end{Bmatrix}$. Dunque: è caratteristico delle coordinate geodetiche di Fermi lungo γ il rendere, in ciascun punto di γ ,

$$(22) \quad \begin{Bmatrix} \lambda \mu \\ \nu \end{Bmatrix} = 0,$$

e perciò anche, l'essere coordinate geodetiche in tutti i punti di γ : questa è la più comune definizione.

Le (22) mostrano che tutte le linee coordinate uscenti da un punto qualunque P di γ hanno ivi curvatura nulla in V_n , ossia, hanno ivi un punto di inflessione geodetica, in cui sono osculate dalla geodetica tangente. E inoltre, che i coefficienti delle seconde forme fondamentali delle ipersuperficie coordinate, e più in generale, le componenti del tensore di curvatura euleriana⁽¹⁾ di ciascuna V_m ($2 \leq m \leq n - 1$) coordinata, sono tutti nulli in ogni punto di γ .

(1) Cfr. CARTAN, *Géométrie...*, loc. cit., p. 43 e sg. È il tensore che riassume tutte le proprietà del secondo ordine di una V_m rispetto all'ambiente V_n ; indicato con Ω_{rj} da VOSS, con $\Omega_{rs}^{(i)}$ da BOMPIANI, con $\Omega_{\lambda\mu}^{\nu}$ da me in vari lavori (vedi per es., *Spazi*

E infatti se $u^{\tau_1}, u^{\tau_2}, \dots, u^{\tau_m}$ sono i parametri che variano su tale V_m coordinata, si ha pel suo tensore di curvatura euleriana

$$23) \quad \Omega_{\tau_i \tau_k}^{\lambda} = \frac{\partial^2 u^{\lambda}}{\partial u^{\tau_i} \partial u^{\tau_k}} + \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \theta_{\tau_i}^{\mu} \theta_{\tau_k}^{\nu} - \left\{ \begin{matrix} \tau_i & \tau_k \\ \sigma \end{matrix} \right\} \theta_{\tau_h}^{\lambda} = 0 \quad (1)$$

($i, k, h = 1, 2, \dots, m$)

in forza delle (22). Anche la precedente proprietà è caratteristica dei sistemi coordinati geodetici di Fermi lungo γ , tra i sistemi coordinati di Schouten. Precisamente, è caratteristico di quelli il fatto che si annulla, in ciascun punto di γ , il tensore di curvatura euleriana di ciascuna V_m coordinata ($m = n - 1$ se $n \leq 3$; $m = 2$ se $n > 3$). (Cioè: che lungo γ si annulla la curvatura delle linee coordinate, se $n = 2$: che lungo γ si annulla il tensore di curvatura euleriana delle superficie coordinate, se $n > 2$).

Questa condizione è indubbiamente soddisfatta se quelle V_m coordinate sono V_m geodetiche, col polo su γ (perchè in tale caso nel polo si annulla il tensore di curvatura euleriana). Questa è l'ipotesi da cui parte la prof. Pia Nalli, nella sua elegante costruzione delle coordinate geodetiche lungo una curva; le sue coordinate risultano così un caso particolare, indubbiamente notevole, di coordinate geodetiche di Fermi.

Ancora un'altra caratterizzazione indicherò per le coordinate geodetiche di Fermi lungo una linea, in evidente relazione con quanto precede: esse sono tali che in ogni punto della linea supposta: 1° su ciascuna linea coordinata u^{λ} il parametro u^{λ} è geodetico; 2° si annulla ivi la (prima) curvatura di ogni linea coordinata; 3° si annullano ivi pure le (prime) curvature associate alle serie di direzioni delle linee u^{λ} uscenti dai punti di una linea u^{μ} ($\lambda = \mu = 1, 2, \dots, n$). Il che potrebbe anche dirsi in forma più espressiva, ricorrendo a un linguaggio infinitesimale.

6. La dimostrazione analitica dell'esistenza delle coordinate geodetiche di Fermi lungo una linea riesce assai semplice, dopo quanto abbiamo esposto al n. 3. Basterà trovare la corrispondente forma delle (15). La determinazione delle $\Phi_r^{\alpha}(u^n)$ e delle c_{α}^r si dovrà fare come per ogni altro sistema coordinato di Schouten, nel modo già indicato. L'ulteriore condizione che i vettori derivati di ciascuno dei vettori θ_{λ}^r ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) nella direzione di ciascuno dei vettori θ_{μ}^r ($\mu = 1, 2, \dots, n$) siano nulli in ogni

subordinati, equazioni di Gauss e Codazzi, « Boll. U. M. I. », vol. V, 1927, p. 135; con $H_{\lambda\mu}^{\alpha\beta}$ da SCHOUTEN (Krümmungsaffinor).

(1) L'indice σ contrassegna i simboli di CHRISTOFFEL calcolati per la V_m subordinata anzichè per V_n . Ma anch'essi - combinazioni lineari dei simboli $\left[\begin{matrix} \lambda & \mu \\ \nu \end{matrix} \right]$ e quindi anche dei simboli $\left\{ \begin{matrix} \lambda & \mu \\ \nu \end{matrix} \right\}$ - sono nulli per le (22).

punto di γ (vedi numero precedente, fine), la quale si esprime scrivendo

$$(24) \quad \bar{\theta}_{\lambda\mu}^r = - \left\{ \begin{matrix} s & t \\ r \end{matrix} \right\}_{\gamma} \theta_{\lambda}^s \theta_{\mu}^t \quad (1)$$

dà subito, come *condizione necessaria*, che nelle (15) sia:

$$(25) \quad c_{\alpha\beta}^r = - \left\{ \begin{matrix} s & t \\ r \end{matrix} \right\}_{\gamma} \bar{\theta}_{T\alpha}^s \bar{\theta}_{T\beta}^t.$$

La condizione poi è *anche sufficiente*, perchè dalle (16), (17), tenendo presenti le (8), le (9), le (25), si deducono senza difficoltà le (24); dal confronto di queste con le formule di Christoffel, ricordando che lungo γ_P è $|\bar{\theta}_{\lambda}^r| \neq 0$, seguono infine le (22).

Dunque: determinate le Φ_T^{α} , le c_{α}^r nel modo sopra ricordato; le $c_{\alpha\beta}^r$ mediante le (25), le (15) danno la più generale trasformazione di un sistema coordinato qualunque in un sistema coordinato geodetico di Fermi lungo γ . E così è stabilita l'esistenza di infiniti tali sistemi, e ne è precisata l'arbitrarietà.

7. Anche la nozione di coordinate geodetiche di Fermi lungo una linea può essere messa sotto forma più geometrica: secondo il Cartan⁽²⁾ diciamo *spazio euclideo di raccordamento* per V_n lungo una curva γ uno spazio euclideo R_n a cui la V_n sia riferita biunivocamente (almeno in un certo intorno di γ e della curva omologa γ^*) in modo che si conservino inalterati, in tale rappresentazione, i moduli dei vettori di V_n applicati a punti di γ e le prime curvature delle linee di V_n uscenti da punti di γ ; o, in linguaggio infinitesimale: *in modo che detto P un punto di γ , Q un punto infinitamente vicino in V_n , la distanza PQ venga conservata a meno di quantità infinitesime d'ordine superiore al secondo*⁽³⁾. In forma analitica: in modo che, riferiti V_n ed R_n a linee corrispondenti, siano eguali in due punti corrispondenti di γ, γ^* i valori delle $a_{\lambda\mu}$ e delle $\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u^{\nu}}$; o anche, dei simboli $\left\{ \begin{matrix} \lambda & \mu \\ \nu \end{matrix} \right\}$. O ancora: lo spazio di raccordamento è uno spazio euclideo

(1) Queste potrebbero anche ricavarsi dalle formule di Christoffel, tenendo presenti le (22).

(2) *Géométrie...*, p. 19; *Leçons...*, p. 106.

(3) È questa sostanzialmente la caratterizzazione data, per lo spazio euclideo di raccordamento (*Spazio euclideo osculatore lungo la linea supposta*) dalla prof. NALLI (1ª Nota citata: ove sono anche introdotte altre nozioni più generali); e data anche da me nella monografia che ho accennato al n. 1.

osculatore (secondo Cartan) in tutti i punti di γ . L'esistenza di infiniti sistemi di coordinate geodetiche di Fermi porta l'esistenza di infiniti spazi euclidei di raccordamento lungo una linea assegnata. È evidente l'utilità grandissima di queste nozioni nella geometria riemanniana: delle applicazioni che già ne furono date e di altre possibili non potrei qui adeguatamente parlare ⁽¹⁾.

Calcolo delle probabilità. — *Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio.* Nota di B. DE FINETTI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sia $X(\lambda)$ una funzione a incremento aleatorio ⁽³⁾, capace di variare soltanto con continuità, e soggetta a legge fissa. Rammentiamo brevemente la definizione: ciò significa che gli incrementi di X in n intervalli uguali successivi sono variabili casuali indipendenti soggette a una medesima legge di probabilità.

La X essendo per ipotesi funzione continua di λ , è certo che esiste l'integrale di X in un dato intervallo $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, e, poichè la X dipende dal caso, anche il valore di tale integrale sarà una variabile casuale. Si può determinare la sua legge di probabilità? Ecco il problema che ci proponiamo di esaminare.

1. È, per la continuità di $X(\lambda)$:

$$\int_0^\lambda X(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n X\left(\frac{i}{n} \lambda\right).$$

Diremo $S_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n X\left(\frac{i}{n} \lambda\right)$ valore approssimato n -esimo dell'integrale; poichè di S_n è facile determinare la legge di probabilità, e si vede subito che essa tende a una legge limite quando $n \rightarrow \infty$, è spontanea l'idea di studiare questa legge limite, e cercare poi se essa effettivamente debba rappresentare la legge di probabilità dell'integrale.

L'espressione ora scritta di S_n non si presta a dedurne la sua legge di probabilità, perchè i termini della somma non sono variabili casuali indipendenti; tale condizione si può realizzare però mediante una facile trasfor-

(1) Mi limito a rimandare ai bei libri del CARTAN, specialmente alle *Leçons* del 1928, e alle Note (che ho citato all'inizio della Nota I) della prof. NALLI e di J. DUBOURDIEU.

(2) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(3) Vedi *Sulle funzioni a incremento aleatorio e Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori*, «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», 1929, 2° sem.

mazione. Basta esprimere S_n linearmente mediante $X(0)$ e gli n incrementi

$$\text{indipendenti } X \left(\frac{b}{n} \lambda \right) - X \left(\frac{b-1}{n} \lambda \right) \quad (b = 1, 2, \dots, n):$$

$$S_n = \lambda X(0) + \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n (n-b+1) \left[X \left(\frac{b}{n} \lambda \right) - X \left(\frac{b-1}{n} \lambda \right) \right] = \lambda X_0 + \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n k \Delta_{n,k}$$

ove

$$\Delta_{n,k} = X \left(\frac{b}{n} \lambda \right) - X \left(\frac{b-1}{n} \lambda \right) \quad \text{con} \quad k = n - b + 1.$$

La funzione caratteristica dei Δ , cioè degli incrementi di X negli intervalli di lunghezza $\frac{\lambda}{n}$, è $\psi_{\lambda}(t)$, e la funzione caratteristica di $\frac{\lambda}{n} k \Delta$ è quindi $\psi_{\lambda} \left(\frac{\lambda k}{n} t \right)$; poichè

$$\log \psi_{\lambda} \left(\frac{\lambda k}{n} t \right) = \frac{\lambda}{n} \log \psi(t) \quad (\text{ove } \psi = \psi_{\lambda} \text{ per } \lambda = 1)$$

abbiamo

$$\log \psi_{\lambda} \left(\frac{\lambda k}{n} t \right) = \frac{\lambda}{n} \log \psi \left(\frac{\lambda k}{n} t \right).$$

Il logaritmo della funzione caratteristica di S_n è quindi

$$\log \chi(\lambda t) + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{n} \log \psi \left(\frac{\lambda k}{n} t \right) = \log \chi(\lambda t) + \frac{1}{t} \cdot \frac{\lambda t}{n} \sum_{i=1}^n \log \psi \left(\frac{k}{n} \lambda t \right),$$

ove con $\chi(t)$ si rappresenti la funzione caratteristica di $X(0)$. Supporremo in seguito che sia noto il valore iniziale $X(0) = c$, e allora $\chi(t) = e^{ict}$.

Per dimostrare che quando $n \rightarrow \infty$ la legge di probabilità di S_n tende a una legge limite, basta dimostrare che la funzione caratteristica tende uniformemente in ogni intervallo finito a una funzione limite, e che la probabilità che sia $|S_n| > \xi$ tende a zero per $\xi \rightarrow \infty$ in modo uniforme rispetto ad n (1).

La seconda condizione è certo soddisfatta, perchè, qualunque sia n , S_n è inferiore al massimo di X moltiplicato per l'ampiezza dell'intervallo d'integrazione; per $n \rightarrow \infty$ la funzione caratteristica di S_n tende poi verso $\Psi_{\lambda}(t)$ definita da

$$\begin{aligned} \log \Psi_{\lambda}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ic\lambda t + \frac{1}{t} \cdot \frac{\lambda t}{n} \sum_{i=1}^n \log \psi \left(\frac{k}{n} \lambda t \right) \right] = \\ &= ic\lambda t + \frac{1}{t} \int_0^{\lambda t} \log \psi(t) dt, \end{aligned}$$

(1) La dimostrazione dell'esistenza della legge limite sotto le ipotesi accennate si trova in Appendice alla mia Memoria: *Funzione caratteristica d'un fenomeno aleatorio*, in corso di stampa nelle «Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei».

e ciò in modo uniforme rispetto a t , perchè la funzione integranda è uniformemente continua in ogni intervallo finito.

2. La legge limite esiste. Si tratta ora di vedere se la legge limite di S_n è effettivamente la legge di probabilità di $S = \int_0^{\lambda} X(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

A tale conclusione si arriva sicuramente se è possibile assegnare alla differenza $|S_n - S|$ un limite superiore a_n tendente a zero col crescere di n , o, più in generale, se la successione delle S_n , soddisfa una condizione che diremo della *convergenza stocasticamente-uniforme* ⁽¹⁾. Diremo che la successione S_n tende a S in modo stocasticamente-uniforme se, assegnati due numeri ϵ e θ comunque piccoli, si può sempre fissare n in modo che sia minore di θ la probabilità che si abbia $|S_n - S| > \epsilon$.

Lo studio teorico di tale condizione, lo sto sviluppando in altro lavoro ⁽²⁾, dove ho anche abbozzato un procedimento per giungere a provare che la convergenza è, nel nostro caso, stocasticamente uniforme. Credo effettivamente ciò possa provarsi in generale, e per quella via. Mi limito qui ad accennare, tanto per chiarire le idee, a un caso semplicissimo. Se $X(\lambda)$ è essenzialmente non decrescente, è certo $|S_n - S| \leq \frac{l\Delta}{n}$, ove Δ è l'incremento di X nell'intervallo d'integrazione $(0, l)$. Potendosi prendere ξ abbastanza grande perchè la probabilità che sia $\Delta > \xi$ risulti $< \theta$, ed n abbastanza grande perchè sia $\frac{l\Delta}{n} < \epsilon$, si prova che la convergenza è stocasticamente uniforme.

Senza per ora occuparci più oltre di questo punto, studieremo la legge di probabilità dell'integrale S nel caso che essa sia la legge limite di quella relativa a S_n , caso che presumibilmente è il più generale che possa aversi, e che, comunque, comprende di certo almeno le funzioni essenzialmente non decrescenti.

3. Poniamo $Y(\lambda) = \int_0^{\lambda} X(\lambda) d\lambda$. La Y è una funzione a incremento

aleatorio, ma presenta dei caratteri profondamente diversi da quelli che si avevano nei casi considerati finora. Essa è infatti derivabile, e la sua derivata obbedisce a una ben determinata legge di probabilità ed è una funzione continua ⁽³⁾.

(1) *Stocasticamente* = «nel senso del calcolo delle probabilità»: locuzione usata specialmente dallo SLUTSKY che la fa risalire a BERNOULLI.

(2) *Sui passaggi al limite nel calcolo delle probabilità*, presentato al R. Ist. Lombardo.

(3) Ciò che invece non può verificarsi (a rigore: ha probabilità nulla di verificarsi) per una funzione a incremento aleatorio a legge nota (o anche a legge differenziale). Per quanto riguarda la continuità della derivata, l'asserto scende ovviamente dalla stessa definizione, che esclude che debbano sussistere delle relazioni d'interdipendenza fra gli incre-

Di modo che in un intervallo brevissimo di tempo $(\lambda, \lambda + \delta)$ l'incremento di Y è con certezza pratica sensibilmente uguale a $\delta Y'(\lambda)$, ove $Y'(\lambda)$ è la derivata di Y nell'istante λ , che nell'istante λ è già determinata, in quanto può calcolarsi alla sua sinistra, e non ha quindi più nulla d'aleatorio. I fattori aleatori non intervengono che in quanto influiscono sulla derivata, agiscono cioè sul modo di variare di Y soltanto per mezzo dei termini d'ordine superiore al primo.

Ciò è messo bene in luce dal calcolo della legge derivata:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \Psi_{\lambda}(t) \right]_{\lambda=0} = ict + \lim_{\lambda=0} \frac{1}{\lambda t} \int_0^{\lambda t} \log \psi(t) dt = ict$$

(essendo $\psi(0) = 1$, $\log \psi(0) = 0$).

Altri rilievi interessanti possiamo fare supponendo $\log \psi(t)$ sviluppabile in serie di TAYLOR; allora lo è anche $\log \Psi_{\lambda}(t)$, e, posto

$$\log \psi(t) = \sum_b a_b t^b,$$

abbiamo

$$\log \Psi_{\lambda}(t) = ict + \frac{1}{t} \sum_b a_b \frac{(\lambda t)^{b+1}}{b+1} = ict + \sum_b \frac{\lambda^{b+1}}{b+1} a_b t^b.$$

Considerando i due primi termini

$$\log \psi(t) = imt - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

si ha

$$\log \Psi_{\lambda}(t) = iM_{\lambda} t - \sum_b \lambda^2 \frac{t^2}{2} + \dots = i \left(c\lambda + m \frac{\lambda^2}{2} \right) - \sigma^2 \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{t^2}{2} + \dots$$

e quindi

$$M_{\lambda} = c\lambda + m \frac{\lambda^2}{2} \quad \sum_{\lambda} = \sigma \sqrt{\frac{\lambda^3}{3}}.$$

menti passati e quelli futuri. Di più, lo studio delle derivate non si può nemmeno — in quel caso — abbordare, perchè, considerato un intervallo (λ_1, λ_2) comunque piccolo, è sempre impossibile (ha probabilità nulla) l'ipotesi che in tutto (λ_1, λ_2) le derivate estreme della X non superino in valore assoluto un numero prefissato comunque grande. Si dimostra precisamente che, fissato comunque il numero M , l'ipotesi che negli n intervalli $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, \dots , $\left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$ l'incremento di X sia sempre minore in valore assoluto di $\frac{M}{n}$ ha probabilità minore di $\frac{4}{3} \omega\left(\frac{4M}{\sqrt{n}}\right)$, ove $\omega(\delta)$ è il modulo di continuità della funzione di ripartizione (che è continua, come risulta dalla Nota citata, *Sulla possibilità di valori eccezionali*, ecc.), e poichè tale limite tende a zero al crescere di n , ne discende agevolmente la proprietà enunciata.

Il valore probabile M_λ contiene un termine dipendente dal valore iniziale di X (valore dell'integrale se X rimanesse costante) proporzionale al tempo λ , e uno, dovuto alle variazioni accidentali, proporzionale al quadrato di λ ; lo scarto quadratico medio cresce poi come $\lambda^{3/2}$. Si ricorderà che per le funzioni a incremento aleatorio a legge fissa il valore probabile e lo scarto quadratico medio crescono invece rispettivamente come λ e come $\sqrt{\lambda}$ ⁽¹⁾.

4. Consideriamo ad esempio un grave in caduta libera. Lo spazio Y percorso in un tempo λ è, secondo le equazioni classiche, in cui nulla interviene di aleatorio (e cioè *deterministe*):

$$Y(\lambda) = X_0 \lambda + \frac{g}{2} \lambda^2 = f(\lambda)$$

e la velocità

$$X(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = X_0 + g\lambda.$$

In realtà, quando lascio cadere un grave, non posso dire però che esso *deve* cadere secondo la legge di GALILEO, ma solo che prevedo che *probabilmente e press'a poco* sarà seguita la legge di GALILEO ⁽¹⁾. Tenendo conto di quest'osservazione, lo spazio percorso in un intervallo $\Delta\lambda$, ossia l'incremento ΔY di Y da λ a $\lambda + \Delta\lambda$, sarà, non diremo più *certamente uguale*, ma *probabilmente prossimo* a Δf . Sarà cioè una variabile casuale che ha una probabilità molto prossima ad 1 di differire da Δf per meno di una quantità ϵ praticamente trascurabile.

Se i successivi incrementi di Y si considerano indipendenti (Y funzione a incremento aleatorio a legge fissa) la velocità istantanea non esiste; se invece si ammette l'esistenza della velocità istantanea X , e si considerano come indipendenti i successivi incrementi di X , allora è soltanto l'accelerazione istantanea che non esiste (vedi nota 3 a p. 550). Per la comodità dell'algoritmo, è certamente preferibile la seconda impostazione, che ci consente di parlare della velocità, ma è stato osservato più volte, e con ragione, che una grandezza o una funzione empirica non è fisicamente determinata, o quanto meno non

(1) Queste conclusioni sussistono anche senza che $\log \psi$ sia sviluppabile in serie di TAYLOR, purchè esistano e siano finiti m e σ .

Più in generale, basta sapere che è

$$\log \psi(t) = imt - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \dots + a_n t^n + \omega(t)$$

con $\omega(t)$ infinitesimo d'ordine superiore ad n per concludere che è

$$\log \Psi_\lambda(t) = i \left(c\lambda + m \frac{\lambda^2}{2} \right) t - \sigma^2 \frac{\lambda^3}{3} \frac{t^2}{2} + \dots + a_n \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} t^n + \Omega(t)$$

con $\Omega(t) = \frac{\lambda}{\lambda} \int_0^{\lambda} \omega(t) dt$ infinitesimo d'ordine superiore ad n .

(1) Cfr. POINCARÉ, *La Valeur de la Science*, pp. 235 e 237. In altri esempi, più schiettamente pertinenti alla meccanica statistica, il carattere probabilistico e approssimativo del concetto di « legge naturale » sarebbe più evidente. Ho preferito, come esempio a scopo puramente illustrativo, quello più elementare.

può essere mai sperimentalmente nota, con perfetta esattezza. Chiedere quindi se esiste la derivata — nel caso nostro se esiste la velocità istantanea — non ha senso.

Bisogna risalire al significato concettualmente interessante della differenza d'impostazione. Nel secondo caso ammettiamo che per inerzia si conservi un eventuale eccesso di velocità casualmente acquisito (sommandosi agli incrementi futuri che avremmo previsti indipendentemente da esso); nel primo caso invece, la conoscenza di una velocità (media) acquisita ci sembra senza influenza sulla previsione. È per ciò che è il secondo modo che risponde al problema.

L'« accelerazione di gravità » g sarà per noi l'« accelerazione probabile di gravità », ossia il valore probabile dell'aumento di velocità nell'unità di tempo. Ammettiamo però che nella pratica tale aumento si potrà scostare dal valore probabile g , e sia σ il valore quadratico medio di tale « errore » o « scarto » (σ misura la *precisione* con cui supponiamo la caduta dei gravi obbedisca alla legge di GALILEO, precisione tanto maggiore quanto più σ è piccola).

Potremo dire allora che lo spazio percorso all'istante λ e la rispettiva velocità sono approssimativamente quelle volute dalla legge di GALILEO; l'errore, o *scostamento*, o, con locuzione usata in caso analogo dal LÉVY, la *parte del caso* (la *partie du hasard*) ha l'ordine di grandezza rispettivamente di $\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{3}} \sigma$ e di $\sqrt{\lambda} \sigma$.

Geometria differenziale. — *Superficie applicabili sopra superficie a curvatura media costante. Nuova dimostrazione del teorema del « Ricci ».* Nota di G. SANSONE, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. L'elemento lineare di una superficie S a curvatura totale k non nulla riferito ad un sistema isotermo abbia la forma

$$(1) \quad ds^2 = E(du^2 + dv^2),$$

e supponiamo che un sistema di linee $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$ si muti per una deformazione della S nel sistema delle linee di curvatura di una superficie S' a curvatura media costante $\pm 1/R$ ($R > 0$). Per l'elemento lineare di S' avremo

$$(2) \quad ds^2 = R^2 e^{\pm 2\theta} (d\varphi^2 + d\psi^2)$$

ove θ è una soluzione dell'equazione

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} + \sinh \theta \cosh \theta = 0 \quad (3).$$

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) Cfr. G. RICCI-CURBASTRO, *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di secondo grado*. « Atti del R. Istituto Veneto », ser. III, t. VI, 1895, p. 466.

(3) Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. II, p. 438, 2^a edizione, Pisa, 1903.

Per l'equivalenza delle due forme differenziali (1) e (2) la funzione φ dovrà soddisfare le due equazioni

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0 \quad , \quad \Delta_1 \varphi = \frac{1}{E} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right] = \frac{1}{R^2 e^{2\theta}}$$

cioè il sistema

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 = \frac{E}{R^2 e^{2\theta}},$$

mentre ψ è la soluzione coniugata di φ .

Osserviamo che se nel secondo membro della (2) vale il segno $-$, i raggi principali di curvatura r_1, r_2 di S' hanno l'espressione

$$r_1 = R e^{\theta} / \sinh \theta \quad , \quad r_2 = R e^{\theta} / \cosh \theta$$

e la curvatura totale k della S' e perciò della S è data da

$$(5) \quad k = \sinh \theta \cosh \theta / R^2 e^{2\theta}.$$

Si ha da qui

$$(6) \quad \theta = -\log (1 - 4 k R^2) / 4$$

e l'equazione (3) diventa allora

$$(I) \quad \Delta_2 \log \left(\frac{1}{4 R^2} - k \right) = 4 k.$$

Osserviamo ancora che prendendo l'elemento lineare (2) sotto la forma $ds^2 = e^{-2\theta} (du^2 + dv^2)$ si ha $r_1 = R e^{-\theta} \cosh \theta$, $r_2 = R e^{-\theta} \sinh \theta$, $\theta = \log (1 - 4 k R^2) / 4$; troviamo la superficie precedente con i raggi di curvatura cambiati di segno, cioè la sua simmetrica; possiamo quindi riferirci alle superficie a curvatura media costante definite dalla (2), ove nel secondo membro prenderemo nell'esponente il segno $+$.

Ritornando al sistema (4), esso per la (6) può scriversi

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 = \frac{E}{R^2} \frac{1 - 4 k R^2}{4 k R^2},$$

e occorre vedere se esiste una funzione φ che lo soddisfa.

Derivando la seconda di queste equazioni sia rispetto ad u che rispetto a v otteniamo due equazioni lineari nelle derivate seconde di φ le quali asso-

ciate alla prima delle (7) ci permettono di trovare per $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ le seguenti espressioni:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \frac{1}{2EL} \left[\frac{\partial(EL)}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial(EL)}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right], \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2EL} \left[\frac{\partial(EL)}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial(EL)}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right], \end{cases}$$

ove abbiamo posto per brevità $2L = \sqrt{1 - 4kR^2}/R^2$.

Se di questo sistema (equivalente ad un sistema di due equazioni ai differenziali totali per le due funzioni incognite $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$) formiamo le condizioni di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right)$$

ritroviamo ancora l'equazione (I). Adunque soddisfatta la (I), il sistema (8) permette di determinare $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ a meno di due costanti arbitrarie di cui una moltiplicativa, potremo quindi determinare φ , a meno di due costanti arbitrarie di cui una additiva, in guisa che sia soddisfatto il sistema (7), ossia la S è deformabile nella S' . Abbiamo così dimostrato il teorema del Ricci.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie sia applicabile sopra una superficie a curvatura media costante $\pm 1/R$ è che sia soddisfatta l'equazione

$$(I) \quad \Delta_2 \log \left(\frac{1}{4R^2} - k \right) = 4k,$$

ove k è la curvatura totale di S , e il parametro differenziale secondo Δ_2 è calcolato rispetto alla prima forma fondamentale di S .

Notiamo infine che è ben naturale che la funzione φ , prescindendo dalla costante additiva, sia determinata a meno di una costante arbitraria; infatti per un noto teorema di Bonnet⁽¹⁾ se il sistema delle linee $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$ si cambia per una deformazione della S nelle linee di curvatura di una superficie a curvatura media costante, qualunque altro sistema di linee formato dalle traiettorie isogonali alle $\varphi = \text{cost.}$ e dalle loro traiettorie ortogonali si muta anch'esso nelle linee di curvatura di una superficie a curvatura media costante.

(1) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit., p. 440.

2. a) Il teorema del Ricci ha lo svantaggio apparente di prescrivere il valore della curvatura media $\pm 1/R$ della superficie S' sulla quale è applicabile la S , ma è subito visto che si può enunciare il teorema sotto forma invariante indipendentemente dal valore della costante $\pm 1/R$.

Siccome il parametro differenziale secondo di $\log \varphi$ calcolato rispetto alla forma differenziale quadratica (I) ha l'espressione

$$\Delta_2 \log \varphi = \frac{1}{E} \left\{ -\frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{1}{\varphi} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right] \right\}$$

la (I) con semplici trasformazioni diventa

$$(II) \quad k/R^4 - [8k^2 - \Delta_2 k]/R^2 + 4k^2 [4k - \Delta_2 \log(-k)] = 0.$$

Abbiamo quindi: *condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie sia deformabile in una superficie a curvatura media costante è che l'equazione (II) ammetta una radice costante $1/R$. Se $1/R$ è una tale radice, la superficie considerata è applicabile sulla superficie a curvatura media costante $1/R$*

$$ds^2 = R^2 e^{2\theta} (d\varphi^2 + d\psi^2)$$

ove $\theta = -\log(1 - 4kR^2)/4$, con i raggi principali di curvatura $r_1 = Re^\theta/\sinh \theta$ $r_2 = Re^\theta/\cosh \theta$ e sulla superficie associata di questa che ha il medesimo elemento lineare, e i raggi principali di curvatura precedenti invertiti tra loro⁽¹⁾.

b) Sempre nell'ipotesi che la S non sia sviluppabile ($k \neq 0$) può la (II) ammettere due valori $1/R^2$ che la soddisfano, entrambi costanti e distinti tra loro? La risposta è negativa. Infatti se si verifica questa circostanza un medesimo sistema ortogonale (φ, ψ) della S si può deformando la S mutare in quattro modi diversi nel sistema di linee di curvatura di quattro superficie S' a curvatura media costante. Questo fatto esige per un teorema di Codazzi⁽²⁾ che ciascuna di queste superficie sia una superficie modanata a sviluppabile direttrice cilindrica, ma queste superficie ammettono una semplice infinità di deformazioni continue le quali lasciano invariate le linee di curvatura e fanno variare la curvatura media con continuità, deve essere quindi la (II) identica, perciò $k = 0$, che è il caso escluso.

(1) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit., p. 438.

(2) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit., pp. 43, 45, 266.

Geometria. — *Esistenza di sistemi continui distinti di curve piane algebriche con dati numeri plueckeriani.* Nota di B. SEGRE, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

1. — In una Nota recente⁽²⁾ mi sono occupato delle questioni relative all'esistenza ed alla dimensione di sistemi continui (irriducibili) di curve piane algebriche con dati caratteri. Qui dimostro che *possono esistere più sistemi continui completi distinti (anche di dimensione diversa), di curve algebriche irriducibili con dati caratteri plueckeriani* (nn. 2, 3, 4)⁽³⁾, ed accenno ad alcune applicazioni di carattere proiettivo della teoria dei sistemi continui (nn. 5, 6).

Un sistema continuo completo potendo, come s'è detto, non esser individuato dai numeri plueckeriani delle sue curve, ci si può proporre d'introdurre *altri caratteri* che coi primi siano sufficienti ad individuarlo; ciò verrà effettuato in un prossimo lavoro⁽⁴⁾ per certi sistemi continui di curve di diramazione di piani *n-pli*, pervenendo così ad una *caratterizzazione proiettiva* di tali curve di diramazione.

2. — Al n. 4 della Nota citata⁽²⁾ ho considerato un sistema continuo di curve d'ordine $6m$ con $6m^2$ cuspidi, di genere

$$p = 12m^2 - 9m + 1,$$

avente la dimensione

$$\delta^* = \frac{1}{2}(13m + 2)(m + 1).$$

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) *Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri*, questi «Rendiconti», vol. X, (6), 1929₂, p. 31; v. specialmente il n. 3 pel concetto di sistema continuo regolare che occorre in seguito.

(3) Tale possibilità, per quanto generalmente ammessa, non è stata — che io sappia — fino ad ora suffragata da esempi. — Vi son dei casi in cui si possono in pari tempo ottenere direttamente i *teoremi di esistenza e di unicITÀ*. Si voglia ad esempio stabilire l'esistenza di curve piane del 7° ordine e genere 3, con un nodo ed 11 cuspidi. Considerando la g_7^4 completa determinata su di una curva siffatta (supposta esistente) dalle sezioni rettilinee, la questione si riconduce alla *determinazione di una curva del 7° ordine e genere 3, appartenente ad S_4 , la cui sviluppabile delle tangenti si appoggi ad una retta di S_4 in 11 punti semplici*. La risoluzione di questo interessante problema, fornisce l'esistenza delle curve piane richieste — di cui anzi permette di scrivere l'equazione — ed in più dimostra l'*unicITÀ* del sistema continuo completo a cui esse appartengono.

(4) *Sulle curve di diramazione di certi piani multipli*, di prossima pubblicazione; in questa Memoria verranno anche adottati altri esempi di sistemi continui che offrono la suindicata particolarità.

In base all'ultimo teorema del n. 8 ed al teorema 1° del n. 7 di detta Nota, si può asserire l'esistenza di un sistema continuo *regolare* di curve cogli stessi caratteri, di dimensione

$$\delta = 6m^2 + 9m.$$

Per $m > 2$ il primo sistema risulta non regolare, ed i due sistemi considerati — entrambi completi — sono certamente distinti; questi hanno anzi dimensioni diverse.

3. — Ancora più significativo è l'esempio che ora esporremo, di due sistemi continui completi di curve cogli stessi caratteri plueckeriani, entrambi *regolari* (eppertanto necessariamente di dimensioni uguali).

Consideriamo le curve del 6° ordine, rappresentate in coordinate (x) proiettive omogenee di punto nel piano dall'equazione

$$[\varphi_2(x)]^3 + [\psi_3(x)]^2 = 0,$$

ove φ_2 e ψ_3 son due forme arbitrarie nelle (x), rispettivamente di 2° e 3° grado. Affinchè l'equazione di una sestica piana si possa mettere sotto questa forma, è necessario ch'essa possenga 6 cuspidi su d'una conica ($\varphi_2 = 0$), ed inoltre che esista una cubica ($\psi_3 = 0$) che tocchi in detti punti le relative tangenti cuspidali. In base ad un teorema generale dimostrato nella Memoria citata ⁽¹⁾ si ha che *quest'ultima condizione è conseguenza della prima*, la quale da sola è sufficiente per la voluta rappresentabilità. Le sestiche in questione costituiscono un'unico sistema continuo ∞^{15} , completo e regolare. Esse sono i contorni apparenti delle superficie cubiche dello spazio ordinario, da punti esterni; si ha anzi che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una sestica piana sia contorno apparente di una superficie cubica da un punto esterno P, è ch'essa abbia 6 cuspidi giacenti su d'una medesima conica. Data una sestica siffatta ed un punto P esterno al piano che la contiene, esistono ∞^4 superficie del 3° ordine di cui essa è contorno apparente da P: queste si ottengono tutte come trasformate di una di esse mediante le varie omologie di centro P.

4. — Una curva C generale della 3ª classe è del 6° ordine ed ha 9 cuspidi, di cui necessariamente non più di 6 stanno su d'una stessa conica. Presone 6 non situate su d'una conica, e considerate come virtualmente inesistenti le altre 3, si vien così, in base al teorema 1° del n. 7 della mia citata Nota lineea, ad individuare un sistema continuo regolare (e quindi ∞^{15}), di curve del 6° ordine con 6 cuspidi non giacenti su d'una stessa conica, a cui appartiene C. Questo sistema è certo distinto dal prece-

(1) Vedi nota (4) a p. 557.

dente, per quanto i due sistemi sieno costituiti da curve algebriche cogli stessi caratteri plueckeriani⁽¹⁾.

5. — Consideriamo una superficie del 3° ordine F_3 , con tre punti doppi biplanari. Gli assi di questi tre punti doppi concorrono in uno stesso punto, e l'equazione di F_3 riferita al tetraedro che quest'ultimo determina coi primi tre, può essere ricondotta alla forma $x_1 x_2 x_3 = x_4^3$. Le ∞^3 superficie cubiche di quel tipo sono autoduali e fra loro proiettive; ciascuna è mutata in sè da un gruppo continuo ∞^2 di omografie e reciprocità.

Il contorno apparente su d'un piano di una di quelle F_3 da un punto esterno, è una sestica con 9 cuspidi, di cui tre (provenienti dai punti doppi della F_3) hanno le relative tangenti cuspidali concorrenti in un punto, e le altre sei stanno su d'una stessa conica. Questo ragionamento si può invertire; avuto riguardo al n. 3, si ha dualizzando che:

Una qualunque cubica ellittica, C_3 , può sempre pensarsi come sezione piana di una F_3 con tre punti doppi biplanari; il piano di questi tre punti passa in ogni caso per una retta dei flessi di C_3 . In corrispondenza alle 12 rette dei flessi di C_3 , si hanno 12 diversi sistemi continui ∞^4 di F_3 di quel tipo passanti per C_3 , ciascuno dei quali è mutato in sè dalle ∞^4 omologie dello spazio, aventi il piano di C_3 come luogo di punti uniti.

Le 6 tangenti d'inflessione relative ai 6 flessi di C_3 situati su due lati di uno stesso trilatero dei flessi, toccano una medesima conica⁽²⁾; esse inoltre risultano tangenti ad una curva di 3ª classe, nei rispettivi punti di contatto con C_3 .

6. — Le quartiche piane trinodate (irriducibili), costituiscono un'unico sistema continuo regolare $(4, 0, 0)$; per dualità si ha che esiste un'unico sistema continuo regolare di curve (razionali) del 6° ordine con 4 nodi e

(1) Questo risultato contraddice un teorema dato da G. ALBANESE nella IV Parte della Memoria: *Sui sistemi continui di curve piane algebriche* (Pisa, Nistri, 1923). Mostrerò altrove quali sieno i punti discutibili dell'analisi delicata svolta per stabilire detto teorema.

La questione di sapere se esistono curve del 6° ordine aventi 6 cuspidi non giacenti su d'una conica, è stata posta, ma non risolta, da O. ZARISKI nella bella Memoria: *On the Problem of Existence of Algebraic Functions of Two Variables Possessing a Given Branch Curve*, « Amer. Journ. of Math. », vol. 51 (1929), a p. 320. La risposta affermativa che qui vien data a tale domanda, permette di asserire che esistono curve piane cogli stessi caratteri plueckeriani, aventi gruppi fondamentali non oloedricamente isomorfi, ed anzi di cui l'una è curva di diramazione d'un piano multiplo e l'altra no. Tale possibilità già era stata intuita, ma non giustificata con esempi, da F. ENRIQUES, nella Nota: *Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes*. « Comptes Rendus », t. 154 (1912), p. 418.

(2) Questo fatto è noto; lo stesso dicasi per la prima parte della proposizione data al numero seguente.

6 cuspidi. Quest'ultimo può solo appartenere ad uno dei due sistemi di sestiche piane di cui ai nn. 3 e 4: la considerazione dei contorni apparenti delle superficie cubiche con 4 punti doppi (conici), dimostra ch'esso appartiene al primo. Ne consegue (n. 3) che:

Una quartica piana trinodata ha 6 flessi; le relative tangenti d'inflexione toccano una medesima conica, ed inoltre risultano tangenti nei flessi relativi ad una curva di 3^a classe.

Matematica. — *Sull'intervallo d'indeterminazione del procedimento di sommazione di Poisson per le serie di Fourier e di Laplace.*
Nota di M. PICONE, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

Sia $f(x)$ una funzione, reale e misurabile, definita sull'intero asse reale x , ad eccezione, al più, dei punti di un insieme di misura nulla, sommabile in ogni intervallo finito, periodica e di periodo 2π , e si ponga:

$$(1) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Per ogni quantità positiva σ si ha:

$$(2) \quad \frac{1}{2\sigma} \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\sigma}{k\sigma} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

la serie del secondo membro convergendo uniformemente al variare di x , e per ogni quantità ρ positiva e minore d'uno, si ha:

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\tau - x)} d\tau = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

la serie del secondo membro convergendo assolutamente e uniformemente al variare di x .

Il procedimento di sommazione di Riemann della serie (1) consiste nell'attribuirle come *minima e massima somma* nel punto x , rispettivamente il minimo e il massimo limite seguenti, della somma della serie (2) al tendere di σ a zero,

$$\left. \begin{aligned} R'(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \\ R''(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \end{aligned} \right\} \frac{1}{2\sigma} \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(\tau) d\tau.$$

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

Il procedimento di sommazione di Poisson della stessa serie (1) consiste nell'attribuirle come minima e massima somma nel punto x , rispettivamente il minimo e il massimo limite seguenti, della somma della serie (2) al tendere di ρ a uno,

$$\begin{aligned} P'(x) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\tau - x)} d\tau \right. \\ P''(x) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \end{aligned}$$

Gl'intervalli (R', R'') , (P', P'') , finiti o infiniti, sono gl'intervalli di indeterminazione dei procedimenti di sommazione della serie (1), rispettivamente, di Riemann e di Poisson. Con questa breve Nota mi permetto di comunicare la semplicissima dimostrazione e i notevoli corollarii di cui è suscettibile il seguente teorema che non ho mai visto enunciare⁽¹⁾:

I. *L'intervallo d'indeterminazione (P', P'') del procedimento di sommazione di Poisson della serie (1) di Fourier è sempre contenuto nell'intervallo d'indeterminazione (R', R'') del procedimento di sommazione di Riemann.*

Il teorema si estende al metodo di sommazione di Poisson delle serie di Laplace per le funzioni di due variabili e l'estensione sarà esposta nei miei *Appunti d'analisi superiore* di prossima pubblicazione.

I. LEMMA. — Siano: $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x , sommabile nell'intervallo (a, b) , $q(x)$ una funzione non decrescente in (a, b) ivi sempre positiva, $p(x)$ una funzione non crescente in (a, b) ivi mai negativa. Se, indicando l e L due numeri finiti, al variare di x in (a, b) , si ha sempre

$$l \equiv \frac{1}{\int_a^x q(\tau) d\tau} \int_a^x f(\tau) q(\tau) d\tau \quad , \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\int_a^x q(\tau) d\tau} \int_a^x f(\tau) q(\tau) d\tau \equiv L,$$

risulta pure sempre in (a, b) , rispettivamente,

$$l \equiv \frac{1}{\int_a^x p(\tau) d\tau} \int_a^x f(\tau) p(\tau) d\tau \quad , \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\int_a^x p(\tau) d\tau} \int_a^x f(\tau) p(\tau) d\tau \equiv L.$$

Si ponga, invero,

$$F(x) = \int_a^x f(\tau) q(\tau) d\tau \quad , \quad Q(x) = \int_a^x q(\tau) d\tau;$$

(1) Enunciatolo, giorni or sono, in una conversazione con l'amico CANTELLI ebbi da questi il lusinghiero incitamento a pubblicarlo,

per ogni valore α , comunque fissato in (a, b) , si ha

$$\int_a^x f(x) p(x) dx = \int_a^x f(x) q(x) \frac{p(x)}{q(x)} dx = F(\alpha) \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} - \int_a^x F(x) d \frac{p(x)}{q(x)},$$

l'ultimo integrale essendo preso nel senso di Stieltjes, onde segue

$$\begin{aligned} \int_a^x f(x) p(x) dx &\equiv F(\alpha) \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} - L \int_a^x Q(x) d \frac{p(x)}{q(x)} = \\ &= F(\alpha) \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} - L \left(Q(\alpha) \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} - \int_a^x p(x) dx \right) = \\ &= [F(\alpha) - LQ(\alpha)] \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} + L \int_a^x p(x) dx \equiv L \int_a^x p(x) dx. \end{aligned}$$

2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. — Fissato x , poniamo:

$$I(x, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\sigma} \int_0^\sigma [f(x+\tau) + f(x-\tau)] d\tau,$$

$$r^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \tau,$$

$$\begin{aligned} J(x, \rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{(1 - \rho^2) d\tau}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\tau - x)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{1 - \rho^2}{r^2} d\tau, \end{aligned}$$

ed osserviamo che, per ogni quantità positiva $\delta (\equiv \pi)$, si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{1 - \rho^2}{r^2} d\tau \right) = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \rho^2}{r^2} d\tau = 1.$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} I(x, \sigma) \equiv \lim_{\rho \rightarrow 1} J(x, \rho) \equiv \lim_{\rho \rightarrow 1} J''(x, \rho) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} I''(x, \sigma).$$

Possiamo limitarci a dimostrare che $\lim'' J \equiv \lim'' I$, e ciò occorre fare soltanto quando sia $\lim'' I < +\infty$. In tale ipotesi, dobbiamo far vedere che, comunque si fissi la quantità $\lambda > \lim'' I$, riesce pure $\lambda \geq \lim'' J$. Sia δ un numero positivo tale che si abbia

$$I(x, \sigma) < \lambda, \quad \text{per } \sigma \leq \delta;$$

riesce:

$$\begin{aligned} J(x, \rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{1-\rho^2}{r^2} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{1-\rho^2}{r^2} d\tau, \\ \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{1-\rho^2}{r^2} d\tau &< \frac{1-\rho^2}{2\pi \sin^2 \delta} \int_0^{2\pi} |f(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

ed in virtù del lemma,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\delta [f(x+\tau) + f(x-\tau)] \frac{1-\rho^2}{r^2} d\tau \leq \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\delta \frac{1-\rho^2}{r^2} d\tau,$$

si ha dunque:

$$J(x, \rho) < \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\delta \frac{1-\rho^2}{r^2} d\tau + \frac{1-\rho^2}{2\pi \sin^2 \delta} \int_0^{2\pi} |f(\tau)| d\tau,$$

donde, passando al limite per $\rho \rightarrow 1$, $\lim'' J(x, \rho) \leq \lambda$.

3. COROLLARI DEL TEOREMA. — I limiti $R'(x)$ e $R''(x)$ possono ben chiamarsi la *minima* e la *massima media asintotica* della $f(x)$ nel punto x , e diremo che la $f(x)$ possiede nel punto x una determinata media asintotica (finita o infinita) se $R'(x) = R''(x)$. Sono corollarii immediati del teorema i seguenti.

II. Se in un punto x la $f(x)$ ha una determinata media asintotica (finita o infinita) il procedimento di sommazione di Poisson della serie di Fourier della $f(x)$ ha in x per limite tale media ⁽¹⁾.

III. Siano $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n$, insiemi misurabili di punti della semiretta $\tau > 0$, a due a due privi di punti comuni, aventi per somma l'intera semiretta. Se ciascun insieme \mathbf{T}_k ha nel punto zero una densità (a destra) determinata δ_k , se cioè, detta $\mathbf{T}_k(\sigma)$ la parte di \mathbf{T}_k contenuta nell'intervallo $(0, \sigma)$, riesce

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\text{mis } \mathbf{T}_k(\sigma)}{\sigma} = \delta_k,$$

(1) Il teorema è noto nel caso che la media asintotica sia determinata e finita. In tal caso, se, inoltre, la funzione $f(x)$ è limitata in un intorno del punto x , alla detta media tende pure (HARDY e LITTLEWOOD) il procedimento di sommazione di FÉJÉR [cfr. L. TONELLI, *Serie trigonometriche* (Zanichelli, Bologna, 1928), p. 178].

allora per l'intervallo (P', P'') di indeterminazione del procedimento di sommazione di Poisson della serie di Fourier della $f(x)$ si ha:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \left[\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x+\tau) + f(x-\tau)}{2} (\text{su } T_k) \right] \equiv P'(x),$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \left[\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x+\tau) + f(x-\tau)}{2} (\text{su } T_k) \right] \equiv P''(x),$$

tutte le volte che le somme (4) e (5) abbiano un significato (finito o infinito).

Siano X_1, X_2, \dots, X_n , insiemi misurabili di punti dell'asse x , a due a due privi di punti comuni, aventi per somma l'intero asse x . Se ciascun insieme X_k ha nel punto x_0 una densità simmetrica determinata δ_k , se cioè, detta $X_k(\sigma)$ la parte di X_k contenuta nell'intervallo $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$, riesce

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\text{mis } X_k(\sigma)}{2\sigma} = \delta_k,$$

allora, per l'intervallo (P', P'') si ha pure

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) (\text{su } X_k) \right] \equiv P'(x_0),$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) (\text{su } X_k) \right] \equiv P''(x_0),$$

tutte le volte che le somme (6) e (7) abbiano un significato (finito o infinito)⁽¹⁾.

IV. Se X è un insieme di punti di densità minima (per esempio simmetrica) non nulla nel punto x e se ivi la $f(x)$ ha su X per limite $\pm \infty$, laddove riesce limitata in un intorno di x sul complementare di X , il procedimento di sommazione di Poisson della serie di Fourier della $f(x)$ ha in x per limite $\pm \infty$.

Si tenga ora presente che⁽²⁾ l'intervallo di indeterminazione del pro-

(1) Ed invero, la minima e la massima media asintotica della $f(x)$ nel punto x , sono sempre contenute fra le somme (4), (5), (6) e (7). Ne segue, in particolare, che se T è il complementare di un insieme di punti della semiretta $\tau > 0$, di misura nulla, i limiti d'indeterminazione del procedimento di sommazione di Poisson sono compresi fra i limiti (finiti o infiniti)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x+\tau) + f(x-\tau)}{2} (\text{su } T) \quad , \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x+\tau) + f(x-\tau)}{2} (\text{su } T).$$

Ciò sussiste anche per il metodo di sommazione di Féjer [cfr. la mia Nota: *Nuova generalizzazione del teorema di Féjer sulle serie di Fourier*, « Bollettino dell'Unione matematica italiana », vol. VIII (1929), pp. 17-20].

(2) PICONE, *Sui metodi di sommazione delle serie* [« Annali di matematica pura ed applicata », to. II, serie 4^a (1924-1925), pp. 263-295], teorema I del n. 2.

cedimento di sommazione ordinaria di una serie contiene sempre quello del procedimento di Poisson, e seguono i teoremi:

V. Se nel punto x la serie di Fourier della $f(x)$, sommata al modo ordinario, ha una determinata somma (finita o infinita), questa riesce sempre compresa fra la minima e la massima media asintotica della $f(x)$ nel punto x , e quindi anche fra le somme (4) e (5), (6) e (7).

VI. Se nel punto x la $f(x)$ ha una determinata media asintotica di valore $+\infty$ (di valore $-\infty$), la serie di Fourier della $f(x)$ non vi può convergere al modo ordinario, e precisamente l'insieme delle somme parziali vi ha per estremo superiore $+\infty$ (per estremo inferiore $-\infty$). In particolare, ciò avviene se esiste un insieme X , di densità minima (per esempio simmetrica) non nulla nel punto x , sul quale la $f(x)$ ha in x per limite $+\infty$ (per limite $-\infty$), laddove riesce limitata in un intorno di x sul complementare di X ⁽¹⁾.

Matematica. — *Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate.*
Nota di PIA NALLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa ed in un'altra Nota esporrò sommariamente i risultati di alcune mie ricerche.

Sia V_n una varietà metrica ad n dimensioni, riferita a coordinate x_i , ed L una linea in essa, riferita ad un parametro t .

Se u è un vettore funzione dei punti di L , di componenti controvarianti u^i , denoteremo con \dot{u} il derivato di u lungo L rispetto al parametro t , ossia il vettore le cui componenti controvarianti sono

$$\frac{du^i}{dt} + \sum_j^n \left\{ \begin{matrix} j & b \\ i & \end{matrix} \right\} u^j \frac{dx_b}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Siano ora fissati nei punti di L r gruppi di vettori:

$$(I) \quad u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ib_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Tali vettori siano unitari, quelli di un gruppo siano indipendenti, lungo L sia costante il prodotto scalare di due qualunque dei vettori, anche non appartenenti al medesimo gruppo.

Dato lungo L un vettore u , noi definiremo un nuovo vettore che denoteremo con

$$(2) \quad \dot{u} [u_{11}, \dots, u_{1b_1}] [u_{21}, \dots, u_{2b_2}] \dots [u_{r1}, \dots, u_{rb_r}]$$

(1) Nella citata mia Nota del « Bollettino dell'Unione matematica italiana » trovasi già l'ultima affermazione del teorema, ma limitatamente al caso che l'insieme X sia una delle semirette terminate al punto x .

(2) Nella seduta del 17 novembre 1929.

o, più brevemente, con

$$(3) \quad \dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r],$$

dove U_i denota il gruppo (1).

Chiameremo tale vettore *derivato di u lungo L rispetto al parametro t , relativo ai gruppi U_1, U_2, \dots, U_r* .

Daremo la definizione per mezzo di una formula di ricorrenza, ponendo:

$$\begin{aligned} \dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r] &= \dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}] - \sum_1^{h_r} p_{ri} u_{ri} - \\ &- \sum_1^{h_r} (u \times u_{ri}) \cdot \dot{u}_{ri}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}] \end{aligned}$$

dove le p_{ri} si ottengono dal sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} &\sum_j^{h_r} (u_{ri} \times u_{rj}) p_{rj} + u \times \dot{u}_{ri}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}] - \\ &- \sum_j^{h_r} (u \times u_{rj}) (u_{rj} \times \dot{u}_{ri}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}]) = 0 \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, h_r), \end{aligned}$$

e ponendo

$$\dot{u}[U_i] = \dot{u} - \sum_1^{h_1} p_{1i} u_{1i} - \sum_1^{h_1} (u \times u_{1i}) \cdot \dot{u}_{1i},$$

nelle quali le p_{1i} si ottengono dal sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned} &\sum_j^{h_1} (u_{1i} \times u_{1j}) p_{1j} + u \times \dot{u}_{1i} - \sum_j^{h_1} (u \times u_{1j}) (u_{1j} \times \dot{u}_{1i}) = 0 \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, h_1). \end{aligned}$$

È da notare che $\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r]$ rimane inalterato quando uno dei gruppi U_i viene sostituito da altri h_i vettori unitari indipendenti che siano combinazioni lineari a coefficienti costanti di quelli che costituiscono il gruppo U_i .

Quindi, senza ledere la generalità, si può supporre che i vettori di un gruppo U_i siano a due a due ortogonali.

In tal caso per definire $\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r]$ si hanno le formule

$$\begin{aligned} \dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r] &= \dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}] - \\ &- \sum_1^{h_r} (u \times u_{ri}) (\dot{u}_{ri}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}] \times u_{ri}) \cdot u_{ri} + \\ &+ \sum_1^{h_r} (u \times \dot{u}_{ri}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}]) \cdot u_{ri} - \\ &- \sum_1^{h_r} (u \times u_{ri}) \cdot \dot{u}_{ri}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}], \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} \dot{u}[U_i] = \dot{u} - \sum_{ij}^{h_i} (u \times u_{ij}) (\dot{u}_{ij} \times u_{ij}) \cdot u_{ij} + \\ + \sum_i^{h_i} (u \times \dot{u}_{ij}) \cdot u_{ij} - \sum_i^{h_i} (u \times u_{ij}) \cdot \dot{u}_{ij}. \end{aligned}$$

Notiamo ancora che

$$\dot{u}[u_1, u_2, \dots, u_h] = \dot{u}[u_1][u_2] \dots [u_h]$$

e, più generalmente,

$$\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r] = \dot{u}[v_1, v_2, \dots, v_m]$$

dove v_1, v_2, \dots, v_m sono $m \leq n - 1$ vettori per mezzo dei quali uno qualunque degli u_{ij} si esprime come combinazione lineare a coefficienti costanti. Ne discende che $\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r]$ è indipendente dall'ordine dei gruppi U_i .

Se il vettore u è combinazione lineare a coefficienti costanti dei vettori v_1, v_2, \dots, v_m si ha

$$\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r] = 0.$$

Se nel gruppo U_i uno dei vettori è parallelo lungo L , nel senso di Levi-Civita, o se, più generalmente, ha derivato nullo relativamente ad $U_1, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_r$ tale vettore si può sopprimere dal gruppo senza alterare $\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r]$.

Se poi tutti i vettori di U_i si trovano in tale condizione, si può sopprimere tutto il gruppo U_i . Quando è possibile sopprimere tutti i gruppi U_i , $\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r]$ si riduce ad \dot{u} .

L'equazione

$$\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r] = 0$$

rappresenta un trasporto rigido della intera stella dei vettori u lungo la linea L , cioè un trasporto che conserva i prodotti scalari.

Esso trasporta ciascuno dei vettori u_{ij} su se stesso e si può considerare in un certo senso come un trasporto composto con quelli rappresentati dalle equazioni

$$\dot{u}[U_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

od anche con quelli rappresentati dalle equazioni

$$\dot{u}[v_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Inversamente: qualunque trasporto rigido della stella di vettori lungo L può essere rappresentato da una equazione del tipo

$$(4) \quad \dot{u}[U] = 0,$$

dove U è un conveniente gruppo di vettori u_1, u_2, \dots, u_m con $m \leq n-1$, ognuno dei quali si trasporta su se stesso.

Possiamo anche includere il caso $m = 0$; allora, invece della (4), si ha

$$\dot{u} = 0$$

ed il trasporto si riduce al parallelismo di Levi-Civita.

Per $m = 1$, l'equazione

$$(5) \quad \dot{u}[u_1] = 0,$$

quando u_1 è il versore tangenziale ad L , rappresenta per i vettori u ortogonali ad u_1 il *parallelismo di Fermi*. La (5) lo estende alla intera stella dei vettori: noi preferiamo chiamarlo *trasporto rigido di Fermi*.

La (5), lasciando ad u_1 la massima generalità, trasporta i vettori ortogonali ad u_1 come un trasporto definito dal Wundheiler⁽¹⁾. Però questo ultimo non è rigido per la intera stella di vettori, tranne quando u_1 è parallelo lungo L .

Il trasporto (5) si mostra più interessante perchè per mezzo di esso, attribuendo un conveniente significato ad \dot{u} , si può arrivare al più generale trasporto rigido.

La (5) rappresenta il trasporto rigido in un certo senso meno discosto dal parallelismo di Levi-Civita che trasporta u_1 su se stesso, come, più in generale, l'equazione

$$\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r] = 0$$

rappresenta il trasporto rigido meno discosto dal parallelismo che trasporta ciascuno dei vettori u_{ij} su se stesso.

Notiamo che

$$u \times \dot{v}[U_1, U_2, \dots, U_r] + v \times \dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_r] = \frac{d}{dt}(u \times v).$$

Osserviamo ancora che l'equazione

$$\dot{u}[u_1, u_2, \dots, u_n] = 0$$

(1) A. WUNDHEILER, *Sur un déplacement généralisé dans les espaces riemanniens*. Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. IX, pp. 387-389. Cfr. anche la mia Nota: *Sopra uno spostamento generalizzato negli spazi di Riemann e l'osservazione del prof. Levi-Civita*, ibid., pagine 958-962 ed una mia Nota, in corso di pubblicazione nei « Rendiconti del R. Istituto Veneto ».

esprime che u è combinazione lineare a coefficienti costanti di u_1, u_2, \dots, u_n , cioè che u è legato rigidamente a questi vettori.

Siccome poi

$$\dot{u}_n[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}] = 0,$$

perchè u_n si trasporta rigidamente nel trasporto che porta ciascuno dei vettori u_1, u_2, \dots, u_{n-1} su se stesso, ne viene che

$$\dot{u}[u_1, u_2, \dots, u_n] = \dot{u}[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}].$$

Più in generale, si può supporre che in $\dot{u}[U_1, U_2, \dots, U_{r-1}]$ ciascuno dei gruppi U_i non contenga più di $n - 1$ vettori.

Matematica. — *Sur un théorème de M. G. Polya.* Nota di A. GELFOND, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

Dans un étude *Ueber die ganze ganzwertige Functionen*, M. G. Polya ⁽²⁾ a démontré le théorème suivant: Si une fonction entière $g(x)$ vérifie la condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |g(re^{i\varphi})| 2^{-r} r^{\frac{1}{2}} = 0$$

et possède de plus des valeurs entières aux points $x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$, c'est-à-dire en tous les points entiers et positifs de l'axe réel, alors cette fonction $g(x)$ se réduit à un polynôme.

L'étude présente a pour but d'examiner le cas où la fonction $g(x)$ et ses $p - 1$ premières dérivées prennent des valeurs entières aux points $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ comme nous le verrons dans la suite, dans ce cas la croissance de la fonction entière $g(x)$ satisfait à la condition qui est pareille à celle du théorème de M. G. Polya.

1. — Considérons des polynômes $P_{k,i}(x)$ définis par les relations suivantes:

$$P_{0,1}(x) = 1; P_{1,1}(x) = x; P_{1,2}(x) = x^2; \dots; P_{k+1,i}(x) = \\ = [x(x-1) \dots (x-k+1)]^p (x-k)^i,$$

$$i = 1, 2, \dots, p; k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots; \text{ et } P_{k,p+1}(x) = P_{k+1,1}(x).$$

Développons $\frac{1}{z-x}$ en série de polynômes $P_{k,i}(x)$. Nous aurons,

$$(1) \quad \frac{1}{z-x} = \frac{P_{0,1}(x)}{P_{1,1}(z)} + \frac{P_{1,1}(x)}{P_{1,2}(z)} + \dots + \frac{P_{k+1,i-1}(x)}{P_{k+1,i}(z)} + \frac{P_{k+1,i}(x)}{P_{k+1,i}(z)} \cdot \frac{1}{z-x}.$$

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) « Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo », t. 40 (1915).

L'égalité (I) peut être facilement obtenue de l'égalité évidente :

$$\frac{P_{k+1,i-1}(x)}{P_{k+1,i}(\zeta)} + \frac{P_{k+1,i}(x)}{P_{k+1,i}(\zeta)} \frac{1}{\zeta - x} = \frac{P_{k+1,i-1}(x)}{P_{k+1,i-1}(\zeta)} \frac{1}{\zeta - x}.$$

Si $g(x)$ est une fonction entière, satisfaisante à la condition $|g(x)| \leq Ae^{\alpha|x|}$; $\alpha < p \ln 2$, il est aisé de la développer en série de polynômes $P_{k,i}(x)$.

Il suffit pour cela de multiplier les deux parties de l'égalité (I) par $\frac{1}{2\pi i} g(\zeta)$ et de les intégrer le long du contour c_n , qui entoure les points $1, 2, 3, \dots, n$. Nous obtenons

$$(II) \quad g(x) = A_0 + A_{1,1}x + A_{1,2}x^2 + \dots + A_{1,p}x^p + \dots + \\ + A_{n+1,i-1}P_{n+1,i-1}(x) + R_{n+1,i}(x)$$

où

$$A_{k+1,i-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{P_{k+1,i}(\zeta)} \quad \text{et} \quad R_{n+1,i}(x) = \frac{P_{n+1,i}(x)}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{P_{n+1,i}(\zeta)(\zeta - x)}.$$

Prenons comme contour d'intégration la circonférence $|\zeta| = 2n$ et évaluons $R_{n+1,i}(x)$. Nous obtenons :

$$|R_{n+1,i}(x)| \leq |P_{n+1,i}(x)| \frac{A' |g(2ne^{i\varphi})|}{[(n+1) \dots (2n-1) 2n]^p |2ne^{i\varphi} - x|} = \\ = e^{p \ln n! + \alpha n - p \ln 2n! + p \ln n! + o(n)} = e^{2n[\alpha - p \ln 2] + o(n)}$$

d'où il résulte le lemme suivant :

LEMME I. — Si $\alpha < p \ln 2$, alors $|R_{n+1,i}(x)| = o(1)$ pour $n \rightarrow \infty$, x étant arbitraire, et la fonction $g(x)$ est développable en série infinie :

$$(III) \quad g(x) = A_0 + A_{1,1}x + \dots + A_{1,p}x^p + \dots + \\ + A_{n+1,i-1}P_{n+1,i-1}(x) + \dots$$

Dans ce cas il n'existe pas deux fonctions qui auraient le même développement.

2. — Prenons de nouveau la série (II) et examinons les coefficients $A_{n+1,q-1}$

$$A_{n+1,q-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(\zeta) d\zeta}{P_{n+1,q}(\zeta)}.$$

Développons l'expression

$$\frac{1}{P_{n+1,q}(\zeta)} = \frac{1}{[\zeta(\zeta-1) \dots (\zeta-n+1)]^p (\zeta-n)^q}$$

en fraction rationnelles simples. Nous obtenons

$$\frac{1}{P_{n+1,q}(\zeta)} = \sum_{k=1}^p \frac{u_{0,k}}{\zeta^k} + \sum_{k=1}^p \frac{u_{1,k}}{(\zeta-1)^k} + \dots + \sum_{k=1}^p \frac{u_{n-1,k}}{(\zeta-n+1)^k} + \sum_{k=1}^q \frac{u_{n,k}}{(\zeta-n)^k}.$$

où $u_{j,k}$ ($0 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq p$) sont des constantes.

Posons

$$x^p(x-1)^p \dots (x-s+1)^p(x-s-1)^p \dots (x-n+1)^p(x-n)^q = v_{s,n}(x)$$

et désignons le plus petit multiple commun des nombres $2, 3, 4, \dots, n$ par ω_n .

Nous aurons (1)

$$\left[\frac{dv_{s,n}(x)}{dx} \right]_{x=s} = v_{s,n}(s) \left[\frac{p}{s} + \frac{p}{s-1} + \dots + p - p - \frac{p}{2} - \dots - \frac{p}{n-s} \right]$$

et il est évident, que $\omega_n \frac{v'_{s,n}(s)}{v_{s,n}(s)}$ est un nombre entier.

Pareillement

$$\left[\frac{d^t v_{s,n}(x)}{dx^t} \right]_{x=s} = v_{s,n}(s) \sum \frac{A}{a_1, a_2, \dots, a_t}$$

le nombre des termes de la somme est fini, tous les A et a_1, a_2, \dots, a_t sont des nombres entiers et de plus $|a_k| \leq n$.

Il en résulte que le nombre

$$(IV) \quad \omega_n \frac{v_{s,n}^{(t)}(s)}{v_{s,n}(s)}$$

est un nombre entier.

Examinons à présent les coefficients $u_{s,k}$. En fixant l'indice s , multiplions les deux parties de l'égalité (III) par $(x-s)^p$ (si $s=n$ nous multiplions par $(x-n)^q$), et posons ensuite $x=s$ dans l'égalité obtenue.

Nous obtenons

$$(V) \quad \frac{1}{v_{s,n}(s)} = u_{s,p}.$$

Il en résulte que $(n!)^p u_{s,p}$ est un nombre entier.

Nous pouvons facilement obtenir les relations récurrentes pour déterminer $u_{s,k}$. Nous plaçons dans la partie gauche de l'égalité (III) tous les degrés $\frac{1}{(\zeta-s)^{k'}}$; $k' \leq k$ et s est fixé. Multiplions les deux parties de l'égalité obtenue par $(x-s)^k$ et prenons la limite de la partie gauche pour $x=s$.

(1) Dans la suite nous désignerons toujours par s un nombre entier $0 \leq s \leq n$.

Nous aurons :

$$\lim_{x=s} \left[\frac{1 - \sum_{k'=k}^{k'=p} u_{s,k'} (x-s)^{p-k'} v_{s,n}(x)}{v_{s,n}(x) (x-s)^{p-k}} \right] = \lim_{x=s} (x-s)^k \left[\sum_{k'=1}^{k-1} \frac{u_{s,k'}}{(x-s)^{k'}} + \sum_{m=k}^p \frac{u_{m,k}}{(x-m)^k} \right]$$

et enfin

$$\lim_{x=s} \left| \frac{1 - v_{s,n}(x) (x-s)^{p-k} u_{s,k} - v_{s,n}(x) (x-s)^{p-k-1} u_{s,k+1} - \dots - u_{s,p} v_{s,n}(x)}{v_{s,n}(x) (x-s)^{p-k}} \right| = 0$$

en appliquant le règle de L'Hospital nous aurons

$$(VI) \quad (p-k)! v_{s,n}(s) u_{s,k} + u_{s,k+1} \left[\frac{d^{p-k}}{dx^{p-k}} v_{s,n}(x) (x-s)^{p-k} \right]_{x=s} + \dots + u_{s,p} \left[\frac{d^{p-k}}{dx^{p-k}} v_{s,n}(x) \right]_{x=s} = 0.$$

Il est évident que

$$\left[\frac{d^{p-k}}{dx^{p-k}} v_{s,n}(x) (x-s)^{p-k} \right]_{x=s}$$

ne contient que les $t-k$ premiers dérivés de $v_{s,n}(x)$.

Démontrons que le produit $(n!)^p u_{s,t} \cdot p! \omega_n^{p-t}$ est un nombre entier pour chaque $t = 1, 2, 3, \dots, p$.

Supposons que le produit $(n!)^p u_{s,t} \cdot p! \omega_n^{p-t}$ est un nombre entier pour $t = k+1, k+2, \dots, p$.

Multiplions alors l'égalité (VI) par $(n!)^p p! \omega_n^{p-k}$. Nous obtenons immédiatement que $(n!)^p \omega_n^{p-k} p! u_{s,k}$ est aussi un nombre entier. Dans le cas de $t = p$ notre supposition est déjà vérifiée (form. V).

Alors suivant la méthode de l'induction parfaite notre supposition est démontrée.

On a donc le lemme suivant :

LEMME II. — Pour chaque s et k , $0 \leq s \leq n$, $1 \leq k \leq p$ le produit

$$(n!)^p p! \omega_n^{p-1} \cdot u_{s,k}$$

est un nombre entier.

On peut encore introduire le lemme suivant :

LEMME III.

$$\omega_n \leq e^{n+o(n)}.$$

En effet

$$\omega_n = 2^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor} \cdot 3^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 3} \right\rfloor} \dots p^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor},$$

le produit étant pris pour chaque q premier $q \leq n$.

Donc

$$\omega_n = e^{\sum_{q=2}^p \left[\frac{\ln n}{\ln q} \right] \ln q} < e^{\sum_{q=2}^p \ln n} = e^{\frac{n}{\ln n} \cdot \ln n + o(n)} = e^{n + o(n)}.$$

3. — Les lemmes démontrés nous donnent la possibilité de démontrer le théorème fondamental.

Le THÉORÈME. — Si la fonction entière $g(z)$ satisfait les conditions

$$(1) \quad g(n), g'(n), g''(n), \dots, g^{(p-1)}(n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

sont des nombres entiers

$$(2) \quad |g(z)| < A e^{\alpha |z|}, \quad \alpha < p \ln \left(1 + e^{-\frac{p-1}{p}} \right)$$

alors $g(z)$ est un polynôme.

Démonstration. — Nous savons que la fonction $g(z)$ est une fonction entière et satisfait à la 2^{ème} condition de notre théorème. Donc d'après le lemme II, on peut la développer en une série des polynômes $P_{n,q}(x)$

$$(VII') \quad g(z) = \sum_{\substack{n=0 \\ q \leq p}}^{\infty} A_{n,q} P_{n,q}(z)$$

où

$$A_{n+1,q-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(x) dx}{x^p (x-1)^p \dots (x-n+1)^p (x-n)^q}.$$

En s'appuyant sur la formule (III) du § 2. on peut écrire

$$\begin{aligned} (VII) \quad A_{n+1,q-1} &= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u_{s,k}}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(x) dx}{(x-s)^k} + \sum_{k=1}^q \frac{u_{n,k}}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{g(x) dx}{(x-n)^k} = \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{u_{s,k} g^{(k-1)}(s)}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^q \frac{u_{n,k} g^{(k-1)}(n)}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Multiplions les deux parties de cette égalité par $(n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 \omega_n^{p-1}$.

Il résulte d'après le lemme II que le produit

$$\begin{aligned} (n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 A_{n+1,q-1} &= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{(n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 u_{s,k}}{(k-1)!} g^{(k-1)}(s) + \\ &+ \sum_{k=1}^q \frac{(n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 u_{n,k}}{(k-1)!} g^{(k-1)}(n) \end{aligned}$$

est un nombre entier, car $g^{(k-1)}(s)$ est un nombre entier.

Evaluons maintenant $A_{n+1, q-1}$. Prenons dans la relation (VII') comme contour d'intégration la circonférence $|x| = rn$ où $r = 1 + e^{\frac{p-1}{p}}$. Nous avons

$$|A_{n+1, q-1}| \leq \frac{c e^{\alpha r n} \Gamma^p[(r-1)n]}{\Gamma^p(rn+1)}$$

où c est une constante.

Il en résulte d'après le lemme III que

$$|(n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 A_{n+1, q-1}| \leq \frac{c' \Gamma^p(n+1) e^{(\frac{p-1}{p})n + o(n)} e^{\alpha r n} \Gamma^p[(r-1)n]}{\Gamma^p(rn+1)}.$$

En évaluant $\Gamma(n+1)$, $\Gamma(rn)$, $\Gamma[(r-1)n]$ d'après la formule de Stirling et en faisant des transformations simples nous obtenons

$$|(n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 A_{n+1, q-1}| \leq e^{[\alpha - p \ln(1 + e^{-\frac{p-1}{p}})]rn + o(n)}.$$

D'après la condition du théorème, $\alpha < p \ln(1 + e^{-\frac{p-1}{p}})$ donc

$$|(n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 A_{n+1, q-1}| = o(1).$$

Puisque ce produit est un nombre entier, à partir de $n = n_1$, nous avons

$$(n!)^p \omega_n^{p-1} (p!)^2 A_{n+1, q-1} = 0.$$

Par conséquent $A_{n+1, q-1} = 0$ pour $n \geq n_1$ et $q = 1, 2, 3, p$.

Mais la fonction $g(\chi)$ satisfait à la condition du lemme I; donc

$$g(\chi) \equiv \sum_{\substack{k=n_1-1 \\ k=0 \\ q \leq p}}^{k=n_1-1} A_{k,q} P_{k,q}(\chi)$$

ce qui démontre le théorème.

Matematica. — *Metodo generale per la costruzione delle « funzioni separate » di Fourier e delle « funzioni caratteristiche » di De La Vallée Poussin.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata dal Corrisp. G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla interpolazione segmentale e la classificazione delle funzioni poligonali.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata dal Corrispondente G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla curvatura geodetica di una superficie e sulla formula di Liouville.* Nota di E. RAIMONDI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *A proposito di semplici e rapidi procedimenti topografici.* Nota di G. BOAGA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. SOLER.

1. È noto che combinando opportunamente le osservazioni rilevate su una bilancia di torsione tipo Eötvös è possibile ricavare le derivate seconde del potenziale terrestre U nel punto stazione, rispetto tre direzioni fra loro normali x, y, z delle quali la z disposta secondo la verticale del punto stazione e diretta allo zenit, e la x secondo la direzione cardinale N-S ⁽²⁾.

Con le derivate seconde del potenziale terrestre è possibile dedurre la direzione e la intensità del gradiente gravimetrico, nonché la differenza fra le componenti verticali ed orizzontali della gravità fra due stazioni successive.

Prima di servire a questo scopo le derivate seconde del potenziale devono però essere corrette per varie influenze perturbatrici come:

a) variazione di temperatura nell'interno dello strumento durante il periodo di osservazione (correzione di temperatura) ⁽³⁾;

b) effetto delle differenze di livello nelle vicinanze dello strumento (correzione topografica) ⁽⁴⁾;

c) effetto delle elevazioni montuose che si trovano al di là dei limiti della livellazione (correzione cartografica) ⁽⁵⁾;

d) azione causata da grandi fossi, canali, case ed altre accidentalità.

In particolare per la correzione b) si eseguisce in ogni stazione una livellazione radiale, determinando con i noti procedimenti topografici le differenze di livello fra il punto stazione ed il punto dove viene poggiata sul terreno la stadia.

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) VENTURI, *Teoria della bilancia di torsione*, «R. Acc. di Lettere Scienze ed Arti di Palermo», 1908.

(3) E. SOLER, *I primi esperimenti con la bilancia di Eötvös appartenente all'Istituto di Geodesia di Padova*, «Mem. R. Istituto Veneto», vol. XXVIII, n. 8.

(4) E. SOLER, *Prima campagna gravimetrica con la bilancia nei dintorni di Padova*, «R. Commissione Geodetica Italiana», 1914.

(5) E. SOLER, *Seconda campagna gravimetrica con la bilancia nei dintorni di Padova*, «R. Commissione Geodetica Italiana», 1916.

Secondo l'Eötvös la livellazione si fa lungo otto direzioni di cui la prima coincidente col meridiano magnetico e le altre equidistanti di 45° in 45° e mettendo possibilmente la stadia successivamente a 5 m., 20 m., 50 m. e 100 m. dal punto stazione, determinando poi le eventuali differenze di livello nelle prossimità dello strumento (circa 1 m.) mediante le barre della tenda e l'opportuna livella, e a 1000 m. mediante la carta della regione al 25.000.

Per la correzione topografica l'Eötvös sino dal 1906 ha stabilito delle formule a coefficienti numerici. Altre formule per detta correzione e ottenute mediante integrazione delle formule teoriche date dall'Eötvös stesso, furono proposte dall'Ansel e pubblicate nel 1927 ⁽¹⁾.

In una Nota poi, inserita in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ il dott. A. Belluigi espone alcune formule di riduzione topografica, ritrovate con criteri diversi dai precedenti.

Egli non considera in un primo tempo l'altezza baricentrica H dello strumento, sicchè le formule teoriche date dall'Eötvös per tale correzione:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta U_{x\zeta} = 3 K \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \int_0^\zeta \frac{\rho^2 (H - \zeta) \cos \alpha d\alpha d\rho d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (H - \zeta)^2}^5} \\ \Delta U_{y\zeta} = 3 K \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \int_0^\zeta \frac{\rho^2 (H - \zeta) \sin \alpha d\alpha d\rho d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (H - \zeta)^2}^5} \end{cases}$$

ove K è la costante di gravitazione e σ la densità media superficiale, si semplificano alquanto.

Inoltre egli considera un settore di corona circolare di ampiezza $\alpha_h - \alpha_{h-1}$ individuata dai raggi ρ_h e ρ_{h+1} e limita la integrazione delle (1) in detto intervallo considerando la ζ costante in tutto l'intervallo e variabile da intervallo ad intervallo. Si trova così il contributo portato da un settore di corona circolare ed addizionando i contributi riferentesi ai settori ed alle varie corone si determina la correzione complessiva da apportare alle derivate seconde del potenziale.

Eseguendo la integrazione delle (1) semplificate secondo i detti criteri, indicheremo nel seguito la sommatoria relativa ai settori appartenenti alla stessa corona con l'indice h e la sommatoria relativa ai settori compresi fra due direzioni successive con l'indice k .

(1) R. EÖTVÖS, *Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwaage*, Budapest, 1906; E. A. ANSEL, *Geophysikalische Aufschliessungsmethoden* in « Lehrbuch der Geophysik », 1927, p. 538.

(2) A. BELLUIGI, *Semplici e rapidi procedimenti di correzione topografica*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 8, vol. IX, 1929, p. 646.

Per quanto esposto la prima delle (1) assume la forma:

$$(2) \quad \Delta U_{x\chi} = -3 K \sigma \sum_b \int_{\alpha_{b-1}}^{\alpha_b} A_1 \cdot \cos \alpha d\alpha$$

dove A_1 è l'integrale doppio rispetto ρ e χ messo in evidenza nelle (1) ed esteso alle varie corone in cui è suddivisa la regione circostante lo strumento.

Indicando con χ_b la χ costante nell'intervallo $(\alpha_b - \alpha_{b-1})$, $(\rho_{k+1} - \rho_k)$ ed eseguendo la doppia integrazione, siamo pervenuti per A_1 alla espressione:

$$(3) \quad A_1 = \sum_k \left\{ \frac{\rho}{3(\rho^2 + \chi_b^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \log_e \frac{\rho^2 + \rho \sqrt{\rho^2 + \chi_b^2}}{\chi_b} \right\}_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}$$

che può essere posta sotto la forma:

$$A_1 = \sum_k \left\{ \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\chi_b^2}{\rho^2} \right)^{-1/2} - \frac{1}{3} \log \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\chi_b^2}{\rho^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \log \chi_b - \frac{1}{3} \log \rho^2 \right\}_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}$$

od anche con opportuni sviluppi in serie, tenendo presente che $\frac{\chi_b}{\rho} < 1$ ed arrestando gli sviluppi stessi ai termini di secondo grado in $\frac{\chi}{\rho}$

$$A_1 = \sum_k \left\{ \frac{1}{3} (1 - \log 2 + \log \chi_b) - \frac{2}{3} \log \rho - \frac{1}{4} \frac{\chi_b^2}{\rho^2} \right\}_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}$$

ossia:

$$(3') \quad A_1 = \frac{1}{4} \sum_k \left\{ \chi_b^2 \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right) + Q_k \right\}$$

ove Q_k è una quantità costante per ogni corona circolare e indipendente da χ_b .

Suddividendo la zona intorno allo strumento in 8 parti eguali, con direzioni uscenti dal punto stazione, ed eseguendo la integrazione rispetto ad α , la (2) tenuto conto della (3'), si trasforma nella:

$$\Delta U_{x\chi} = +3 K \sigma \sum_b^8 \left\{ (\sin(b-1) \frac{\pi}{2} - \sin b \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{1}{4} \sum_k \left\{ \chi_b^2 \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right) + Q_k \right\} \right\}$$

e staccando il secondo membro in due parti:

$$\Delta U_{x\zeta} = \frac{3}{4} K\sigma \sum_k \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right) \sum_{i=1}^8 \zeta_b^2 \left\{ \sin(b-1) \frac{\pi}{2} - \sin b \frac{\pi}{2} \right\} + \\ + 3 K\sigma \sum_k Q_k \sum_{i=1}^8 \left\{ \sin(b-1) \frac{\pi}{2} - \sin b \frac{\pi}{2} \right\};$$

epperò, il contributo della seconda parte è nullo, cosicchè svolgendo la sommatoria rispetto ad b nella prima parte del secondo membro e raccogliendo i fattori comuni si perviene alla formula:

$$(4) \quad \Delta U_{x\zeta} = \sum_k \left\{ c_k [(\zeta_1^2 + \zeta_8^2) - (\zeta_4^2 + \zeta_5^2)] + c'_k [(\zeta_2^2 + \zeta_7^2) - (\zeta_3^2 + \zeta_6^2)] \right\}$$

con c_k e c'_k variabili da corona a corona e definiti dalle:

$$(5) \quad c_k = -\frac{3\sqrt{2}}{8} K\sigma \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right) \quad c'_k = -\frac{3(2-\sqrt{2})}{8} K\sigma \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right).$$

Sull'argomento dobbiamo notare, che svolgendo in serie invece della nostra la A_1 trovata dal Belluigi:

$$A_1 = \sum \left\{ \ln \rho \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\rho^2}} \right) - \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\rho^2}} \right)^{-1} \right\}_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}$$

e ripetendo *identici calcoli*, si arriva ad una formula del tipo (4), però i coefficienti (5) c_k e c'_k risultano eguali a $3/2$ di quelli da noi ricavati.

2. Le formule dianzi ricavate, come già è stato detto, sono utilizzabili solo quando l'azione dell'altezza baricentrica della bilancia è trascurabile. Fino almeno dove si giunge con la livellazione radiale tale azione non è trascurabile; pertanto, per la correzione topografica si dovrà necessariamente ricorrere alle formule primitive (1) dell'Eötvös.

Trascurando in questa seconda ricerca ζ rispetto a ρ ed H , come fanno i vari autori, potremo porre:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (H - \zeta)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + H^2}}$$

ed eseguendo la doppia integrazione rispetto a ζ e ρ , seguendo ancora i criteri di cui sopra, si ha per tutte le corone circolari circostanti il punto stazione:

$$(6) \quad \Delta U_{x\zeta} = 3 K\sigma \sum_k \left[\frac{\rho^3}{3 H^2 (H^2 + \rho^2)^{3/2}} \right]_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \sum_{i=1}^8 \zeta_b^2 \left(H - \frac{\zeta_b}{2} \right) \left\{ \sin b \frac{\pi}{2} - \sin(b-1) \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Ora mediante sviluppo in serie e con la solita limitazione:

$$\left[\frac{\rho^3}{3 H^2 (H^2 + \rho^2)^{3/2}} \right]_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right) + \dots$$

e la (6) diviene:

$$(7) \quad \Delta U_{xz} = \sum_k \left\{ c'_k [(\chi_1 + \chi_8) - (\chi_4 + \chi_5)] + c''_k [(\chi_2 + \chi_7) - (\chi_3 + \chi_6)] + \right. \\ \left. + c'''_k [(\chi_1^2 + \chi_8^2) - (\chi_4^2 + \chi_5^2)] + c^{IV}_k [(\chi_2^2 + \chi_7^2) - (\chi_3^2 + \chi_6^2)] \right\}$$

essendo:

$$c'_k = \frac{3\sqrt{2} K \sigma}{4} H \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right) \quad c''_k = \frac{3(2 - \sqrt{2}) K \sigma}{4} H \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho_{k+1}^2} \right) \\ c'''_k = -\frac{1}{2} c'_k \quad c^{IV}_k = -\frac{1}{2} c''_k.$$

Adoperando anche in questo caso la formula data dal Belluigi i precedenti coefficienti c risultano moltiplicati per $3/2$.

Suddividendo la regione circostante il punto stazione in corone circolari con cerchi di raggi $\rho_1 = 100$ cm., $\rho_2 = 500$ cm., $\rho_3 = 2000$ cm., $\rho_4 = 5000$ cm., $\rho_5 = 10000$ cm. e $\rho_6 = 100.000$ cm., assumendo per K e σ rispettivamente i valori $66.3 \cdot 10^{-9}$ e 1.8 (1), e ponendo come lo Eötvös $H = 100$ cm., la formula (7) si trasforma nella seguente atta per il calcolo

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} (\Delta U_{xz}) \cdot 10^9 = & \{ 1.214976 (\chi_1 - \chi_4 - \chi_5 + \chi_8) + 0.503519 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_6 + \chi_7) \} \text{ cor. cir. } \rho_1 \rho_2 \\ & + \{ 0.047586 (\chi_1 - \chi_4 - \chi_5 + \chi_8) + 0.019721 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_6 + \chi_7) \} \text{ » » } \rho_2 \rho_3 \\ & + \{ 0.002657 (\chi_1 - \chi_4 - \chi_5 + \chi_8) + 0.001101 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_6 + \chi_7) \} \text{ » » } \rho_3 \rho_4 \\ & + \{ 0.000379 (\chi_1 - \chi_4 - \chi_5 + \chi_8) + 0.000157 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_6 + \chi_7) \} \text{ » » } \rho_4 \rho_5 \\ & + \{ 0.000125 (\chi_1 - \chi_4 - \chi_5 + \chi_8) + 0.000051 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_6 + \chi_7) \} \text{ » » } \rho_5 \rho_6 \\ & - \{ 0.00607488 (\chi_1^2 - \chi_4^2 - \chi_5^2 + \chi_8^2) + 0.00251760 (\chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_6^2 + \chi_7^2) \} \text{ » » } \rho_1 \rho_2 \\ & - \{ 0.00023793 (\chi_1^2 - \chi_4^2 - \chi_5^2 + \chi_8^2) + 0.00009861 (\chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_6^2 + \chi_7^2) \} \text{ » » } \rho_2 \rho_3. \end{aligned} \right\}$$

Similmente per la seconda derivata si trova:

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} (\Delta U_{yz}) \cdot 10^9 = & \{ 0.503519 (\chi_1 + \chi_4 - \chi_5 - \chi_8) + 1.214976 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_6 - \chi_7) \} \text{ cor. cir. } \rho_1 \rho_2 \\ & + \{ 0.019721 (\chi_1 + \chi_4 - \chi_5 - \chi_8) + 0.047586 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_6 - \chi_7) \} \text{ » » } \rho_2 \rho_3 \\ & + \{ 0.001101 (\chi_1 + \chi_4 - \chi_5 - \chi_8) + 0.002657 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_6 - \chi_7) \} \text{ » » } \rho_3 \rho_4 \\ & + \{ 0.000157 (\chi_1 + \chi_4 - \chi_5 - \chi_8) + 0.000379 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_6 - \chi_7) \} \text{ » » } \rho_4 \rho_5 \\ & + \{ 0.000051 (\chi_1 + \chi_4 - \chi_5 - \chi_8) + 0.000125 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_6 - \chi_7) \} \text{ » » } \rho_5 \rho_6 \\ & - \{ 0.00251760 (\chi_1^2 + \chi_4^2 - \chi_5^2 - \chi_8^2) + 0.00607488 (\chi_2^2 + \chi_3^2 - \chi_6^2 - \chi_7^2) \} \text{ » » } \rho_1 \rho_2 \\ & - \{ 0.00009861 (\chi_1^2 + \chi_4^2 - \chi_5^2 - \chi_8^2) + 0.00023793 (\chi_2^2 + \chi_3^2 - \chi_6^2 - \chi_7^2) \} \text{ » » } \rho_2 \rho_3. \end{aligned} \right\}$$

(1) Se la densità σ del terreno circostante il punto stazione è maggiore di 1.8, si moltiplicano i risultati ottenuti per il rapporto $\sigma: 1.8$.

Le corrispondenti formule dell'Eötvös sono (1):

$$\begin{aligned}
 (\Delta U_{x_7}) \cdot 10^9 = & \{ 0.13040 \quad (\alpha_1 - \alpha_5) + 0.09225 \quad (\alpha_2 + \alpha_8 - \alpha_4 - \alpha_5) \}_{\rho=5^m} \\
 & + \{ 0.01173 \quad (\alpha_1 - \alpha_5) + 0.00831 \quad (\alpha_2 + \alpha_8 - \alpha_4 - \alpha_5) \}_{\rho=20^m} \\
 & + \{ 0.00108 \quad (\alpha_1 - \alpha_5) + 0.00077 \quad (\alpha_2 + \alpha_8 - \alpha_4 - \alpha_5) \}_{\rho=50^m} \\
 & + \{ 0.00028 \quad (\alpha_1 - \alpha_5) + 0.00020 \quad (\alpha_2 + \alpha_8 - \alpha_4 - \alpha_5) \}_{\rho=100^m} \\
 & - \{ 0.000015 \quad (\alpha_1 - \alpha_5) + 0.000010 \quad (\alpha_2 + \alpha_8 - \alpha_4 - \alpha_5) \}_{\rho=1000^m} \\
 & - \{ 0.001747 \quad (\alpha_5^2 - \alpha_1^2) + 0.001235 \quad (\alpha_4^2 + \alpha_6^2 - \alpha_2^2 - \alpha_8^2) + 0.001300 (\alpha_4 \alpha_5 + \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_8 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2) \\
 & \quad + 0.000538 \quad (\alpha_3 \alpha_4 + \alpha_6 \alpha_7 - \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_7 \alpha_8) \}_{\rho=5^m}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta U_{x_7}) \cdot 10^9 = & \{ 0.13046 \quad (\alpha_3 - \alpha_7) + 0.09225 \quad (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_8) \}_{\rho=5^m} \\
 & + \{ 0.01173 \quad (\alpha_3 - \alpha_7) + 0.00831 \quad (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_8) \}_{\rho=20^m} \\
 & + \{ 0.00108 \quad (\alpha_3 - \alpha_7) + 0.00077 \quad (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_8) \}_{\rho=50^m} \\
 & + \{ 0.00028 \quad (\alpha_3 - \alpha_7) + 0.00020 \quad (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_8) \}_{\rho=100^m} \\
 & + \{ -0.000015 \quad (\alpha_3 - \alpha_7) - 0.000010 \quad (\alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_8) \}_{\rho=1000^m} \\
 & + \{ 0.001747 \quad (\alpha_7^2 - \alpha_3^2) + 0.001235 \quad (\alpha_6^2 + \alpha_8^2 - \alpha_4^2 - \alpha_2^2) + 0.001300 (\alpha_6 \alpha_7 + \alpha_7 \alpha_8 - \alpha_2 \alpha_8 - \alpha_3 \alpha_4) \\
 & \quad + 0.000538 \quad (\alpha_5 \alpha_6 + \alpha_8 \alpha_1 - \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_2) \}_{\rho=5^m}.
 \end{aligned}$$

Nelle formule precedenti dell'Eötvös, come in quelle da noi ricavate, non sono riportati i termini relativi alla livellazione eseguita nelle vicinanze dello strumento perchè si ha cura di spianare il terreno circostante il punto stazione, prima di mettere la tenda, e per un raggio di circa 2 m.

I quadrati ed i prodotti delle α che entrano nelle ultime righe delle formule dell'Eötvös danno contributi pressochè nulli per terreni anche abbastanza movimentati a causa della piccolezza dei coefficienti. Non possiamo così dire per le formule (8), (9) riguardo i termini relativi alla prima corona circolare.

3. Per provare numericamente le formule precedenti ci siamo valse delle livellazioni radiali eseguite nelle 33 stazioni della campagna gravimetrica con la bilancia fatta nell'estate 1928 dall'Istituto di Geodesia di Padova, nella regione boracifera di Larderello fra Montecerboli, Buca di Paladino e Lustignano, Montecerboli per Serrazzano.

Le derivate seconde del potenziale corrette per l'effetto topografico adoperando le (8), (9) e le formule dell'Eötvös, sono state riferite con le consuete formule al meridiano astronomico assumendo per declinazione magnetica media della regione battuta il valore $6^\circ 52'$.

Con i valori così ricavati sono stati calcolati i valori della intensità ed azimut del gradiente gravimetrico in ogni stazione, e la differenza di gravità fra le stazioni successive.

(1) Cfr. Eötvös, Opera citata.

Dall'esame dei valori ottenuti abbiamo notato che la correzione topografica calcolata con le formule ottenute seguendo i criteri esposti sono sempre maggiori dei corrispondenti ottenuti con le formule dell'Eötvös.

Questa diversità muta alquanto la direzione e l'intensità del gradiente gravimetrico.

Riguardo alle differenze di gravità ottenute con i valori delle derivate seconde corrette con le (8), (9) abbiamo riassuntivamente:

$$\text{Montecerboli-Buca di Paladino } \Delta g = + 0^{\text{cm}}.011$$

$$\text{Lustignano-Montecerboli } \Delta g = - 0^{\text{cm}}.003$$

mentre quelle ottenute adoperando per la correzione topografica le formule dell'Eötvös sono rispettivamente, $\Delta g = + 0^{\text{cm}}.013$ e $\Delta g = - 0^{\text{cm}}.005$.

Dalle osservazioni pendolari eseguite appositamente per controllo a Montecerboli, Buca di Paladino e Lustignano dal prof. Cicconetti e ridotte ad una stessa superficie di livello si hanno:

$$\text{Montecerboli-Buca di Paladino } \Delta g = + 0^{\text{cm}}.012$$

$$\text{Lustignano-Montecerboli } \Delta g = - 0^{\text{cm}}.005.$$

Le nuove formule dunque, mentre mutano sensibilmente la intensità e la direzione del gradiente gravimetrico rispetto a quello dell'Eötvös, non danno vantaggi rispetto alle medesime nei confronti pendolari; quindi nel caso esaminato le formule dell'Eötvös si debbono ritenere preferibili. Esse in ogni caso presentano, come si vede facilmente, una maggior convenienza calcolativa.

Osserviamo ancora che le formule dell'Eötvös per la correzione topografica, applicate alle derivate seconde del potenziale nelle varie stazioni delle campagne con la Bilancia eseguite in Italia dal prof. Soler, in Spagna dal dott. Sans ed in Ungheria dallo stesso Eötvös, hanno dato per le differenze gravimetriche risultati quasi identici a quelli pendolari.

Attendiamo del resto conoscere dal Belluigi la applicazione numerica delle formule (8) e (9) alle 3000 stazioni eseguite ed i relativi confronti pendolari, per giudicare, se in altri casi si perviene, nei detti confronti, ad una approssimazione maggiore che con le formule dell'Eötvös.

Metereologia. — *Sopra le temperature minime a differenti piccole altezze sul suolo.* Nota di N. PASSERINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio B. LONGO.

È frequente il caso che mentre sotto la capanna dell'Osservatorio la temperatura minima risulta superiore a 0°, nelle adiacenze si formi brina in abbondanza o anche si congeli l'acqua. Ciò è sufficientemente spiegato dall'essere, i termometri sotto la capanna, dalla tettoia protetti dalla irradiazione notturna. Ma varii fatti dimostrano che altre cause possono concorrervi, e segnatamente la differente altezza dal suolo. Che presso la superficie del terreno l'aria, durante la notte, si raffreddi di più che a una certa altezza è cosa notoria, e non mancano osservazioni in proposito.

Abbiamo pertanto creduto opportuno di seguire per un certo tempo l'andamento delle minime a piccole quote, comprese fra m. 0.05 e m. 2, e a tale uopo, in prossimità della capanna dell'Osservatorio meteorologico di Pisa, venne stabilmente fissata un'asta verticale portante a differenti quote (m. 0.05; 0.25; 0.50; 1 e m. 2) delle piccole tettoie inclinate, in legno, sotto a ciascuna delle quali era collocato orizzontalmente un termometro a minima tipo Alvergnet. Asta e tettoie erano verniciate a biacca e distavano dal termometro a minima della capanna di m. 10.70.

Il termometro più basso fu disposto a lieve altezza (m. 0.05) anzichè sulla superficie del suolo per ragioni ovvie. Nel secondo caso la temperatura sarebbe stata facilmente influenzata dal contatto col terreno, dalle piogge abbondanti, dal menomo accrescersi dell'erba ecc.

Le osservazioni continuarono dal 1° giugno 1924 al 30 giugno 1927, ossia 37 mesi. Solo un giorno, il 25 agosto 1925, mancarono, cosicchè durarono 1124 giorni.

Da queste osservazioni possono trarsi le deduzioni seguenti ⁽²⁾:

1. Fatte rare eccezioni, tra le quote 0.05 e 2 metri la temperatura minima nelle 24 ore aumenta coll'altezza.

La differenza fra le quote estreme può in alcuni casi superare 3°, e in un caso (3 gennaio 1925) raggiunse 4,5°.

2. Senza che il valore della *diminuzione* tra le quote 2 e 0.05 segua un andamento regolare, pure nel maggior numero dei casi diminuisce coll'altezza; ossia fra 0.05 e 1 metro è più notevole che tra m. 1 e 2.

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) Il lavoro sarà pubblicato per esteso nel « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa ». Annata 1929.

3. In generale il maggior numero di giorni con differenze di 2° o maggiori fra le due quote estreme si verificò nel periodo febbraio-aprile.

Nel triennio luglio 1924 - giugno 1927 la differenza fra le due minime fu di 2° o maggiore:

nel quadrimestre	novembre-febbraio	in giorni	40
»	»	marzo-giugno	» » 69
»	»	luglio-ottobre	» » 24

Il *minimum* cadde quindi nel quadrimestre luglio-ottobre.

4. Differenze non maggiori di 0°.2 e talora negative si ebbero prevalentemente nei mesi di gennaio e dicembre, con calma assoluta o con venti deboli specialmente di S e con cielo spesso coperto. Le differenze negative si verificarono in prevalenza in giorni con pioggia (tra le 21 del giorno precedente e le 9 h di quello di osservazione).

5. In alcuni giorni la minima a m. 0.25 risultò sensibilmente inferiore a quella a m. 0.05. La media mensile però segue un andamento regolare, con graduale aumento da 0.05 a 2 m., fatte poche eccezioni. All'inizio delle osservazioni (mesi di giugno, luglio e agosto 1914) la minima media a 0.05 risultò sensibilmente superiore a quella a 0.25; ciò che, data la continuità del fatto, potrebbe anche esser dovuto all'essere uno dei due termometri non esattamente corretto. Lo stesso peraltro avvenne nel gennaio 1925. Le differenze furono tuttavia lievissime (tra 0.07 e 0.22).

Altre leggerissime irregolarità si riscontrano fra talune delle altre quote nei mesi di dicembre 1925, gennaio e febbraio 1926, febbraio e marzo 1927.

6. La massima differenza nelle medie mensili tra le quote estreme, si è, nel triennio, costantemente verificata nel marzo e nell'aprile.

7. Per quanto si constati una prevalenza di alte *pressioni* atmosferiche nei giorni di notevoli differenze fra le due minime, pure dall'insieme delle osservazioni non apparisce che quell'elemento abbia avuto una decisa influenza. Infatti si sono avute differenze appena sensibili e anche negative con pressione elevata (fino a mm. 772, 4).

8. Sebbene fosse da aspettarsi che con *vento* alquanto veloce o forte, la differenza tra le minime fosse poco sensibile, pure è risultato che nei 68 giorni in cui la velocità media del vento, tra le 21 h del giorno precedente e le 9 h del giorno di osservazione, fu di km. 10 all'ora o maggiore (fino a km. 28), la differenza medesima, tra le quote 0.05 e 2 metri, risultò in generale piuttosto notevole. Infatti in un solo giorno fu = 0; in 23 giorni oscillò fra 0.1 e 0.9; in 36 giorni fra 1.0 e 1.9 e in 8 giorni fra 2.0' e 3.1.

Nei tre giorni (24 dicembre 1925, 15 giugno e 24 ottobre 1926) nei quali la velocità oraria raggiunse rispettivamente km. 27, 21 e 28, la differenza fra le due quote suddette risultò di 1.2; 0.8; 0.8. Ciò potrebbe forse dipendere dal calmarsi o del cessare del vento anche per un periodo di tempo non lungo durante le ore notturne.

La differenza fra le minime alle quote 0.05 e 2 metri fu maggiore di 2°:

con vento di N	in 23 giorni
» » » E	» 30 »
» » » S	» 24 »
» » » W	» 25 »
con calma costante	» 31 »

E la differenza risultò di 3° o maggiore:

con vento di N	in 5 giorni
» » » E	» 6 »
» » » S	» 2 »
» » » W	» 1 »
con calma	» 1 »
	<hr/> 15

quindi prevalentemente con venti del 1° e 2° quadrante, deboli o moderati (velocità media non superiore a km. 11).

Nei 15 giorni suddetti il cielo fu:

sereno o quasi sereno in 10 giorni

prevalentemente coperto in 5 giorni

9. Le minime differenze fra le due minime si ebbero con *umidità relativa* più elevata. Infatti, per i 37 giorni in cui la differenza fu solo di 0.2 o meno, la media umidità risultò di 81; mentre fu di 73 per i 133 giorni in cui la differenza salì a 2 e più.

La *tensione del vapore* (umidità assoluta) non sembra esercitare una influenza notevole; il valore medio risultò di mm. 7.1 per le differenze di 0.2 o meno, e di mm. 8.4 per quelle di 2 o più.

10. Le differenze notevoli tra la minima delle due quote estreme talora si manifestano in giorni isolati, ma spesso si verificano per più giorni di seguito, per il perdurare delle condizioni meteoriche, dando luogo a delle serie anche di cinque, sei e più giorni.

Fisica. — *Le variazioni del policroismo cristallino sotto l'azione del campo magnetico.* Nota di RITA BRUNETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

I. Nel numero di settembre 1929 del «Journal de Physique et le Radium», qui pervenuto nell'ottobre, il sig. Jean Becquerel espone una interpretazione delle azioni da campo magnetico sopra le righe assorbite da cristalli di terre rare la quale coincide coi risultati da noi pubblicati fin dal principio del 1928 trattando del policroismo dei cristalli di terre rare e con altri da noi riuniti in una breve comunicazione alla Società italiana per il Progresso delle Scienze il 21 settembre 1929.

Di questi ultimi daremo qui solo un breve riassunto, invece ci dilungheremo piuttosto in una esposizione dalla quale risulterà certo in modo indubbio: 1° che l'idea fondamentale da cui è partito il lavoro testè citato del Becquerel è espressa chiaramente sia nel primo che nel secondo dei nostri lavori pubblicati entro il 1928 sugli spettri d'assorbimento degli joni delle terre rare in composto chimico; 2° che questo studio pei lavori da noi pubblicati o in corso di pubblicazione è in uno stato di maggiore sviluppo di quello che non appaia dalla nota del sig. Becquerel.

Non è una polemica che proponiamo, ma una semplice constatazione di fatti. Tanto più che il consenso del sig. Becquerel ci è molto gradito. Infatti esso, per la indiscussa autorità che J. Becquerel ha acquisito in più di vent'anni di ricerche sperimentali sulle variazioni degli spettri d'assorbimento delle terre rare per azione termica e magnetica, torna certo a vantaggio delle nostre vedute sull'argomento.

2. Nel lavoro *Policroismo e orientazione degli joni nei cristalli di terre rare* pubblicato su questi «Rendiconti» (febbraio 1928) e sul «Physikalische Zeitschrift» (agosto 1928) veniva affermato quanto segue:

a) negli spettri d'assorbimento degli joni di terre rare in composto chimico cristallino dotato di un asse di simmetria si notano: 1° frequenze corrispondenti a vibrazioni lineari parallele alla direzione dell'asse cristallografico principale; 2° frequenze in generale distinte dalle precedenti le cui vibrazioni hanno luogo nel piano ortogonale all'asse del cristallo e in esso sono scomponibili in due vibrazioni lineari spesso di eguale intensità normali fra loro (p. 241 ⁽²⁾, risultato dedotto dalle vecchie osservazioni del

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) La citazione della pagina si riferisce alla nota pubblicata su questi «Rendiconti».

policroismo di Henri Becquerel e da osservazioni personali su materiale chimicamente puro);

b) questo ci induce ad associare allo jone nel cristallo un numero quantico x , le cui variazioni $\Delta x = 0$ corrispondono alle radiazioni polarizzate linearmente, mentre le variazioni $\Delta x = \pm 1$ corrispondono alle radiazioni con vettore vibrante nel piano ortogonale all'asse cristallografico di riferimento (p. 244). In tal modo naturalmente queste radiazioni vengono supposte polarizzate circolarmente nel piano considerato;

c) poichè questa polarizzazione circolare non si può mettere in evidenza direttamente, è naturale pensare che le righe considerate comprendano in sè una radiazione circolare destrogira e una levogira; cioè che in esse si sovrappongano i passaggi $x \rightarrow (x - 1)$ e $-x \rightarrow -(x - 1)$ così come avviene per le componenti ortogonali quando la radiazione di un atomo o di uno jone viene scissa in un campo elettrico uniforme o simmetrico rispetto a un asse. *Una prova di questo si può dedurre dalle osservazioni di Jean Becquerel condotte su cristalli uniassici disposti con l'asse parallelo alla direzione delle linee di forza di un campo magnetico* (p. 242). Infatti in questo caso le radiazioni che vibrano nel piano ortogonale all'asse cristallografico, anche per osservazione trasversale al campo, appaiono scisse in un semplice doppietto simmetrico di vibrazioni circolari, una destrogira e una levogira. Tutto avviene cioè come se la radiazione originale fosse dovuta a due oscillatori circolari a egual frequenza uno destrogiro e uno levogiro (p. 243);

d) il numero quantico x corrisponde quindi molto probabilmente a un vettore di campo (p. 244) ed è indice di una orientazione dello jone rispetto ai campi intramolecolari, che (p. 238) si può mettere in evidenza tutte le volte che essi conservano una disposizione semplice rispetto alla struttura cristallina del composto.

In questo modo il policroismo cristallino completa ed estende le cognizioni acquisite circa la disposizione degli joni nel reticolo cristallino per mezzo dell'analisi coi raggi X. Questi impegnano solo la parte dell'atomo più interna ad esso e però non possono dire nulla sulla orientazione dei vettori connessi con la configurazione elettronica superficiale, da cui dipendono le caratteristiche ottiche dello jone.

Nel lavoro successivo, pubblicato sul « Nuovo Cimento » nel dicembre 1928, in seguito a confronto di spettri d'assorbimento di composti di praseodimio in diversi stati termici e di aggregazione, i concetti fondamentali della nota precedente venivano ribaditi con le conclusioni seguenti:

a) le bande d'assorbimento delle soluzioni e i multipletti a elementi polarizzati dei cristalli indicano la posizione media delle radiazioni che lo jone presente è capace di assorbire quando si trova legato in composto chimico (p. 392). Queste radiazioni saranno in generale diverse da quelle che è capace di assorbire lo jone stesso quando si trova allo stato libero (p. 392);

b) il legame chimico, oltre che nell'alterare la natura delle radiazioni assorbibili, interviene nell'alterare gli stati quantici dello jone perchè li scinde in elementi di origine elettrica (p. 392);

c) quindi il vettore jonico di orientamento rispetto all'asse cristallografico è certo un vettore di campo (p. 391), e il numero quantico x è da identificare con un numero m , che prende i valori possibili o in campo elettrico debole o in campo elettrico forte (non è naturalmente escluso il caso intermedio);

* d) in ogni modo « l'introduzione di un cristallo in un campo magnetico non può dar luogo a effetti spettroscopici che ricadono sotto le leggi note per i livelli ottici degli atomi o joni allo stato naturale. I risultati delle esperienze di J. Becquerel e di H. Du Bois e G. Elias si possono piuttosto interpretare come originati da sovrapposizione o incrocio di un campo magnetico, quello applicato, a un campo elettrico, quello di origine intramolecolare » (p. 393).

A questo punto crediamo che la prima parte della dimostrazione che ci siamo proposta sia ormai raggiunta. Infatti, per non entrare in altri particolari, ci limitiamo a citare la parte sostanziale del sommario che precede il lavoro del Becquerel: « L'absence de décompositions complexes, quand le champ magnétique est soit parallèle soit normal à l'axe optique, s'interprète en supposant, que les bandes sont déjà initialment décomposées par un champ électrique interne. De plus les phénomènes observés quand on fait varier l'orientation du champ magnétique par rapport à l'axe optique paraissent caractéristiques de l'influence simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique dans leur diverses orientation relatives ».

3. Ci proponiamo ora esporre il cammino che ulteriormente abbiamo seguito nello studio degli spettri d'assorbimento dei cristalli di terre rare i cui risultati sono contenuti in lavori già pubblicati o che sono in via di pubblicazione. Per precisare la natura del numero quantico di campo m occorre stabilire se il campo intramolecolare, che domina gli joni di terre rare, è del tipo *debole* o del tipo *forte*.

Il valore della suscettività magnetica di questi joni in generale e in particolare una ricerca eseguita allo scopo di accertare per via magnetica se lo jone Ce''' , è eccitabile sotto l'azione della temperatura ⁽¹⁾ dimostrano che, a differenza di quanto avviene presso gli joni del gruppo del ferro ⁽²⁾, gli joni delle terre rare conservano in composto chimico i loro livelli fondamentali scissi in sottolivelli a diverso numero quantico interno. Il campo elettrico intramolecolare in questo caso cioè rispetta il legame fra i vettori propri della rotazione e del moto orbitale degli elettroni ottici e si comporta quindi come un *campo debole*. Il numero quantico x deve dunque prendere i valori da j a $-j$, se j è il numero quantico interno di uno stato (fondamentale o eccitato) dello jone che si considera.

(1) « Nuovo Cimento », a. VI, n. 3, marzo 1929.

(2) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. IX, ser. VI, p. 754, maggio 1929.

Una ulteriore prova della opportunità di classificare il campo intramolecolare, che domina gli joni nei composti di terre rare, come del tipo debole, risulta dall'esame delle alterazioni che subisce il policroismo cristallino e in generale lo spettro d'assorbimento di un composto di terra rara per azione termica o chimica⁽¹⁾. Gli spostamenti di radiazioni che seguono il raffreddamento di un cristallo e quelli che si manifestano nei gruppi di righe omologhi in cristalli a uguale struttura possono infatti essere giustificati da un effetto quadratico inerente alle variazioni di intensità determinate dalle variazioni delle distanze reticolari. Tutto questo è esposto nel lavoro citato insieme col risultato di una prova eseguita allo scopo di ottenere spostamento di bande delle terre rare per azione di un campo elettrico applicato dall'esterno.

4. La questione che ulteriormente preoccupava chi scrive era quella di trovare il modo di identificare le radiazioni delle terre rare a partire dalla loro figura di scissione in diversi cristalli. Due apparivano le vie aperte a raggiungere questo scopo:

1° lo studio dell'intensità relative delle componenti polarizzate dei multipletti;

2° quello dell'azione magnetica su tali componenti.

Sul primo punto è stato possibile anticipare fin dal settembre di questo anno⁽²⁾ che: la somma delle intensità d'assorbimento delle componenti parallele all'asse cristallografico di un medesimo multipletto è in *certe condizioni* eguale alla somma delle intensità d'assorbimento delle componenti polarizzate nella direzione ortogonale (esame del cristallo nella direzione trasversale all'asse di simmetria).

Questa legge è la stessa che vale per la somma delle intensità delle componenti parallele e ortogonali di una riga scissa in campo magnetico e quindi anche in campo elettrico dello stesso tipo. Essa permette di isolare le radiazioni polarizzate assorbite da un cristallo che provengono da una medesima variazione del numero quantico interno, $j \rightarrow j'$.

I primi risultati ottenuti in questo senso confermano dunque l'interpretazione già data in un lavoro precedente dei multipletti che presentano i cristalli di terre rare e le righe larghe e sfumate delle soluzioni come componenti da scissione elettrica di una radiazione dello jone.

Un limite allo sfruttamento di questo metodo per il riconoscimento delle singole componenti dei multipletti corrispondenti a un determinato passaggio $j \rightarrow j'$ può essere posto dalle condizioni stesse del cristallo o dalla natura non perfettamente definita del campo intramolecolare.

Il fondamento della classificazione delle radiazioni di un atomo o jone allo stato libero è precisamente la sua scissione in un campo magnetico

(1) R. BRUNETTI e Z. OLLANO, «Nuovo Cimento», in corso di stampa, fascicolo di dicembre 1929.

(2) Comunicazione alla Società per il Progresso delle Scienze (21 settembre 1929).

del tipo debole. L'uso di un campo magnetico nel caso delle radiazioni degli ioni delle terre rare non si crede tuttavia possa riuscire egualmente efficace se non in casi particolari ⁽¹⁾. Infatti qui l'azione del campo magnetico è complicata dal fatto che le radiazioni sono assorbite da uno jone già perturbato da un campo elettrico. E la teoria dell'azione di un campo magnetico sovrapposto o incrociato a un campo elettrico uniforme o non uniforme è troppo poco sviluppata oggi per essere in grado di dare indicazioni all'esperienza molto più larghe di quelle a cui abbiamo accennato fin dal nostro primo lavoro (scissione in doppietti a causa della sovrapposizione di passaggi determinati).

I casi particolari che invece appaiono di maggiore utilità immediata e su cui avevamo fermato recentemente la nostra attenzione sono i seguenti:

1° alcune radiazioni ortogonali all'asse del cristallo e del campo magnetico non presentano scissione in componenti a diversa frequenza;

2° altre radiazioni si scindono in doppietti in cui la componente a maggior frequenza è polarizzata nel senso contrario a quello della corrente magnetizzante anzichè nello stesso senso.

Questi comportamenti delle radiazioni delle terre rare apparentemente irregolari rientrano nei casi limiti dell'effetto Zeeman anormale elencati da Back e Landé nel noto libro *Zeeman Effekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien* (p. 176) e corrispondono alla condizione $mg - m'g' \approx 0$, ove g e g' sono i fattori di separazione pei livelli considerati ed m, m' i numeri quantici di campo.

Tali casi limiti non si sono mai incontrati negli spettri di atomi o ioni gassosi. Ma la singolarità dei livelli che accompagnano gli ioni delle terre rare può certamente realizzare queste condizioni eccezionali.

Abbiamo classificato il campo intramolecolare come del tipo debole senza però escludere che esso sia un campo intermedio fra i due casi estremi che considera la spettroscopia. In tal caso potrebbe darsi che alcune radiazioni in origine non sovrapposte siano divenute tali nel cristallo a causa del valore del campo intramolecolare non più del tipo debole puro. In tale ipotesi si potrebbe giustificare senz'altro la separazione di certe radiazioni (ortogonali all'asse cristallografico e al campo magnetico) in quadrupletti distinti. A ogni coppia di valori $\pm m, \pm m'$ deve infatti in tal caso corrispondere un doppietto a polarizzazione regolare o irregolare.

La diversa e in generale forte scissione di tali componenti dipenderebbe tuttavia sempre dalla presenza dei due campi, il magnetico esterno e l'elettrico interno al cristallo, e non sarebbe estranea, come osserva il Becquerel, al valore forte del momento magnetico degli ioni in considerazione.

Alle condizioni del campo elettrico sono pure forse da attribuire le dissimmetrie di intensità che talvolta si manifestano man mano che il campo

(1) Questo argomento è stato sviluppato nella tesi di laurea del dott. G. Corongiu, discussa in Cagliari il 28 luglio 1929.

magnetico cresce; per quanto forse in questo caso non sia da escludere anche una alterazione diretta dei campi intramolecolari conseguente a una deformazione del cristallo sotto l'azione del campo magnetico.

Certo le radiazioni assorbite dal cristallo per la massima parte debbono appartenere a intercombinazioni proibite in condizioni normali ed è quindi dubbio che la sola analisi di intensità senza il sussidio di altre indicazioni possa valere alla precisa identificazione delle radiazioni assorbite dagli joni delle terre rare in composto chimico.

Per questa ragione proporremo prossimamente una interpretazione di tali spettri d'assorbimento che ha per fondamento considerazioni generali sulla colorazione di joni diversi da quelli delle terre rare.

All'esperienza che non può essere nè semplice nè immediata spetterà decidere se questa interpretazione è da accettare.

Fisica. — *Sulla dispersione anomala negli spettri di bande*⁽¹⁾.
Nota di E. SEGRÈ, presentata⁽²⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

La dispersione anomala provocata dalle righe di assorbimento negli spettri è stata studiata ripetutamente ed ha fornito copiosi dati su varie importanti questioni di spettroscopia specialmente riguardo alla intensità delle righe, che può essere facilmente misurata dalla forma delle frange. Negli spettri di bande invece il materiale sperimentale è assai più scarso⁽³⁾ e manca una interpretazione teorica dei risultati.

Scopo di questa Nota è appunto lo studio sperimentale e teorico della dispersione anomala nelle bande di assorbimento dell' J_2 . Ci siamo serviti di tale sostanza perchè dà bande di assorbimento ben sviluppate, con i caratteri degli spettri di bande assai marcati, ed in una regione spettrale facilmente accessibile.

Abbiamo usato il classico metodo interferenziale del Puccianti con un interferometro Jamin ed un grande spettrografo autocollimatore di Hilger. Malgrado il forte potere risolutivo di tale strumento le bande dell' J_2 sono scarsamente risolte a causa dell'estrema fittezza delle righe componenti la banda. Invece si distinguono bene le teste delle bande.

Come sorgente luminosa ci siamo serviti di un arco a carboni, forzato, che dà uno spettro continuo luminosissimo. Le fotografie sono state eseguite con lastre Cappelli ortocromatiche speciali.

Il vapore di Jodio era tenuto in una stufa a temperatura leggermente superiore a quella ambiente; cercando di avere la massima densità di vapore

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(3) GEISLER, «Zeits. f. Wissenschaftliche Photographie», 7, 1909.

compatibile con una sufficiente trasparenza dello strato di vapore. Le lastre di chiusura della stufa erano per metà coperte di un leggero strato di nero fumo per eguagliare l'intensità della luce passante attraverso i due tubi della stufa.

Ho fotografato tutto lo spettro di assorbimento tra 5100 e 5800 Å. Le frange mostrano un andamento a « festone », caratteristico. La fig. 1 è un ingrandimento nel rapporto di 9 : 1 di un piccolo tratto delle negative originali. In essa si distingue nettamente la forma anomala delle frange. Anche l'effetto di qualcuna delle singole righe componenti la banda è rilevabile sebbene non nettamente a causa della vicinanza delle righe stesse; esso naturalmente è del solito tipo come negli spettri di righe.

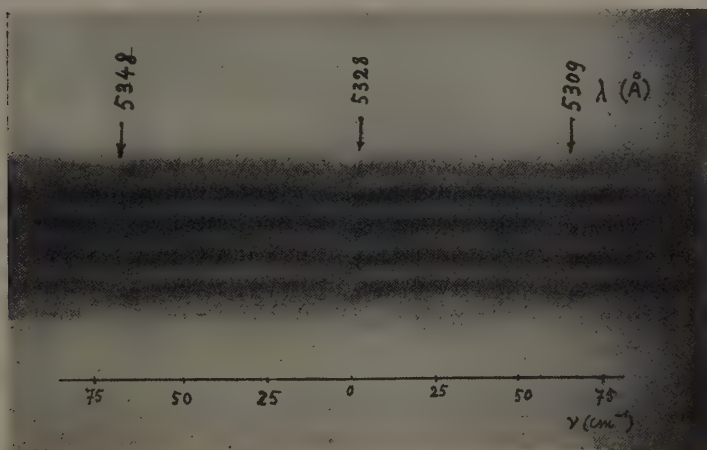


Fig. 1.

Per spiegare la forma « a festone » delle frange negli spettri di bande, partiamo da una formula che dà l'indice di rifrazione, e quindi la forma delle frange, in prossimità di una riga di assorbimento. Infatti le ordinate della frangia al disopra della posizione che essa avrebbe in caso che i due tubi fossero pieni della stessa sostanza, è proporzionale alla differenza fra gli indici di rifrazione delle sostanze che riempiono i due tubi della stufa. Tale differenza che indicheremo con n in prossimità di una riga di assorbimento, è data, con approssimazione sufficiente per il nostro caso da:

$$(2) \quad n = \frac{A}{\nu_0 - \nu}$$

qualora si consideri sensibilmente eguale ad 1 l'indice di rifrazione del mezzo che riempie uno dei tubi. A è una costante proporzionale all'intensità della riga o se si vuole al numero di elettroni di dispersione di frequenza ν_0 .

Per studiare l'andamento dell'indice di rifrazione in vicinanza di una banda bisognerebbe sovrapporre gli effetti delle singole righe componenti; ma a causa dell'insufficiente potere risolutivo dello spettrografo usato, non si possono sceverare gli effetti delle singole righe; invece si può solo vedere l'effetto d'insieme della banda, per calcolare il quale conviene sostituire alle righe una distribuzione continua di elettroni di dispersione considerando che fra ν_0 e $\nu_0 + d\nu_0$ esista un numero di oscillatori di frequenza propria compresa fra ν_0 e $\nu_0 + d\nu_0$ proporzionale ad $A(\nu_0) d\nu_0$. Dalla formula (1) si ottiene allora, come effetto della banda, per sovrapposizione

$$(2) \quad n(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu_0)}{\nu_0 - \nu} d\nu_0.$$

La funzione $A(\nu_0)$ può essere stabilita teoricamente con le seguenti considerazioni sugli spettri di bande⁽¹⁾: supponiamo, per fissare le idee, che la banda contenga solo un ramo Q. Del resto la considerazione degli altri rami, nel caso di molecole, come è quella dell' J_2 , in cui la riga zero è assai prossima alla testa delle bande, non altera per nulla i risultati.

Allora le frequenze delle righe componenti la banda sono date da:

$$(3) \quad \nu' = \nu_{el} + \nu_{osc} + (B'' - B') R(R + 1)$$

dove $\nu_{el} + \nu_{osc}$ danno la frequenza della testa della banda, e $B = \frac{h}{8\pi^2 c I}$ se si misurano le frequenze in numeri d'onda (cm.^{-1}) come faremo sempre nel seguito e come è pure fatto in figura.

La intensità delle righe è data da:

$$(4) \quad I = C(2R + 1) e^{-\frac{B'' - B'}{kT} R(R + 1)}.$$

Sostituendo da per tutto ad $R + 1$, R il che è un'approssimazione sufficiente ai nostri scopi, si ottiene eliminando tra (3) e (4) R e chiamando

$$(5) \quad \nu = \nu_{el} + \nu_{osc} - \nu'$$

ossia la differenza di frequenza fra la testa della banda e la frequenza considerata:

$$(6) \quad I = 2C \sqrt{\frac{\nu}{B'' - B'}} e^{-\frac{B'' - B'}{kT} \frac{\nu}{B'' - B'}}$$

(1) Cfr. per es. l'articolo di MECKE nel vol. XXI dell' *Handbuch der Physik* di GEIGER e SCHEEL.

d'altra parte l'intervallo fra due righe consecutive della banda, poichè si ha una riga per ogni valore intero di R , è approssimativamente

$$\Delta\nu = 2 (B'' - B') R = 2 \sqrt{(B'' - B')} \nu.$$

Conviene pertanto ammettere una distribuzione di elettroni di dispersione di densità proporzionale a

$$(7) \quad \frac{I}{\Delta\nu} = D e^{-\frac{B'' c h \nu}{kT (B'' - B')}} = A(\nu)$$

per $\nu > 0$ (la banda è sfumata verso il Rosso) ed $A(\nu) = 0$ per $\nu < 0$ in modo che in media in ogni intervallo di frequenza cadano lo stesso numero di elettroni di dispersione nella distribuzione discontinua reale ed in questa distribuzione continua fittizia.

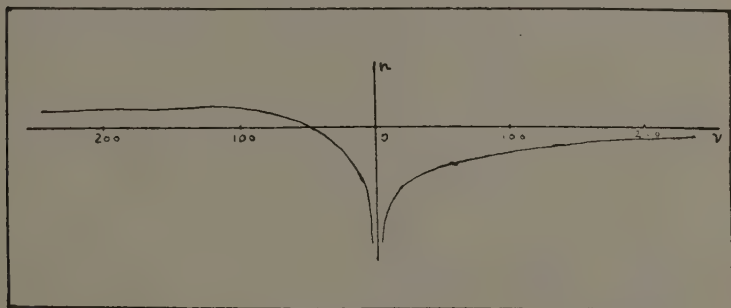


Fig. 2.

Sostituendo l'espressione (7) nella (2) possiamo senz'altro calcolare la forma della frangia a meno di una costante di proporzionalità che dipende dal numero totale degli elettroni di dispersione. Tale numero è dato dalla (7) ed è proporzionale all'

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu_0) d\nu_0 = D \int_0^{\infty} e^{-\frac{B'' c h \nu_0}{kT (B'' - B')}} d\nu_0 = D \frac{kT (B'' - B')}{B' c h}.$$

Da (7) e (2) si ha:

$$(9) \quad n(\nu) = D \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{B'' c h \nu_0}{kT (B'' - B')}}}{\nu_0 - \nu} d\nu_0.$$

L'integrale in (9) può essere ridotto facilmente all' $\int_{\infty}^x \frac{e^{-x}}{x} dx$ ed ese-

guiti i necessari semplici calcoli numerici si ottiene la curva disegnata in fig. 2.

La scala delle ordinate è arbitraria; essa dipende essenzialmente dal numero totale di elettroni di dispersione e quindi dalla densità di vapore, pel tramite della costante D . Quella delle ascisse, come del resto tutta la curva, è calcolata con le costanti molecolari⁽¹⁾ $B'' = 0.037$; $B' = 0.023$ per una temperatura di 300 K.

È facile riconoscere come il suo andamento sia del tutto simile a quello delle frange nella fotografia.

Una valutazione del numero totale di elettroni di dispersione con i dati finora ottenuti non è possibile con approssimazione men che grossolana e quindi la tralasciamo.

Chimica minerale. — *Sulla struttura cristallina dei carbonati neutri di cobalto e di nichelio*⁽²⁾. Nota di A. FERRARI e C. COLLA, presentata⁽³⁾ dal Socio G. BRUNI.

Parecchi carbonati romboedrici dei metalli bivalenti sono stati fra le prime sostanze il cui reticolo venne studiato coi raggi X. La modificazione romboedrica del carbonato di calcio, la calcite, è stata esaminata con questo nuovo metodo da W. L. Bragg fin dal 1914⁽⁴⁾ e negli anni immediatamente successivi da molti altri autori⁽⁵⁾. La scelta di questa sostanza che non è fra quelle a formola chimica e struttura cristallina più semplice è spiegata dall'esistenza di bellissimi cristalli naturali che si prestano assai bene allo

(1) LOOMIS, «Phys. Rev.», 1927, vol. 29, p. 112.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica-fisica della R. Università di Milano.

(3) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(4) W. L. BRAGG, «Proc. Roy. Soc. London», 89 (1914), pp. 246-269, 468-489.

(5) W. L. BRAGG, «Trans. Roy. Soc. London», 215 (1915), pp. 253-274; S. GORTON, «Phys. Rev.», 7 (1916), pp. 203-208; A. H. COMPTON, «Phys. Rev.», 7 (1916), pp. 646-659; H. S. UHLER, C. D. COOKSEY, «Phys. Rev.», 10 (1917), pp. 645-652; A. H. COMPTON, «Phys. Rev.», 11 (1918), pp. 430-432; M. SIEGBAHN, «Phil. Mag.», 37 (1919), pp. 601-612; E. SCHIEBOLD, «Abhandl. d. Math.-Phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss.», 36 (1919), pp. 68-213; R. W. G. WYCKOFF, «Am. J. Sc.», 50 (1920), pp. 317-360; Ch. MAUGUIN, «C. R.», 176 (1923) pp. 1331; G. R. LEVI e A. FERRARI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 33 (1924), pp. 516-521; F. RINNE, «Zeitschr. f. Krist.», 59 (1924); pp. 230-248 e 60 (1924), pp. 55-69; S. v. OLSHAUSEN, «Zeitschr. f. Krist.», 61 (1925), pp. 463-514; A. OSAWA, «Scienze Rep. Tōhoku», 14 (1925), pp. 33-41; A. H. COMPTON, H. N. BEERS; O. K. DEFOE, «Phys. Rev.», 25 (1925), pp. 618-629; E. A. HARRINGTON, «Am. J. Sc.», 13 (1927), pp. 467-479; C. TSEBOI, «Proc. Phys. Math. Soc. Japan», 8 (1927), pp. 197-203.

studio röntgenografico coi metodi di Laue e del cristallo rotante. Contemporaneamente fu dimostrato che la struttura della calcite era presentata anche dalla siderite (carbonato ferroso), dalla rodocrosite (carbonato di manganese) e dalla dolomite (carbonato doppio di calcio e magnesio)⁽¹⁾.

Le dimensioni della cella elementare dei carbonati di manganese e di ferro furono date da Wickoff nel 1920)⁽²⁾.

Più tardi uno di noi⁽³⁾ in collaborazione con G. R. Levi determinò le dimensioni della cella elementare della dolomite e dei carbonati di magnesio e di zinco che presentano pure la struttura della calcite.

Recentemente è stato dimostrato da Zachariasen⁽⁴⁾ che la struttura della calcite è presentata anche dal carbonato di cadmio.

L'isomorfismo frequente dei composti di nichelio e di cobalto coi corrispondenti di ferro, magnesio, zinco, cadmio e calcio rendeva probabile una struttura romboedrica tipo « calcite » per i carbonati di cobalto e di nichelio. Ed infatti il carbonato di cobalto pur essendo assai raro in natura è stato trovato sotto forma di cristallini romboedrici che presentano le combinazioni {100} e {111} da A. Weisbach⁽⁵⁾ che non poté però eseguire misure di angoli. Il carbonato di nichelio trovato in natura (zaratite) è basico e dalle analisi di B. Silliman e di L. Brush e G. J. Smith riportate da C. F. Rammelsberg⁽⁶⁾ corrisponderebbe alla formula $\text{NiCO}_3 \cdot 2\text{Ni(OH)}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. Questi due carbonati sono stati preparati da Sénarmont per via sintetica come diremo meglio innanzi, sotto forma di polvere che al microscopio si mostrava secondo il detto sperimentatore costituita da romboedri.

Abbiamo ritenuto interessante applicare l'esame röntgenografico alla conferma della presunta struttura romboedrica di questi carbonati operando sopra i prodotti artificiali.

Presentandosi questi carbonati sotto forma di polvere il metodo di Debye e Hull era certamente il più adatto.

Le preparazioni date da Sénarmont sono:

a) Riscaldamento per 18 ore a 150° in tubo di vetro, saldato alle due estremità di cloruro di cobalto o di nichelio con carbonato di calcio.

b) Trattamento di una soluzione dei precedenti cloruri con una soluzione di carbonato sodico satura di anidride carbonica a 140° in un tubo chiuso. È interessante notare che la preparazione artificiale del carbonato di cobalto-neutro anidro risale al 1851, quindi a molti anni prima della scoperta di questo carbonato in natura.

(1) W. L. BRAGG, loc. cit.

(2) R. W. G. WYCKOFF, loc. cit.

(3) G. R. LEVI e A. FERRARI, loc. cit.

(4) « Vid. Akad. Skr. I. M. N. Kl. », (1928), n. 4, p. 56.

(5) « Jahrb. f. Berg- u. Hüttenwesen, Sachsen », (1877), e « Ref. Zeitschr. f. Kryst. », I (1877), p. 393.

(6) F. C. RAMMELSBURG, « Mineralchemie », Leipzig (1875), p. 244.

Abbiamo preparato il carbonato di cobalto col secondo metodo ottenendo una polvere azzurra insolubile a freddo nell'acido cloridrico diluito, che all'analisi eseguita precipitando il cobalto per via elettrolitica e dosando l'anidride carbonica per assorbimento in idrato potassico dà i risultati:

	teorico	trovato
Co	49.57 %	49.42 %
CO ₂	36.96 %	34.53 %
H ₂ O	—	1.16 %

Questo prodotto che come vediamo corrisponde abbastanza bene alla composizione voluta dalla formola CoCO_3 è stato fotografato col metodo di Debye usando la radiazione X proveniente da un tubo ad anticatodo di ferro. Il fotogramma è ordinato nella tabella I dove la distanza d_{100} fra le facce del romboedro di sfaldatura è calcolata partendo dalle distanze reticolari $d_{h_1 h_2 h_3}$ dedotte dalle linee del fotogramma corrette mediante la formola di Pauli che tiene conto dello spostamento delle linee stesse dovuto al diametro del preparato. La formola che dà la d_{100} è la seguente:

$$d_{100} = d_{h_1 h_2 h_3} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 2(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3) \cos \Sigma}$$

dove è $\cos \Sigma = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

L'angolo α è quello di sfaldatura del romboedro e non essendo questo angolo noto abbiamo da prima ordinato il fotogramma nel sistema esagonale usando del diagramma di Hull ed ottenendo il rapporto assiale di 0.81 dal quale si passa all'angolo α mediante la formola:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3/4 + (c/a)^2}{3 + (c/a)^2}}.$$

L'angolo α così calcolato è $103^\circ 22'$.

TABELLA I.

N.	θ	Inten- sità	θ'	$\frac{\theta'}{2}$	$\text{sen } \frac{\theta'}{2}$	K	$d = \frac{\lambda}{2 \text{sen } \frac{\theta'}{2}}$	$h_1 h_2 h_3$	d_{100}
1	33.2	<i>m</i>	32.73	16.36	0.2810	α	3.441	$\bar{1} 1 1$	5.35
2	38.5	<i>m</i>	38.05	19.02	0.3260	β	2.690	2 0 0	5.38
3	42.3	<i>ff</i>	41.86	20.93	0.3570	α	2.710	2 0 0	5.42
4	49.9	<i>m</i>	49.49	24.74	0.4190	α	2.305	$\bar{2} 2 0$	5.46
5	55.3	<i>m</i>	54.91	27.45	0.4615	α	2.095	—	—
6	60.2	<i>m</i>	59.83	29.91	0.4990	α	1.938	$\bar{3} 1 1$	5.49
7	62.5	<i>d</i>	62.14	31.07	0.5165	β	1.698	$\left. \begin{matrix} 3 \bar{1} 1 \\ 2 2 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 5.48 \\ 5.48 \end{matrix} \right\}$
8	66.6	<i>d</i>	66.26	33.13	0.5465	α	1.770	$\bar{2} 2 2$	5.49
9	69.8	<i>f</i>	69.47	34.73	0.5705	α	1.695	$\left. \begin{matrix} 3 \bar{1} 1 \\ 2 2 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 5.48 \\ 5.48 \end{matrix} \right\}$
10	81.2	<i>m</i>	80.91	40.45	0.6495	α	1.489	3 $\bar{3} 1$	5.50
11	87.0	<i>m</i>	86.74	43.37	0.6870	α	1.410	$\left. \begin{matrix} 3 \bar{1} 1 \\ 4 \bar{2} 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 5.50 \\ 5.50 \end{matrix} \right\}$
12	92.2	<i>m</i>	91.96	45.98	0.7200	α	1.343	$\bar{4} 2 2$	5.51
13	102.3	<i>d</i>	102.11	51.05	0.7780	α	1.242	2 2 2	5.45
14	110.0	<i>d</i>	109.74	54.87	0.8175	β	1.073	5 $\bar{1} 1$	5.52
15	129.4	<i>mf</i>	129.31	64.65	0.9050	α	1.068	5 $\bar{1} 1$	5.50
16	133.0	<i>m</i>	132.93	66.46	0.9170	α	1.055	$\bar{3} 5 1$	5.51

La distanza d_{100} che si calcola da questa tabella è $5.48 \pm 0.005 \text{ \AA}$ e lo spigolo del romboedro:

$$a = \frac{d_{100}}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \Sigma} = 5.91 \pm 0.005 \text{ \AA}.$$

La cella elementare del carbonato di cobalto risulta così un romboedro con l'angolo di $103^\circ 22'$ e lo spigolo di $5.91 \pm 0.005 \text{ \AA}$.

Le dimensioni assai simili a quelle degli altri carbonati romboedrici tipo « calcite » ci porta ad ammettere senz'altro questa struttura per il carbonato di cobalto e quindi nella sua cella elementare corrispondente al romboedro di sfaldatura saranno contenute quattro molecole di CoCO_3 . La densità che si calcola con questo numero di molecole è allora 4.24.

Su un campione di carbonato di cobalto minerale il precipitato Weisbach ottenne la densità di 4.13 che si accorda bene con quella da noi calcolata. Occorre però osservare che il prodotto minerale conteneva ossido

di calcio per 1.80 % e ferro calcolato come Fe_2O_3 , per il 3.41 % oltre 1.22 % di acqua.

Risultando accertata per il carbonato di cobalto la struttura tipo « calcite » per le ragioni dette sopra, non abbiamo eseguito il calcolo delle intensità che risultano alquanto incerte anche per la difficoltà di apprezzare con esattezza le intensità osservate.

Per quanto le proprietà dei composti di cobalto siano assai simili a quelle dei composti di nichelio, tuttavia la preparazione del carbonato di nichelio con gli stessi metodi usati per quello di cobalto non ci ha permesso di arrivare fino ad ora al carbonato neutro.

Così facendo mescolare in un tubo saldato una soluzione di bicarbonato sodico con cloruro di nichelio e mantenendo il tubo a 150° per più di 20 ore: il prodotto ottenuto, lavato rapidamente con acqua satura di CO_2 , non diede mai la composizione voluta dal carbonato neutro ma sempre un prodotto che conteneva meno anidride carbonica e in più acqua e che non mostra il reticolo del carbonato neutro.

Scaldando per 18 ore il carbonato di calcio precipitato con cloruro di nichelio a 150° si ottiene una sostituzione solo parziale del nichelio al calcio ed il reticolo che appare dal fotogramma non è nemmeno in questo caso quello del carbonato neutro.

Infine abbiamo tentato la preparazione del carbonato neutro mescolando nella bomba di Berthelot il bicarbonato sodico col sale di nichelio e con anidride carbonica solida. Dopo chiusa ermeticamente la bomba e lasciata a bagnomaria per due giorni ottenemmo un prodotto che dava il rapporto Ni CO_2 quasi teorico pur essendo le percentuali dei due componenti assai basse per presenza di acqua. Il prodotto fotografato col metodo di Debye non ha dato alcuna linea. Le linee sono comparse dopo riscaldamento del prodotto in tubo chiuso con soluzione di bicarbonato sodico a 120°, ma esse non sono risultate quelle che sarebbero proprie del carbonato neutro di nichelio.

Da quanto sopra risulta che non abbiamo potuto ottenere fino ad ora il carbonato di nichelio neutro.

Riassumendo: Si dimostra che il carbonato neutro di cobalto presenta una struttura romboedrica tipo « calcite ». Le dimensioni della cella elementare contenente quattro molecole sono:

$$a = 5.91 \pm 0.005 \text{ \AA} \quad \alpha = 103^\circ 22'.$$

La densità di questo carbonato risulta di 4.24.

Il carbonato neutro di nichelio non ha potuto essere ottenuto fino ad ora mediante i metodi sintetici descritti.

Ciò troverebbe riscontro nel fatto che in natura a differenza di quello di cobalto, il carbonato neutro di nichelio non è stato fino ad oggi trovato, pur essendo i composti di nichelio in generale più diffusi di quelli di cobalto.

Chimica. — *Spettrochimica delle soluzioni di acido borico in glicerina.*
Nota di M. MORELLI, presentata dal Socio R. NASINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica biologica. — *Fosfogeno muscolare nei pesci* ⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È di recente conoscenza un nuovo composto organico fosforato dei muscoli (prevalentemente finora studiato per quelli striati), a cui è stato dato il nome di « fosfogeno » (Phosphagen), originandosi da esso buona parte del fosforo, che viene dosato nei muscoli come fosforo inorganico, allorchando ci si vale di metodi, che, come quelli di Embden ⁽³⁾ e di Briggs ⁽⁴⁾, importano l'uso di acidi minerali.

In presenza di questi appunto il nuovo composto organico resta prontamente scisso con produzione di fosfati inorganici; ragione per cui era finora sfuggito all'indagine.

Messo primieramente in evidenza da P. e G. P. Eggleton ⁽⁵⁾ e da Fiske e Subbarow ⁽⁶⁾ i quali ultimi videro, inoltre, trattarsi di una fosfocreatina, ne è stata successivamente stabilita la formula chimica da Meyerhof e Lohmann ⁽⁷⁾.

Questi ultimi AA. poterono infatti stabilire che il nuovo composto è dato dalla combinazione dell'acido fosforico con un derivato della guanidina (creatina o arginina), trattandosi cioè, di fosfocreatina in tutti i *Vertebrati*, e di fosfoarginina nei casi in cui l'arginina tiene nei muscoli il posto della creatina (*Crostei, Molluschi, Echinodermi, Vermi*) (Meyerhof) ⁽⁸⁾.

La grande importanza che sembra spettare a questa sostanza nel chimismo della contrazione muscolare va richiamando sempre più l'attenzione dei vari sperimentatori.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Centrale di Biologia Marina di Messina.

(2) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(3) EMBDEN G. « Ztschr. f. physiol. Chem. », 113, 139 (1921).

(4) BRIGGS., « Journ. of biol. chem. », 53, 13 (1922).

(5) EGGLETON P. e EGGLETON G. P., « Bioch. Journ. », 21, I, (1927).

(6) FISKE e SUBBAROW, « Science », 65, 401, (1927).

(7) MEYERHOF O. e LOHMANN K., *Naturwissenschaft.*, 16, 47 (1928); « Bioch. Ztschr. », 196, 22 e 49 (1928).

(8) MEYERHOF O., « Arch. Scienze Biol. », 12, 536 (1928).

Dal complesso delle ricerche finora eseguite, e particolarmente da quelle di G. Martino⁽¹⁾, che alla conoscenza della nuova sostanza ha portato già uno dei più ampi contributi sperimentali, il significato fisiologico di essa sembra essere intimamente connesso con l'attività delle giunture neuro-muscolari (placche motrici).

Delle numerose ricerche di G. Martino sul fosfogeno, qui ci interessa ricordare in modo speciale quelle, in cui, partendo dal concetto dell'intima relazione tra fosfogeno e funzione del muscolo, credetti opportuno studiare, se la distribuzione del fosfogeno nella muscolatura scheletrica fosse in rapporto colla diversa natura funzionale dei muscoli, se, cioè, i muscoli capaci di contrazioni rapide contenessero una quantità di fosfogeno diversa da quella contenuta nei muscoli capaci solo di contrazioni torpide.

Sperimentando nel coniglio e nel colombo, confrontando nel coniglio il contenuto in fosfogeno del muscolo bicipite femorale (a contrazione rapida) con quello del soleo (a contrazione torpida), e nel colombo il contenuto in fosfogeno del muscolo pettorale (a contrazione rapida) con quello dei muscoli dell'anca (a contrazione torpida) potè notare una netta e costante differenza tra i due tipi di muscolo presi in esame, e precisamente nel senso che i muscoli bianchi capaci di contrazioni più rapide, contengono sempre un quantitativo di fosfogeno più rilevante di quello contenuto dai muscoli rossi o a contrazioni più torpide dello stesso animale.

Partendo precisamente da queste osservazioni, ci è sembrato opportuno vedere se anche al diverso grado di attività muscolare e di resistenza funzionale corrispondessero differenze sensibili nel contenuto in fosfogeno.

I pesci ci sono sembrati animali da esperimento ottimi allo scopo, perchè, potendo tra questi studiare specie sicuramente stazionarie (deboli o cattivi nuotatori) in confronto con altre specie sicuramente migratorie (forti o buoni nuotatori) ci offrivano soprattutto l'evidente possibilità di controllare l'esistenza o meno di un rapporto tra contenuto in fosfogeno e grado di attività muscolare nei riguardi del nuoto, nel senso che i più forti e resistenti nuotatori potevano presentare un contenuto in fosfogeno relativamente più alto rispetto agli altri meno resistenti nuotatori.

Le nostre esperienze furono eseguite su TELEOSTEI (*Heliastes chromis* Gthr., *Iulis pavo* C. V., *Coris julis* Gthr., *Dicentrarchus labrax* Jord. e Eigenm., *Maena vulgaris* C. V., *Pagellus erythrinus* C. V., *Scorpaena porcus* L., *Gobius jozo* L., *Gobius capito* C. V., *Blennius gattorugine* Brunn., *Arnoglossus laterna* Gthr., *Rhomboidichthys podas* Gthr. *Scomber scomber* L., *Auxis bisus* Bp., *Clupea alosa* Cuv., *Clupea pilchardus* Art. Walb., *Engraulis encra-*

(1) MARTINO G., «Rend. Acc. dei Lincei», 7, 79, (1928); «Arch. di Fisiol.», 26, 362 e 379, (1928); «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 2, 1019, (1927); 3, 114-225-622-720-824 (1928); 4, 551 (1929).

sicholus Cuv.), e su SELACI (*Scyllium canicula* Cuv.), comprendendo così nelle varie specie esaminate pesci stazionari o cattivi nuotatori quali i *Blennidi*, i *Gobidi*, i *Pleuronettidi* ecc. e pesci migratori o buoni nuotatori quali i *Clupeidi*, gli *Scombridi*, gli *Scillidi*.

Generalmente gli esemplari ci vennero forniti vivi, e da noi stessi vennero sacrificati al momento dell'esperienza; solo alcuni ci furono forniti morti, ma sempre si poterono utilizzare solo a pochissime ore dalla morte.

Si isolava accuratamente la parte muscolare necessaria alla determinazione della massa latero-dorsale anteriore e dalla massa latero-dorsale posteriore, e sui due campioni (tratto craniale e tratto caudale), previa esatta determinazione del peso con bilancia a torsione, veniva eseguita separatamente la determinazione dell'acido fosforico inorganico e del fosfogeno a mezzo del metodo colorimetrico di Briggs⁽¹⁾ (con l'impiego del micro-colorimetro di Baudouin e Bernard) e con la tecnica descritta da P. e G. P. Eggleton⁽²⁾, ampiamente riassunta in una Memoria pubblicata da G. Martino⁽³⁾ nei « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei ».

La determinazione venne eseguita distintamente nel tratto caudale e nel tratto craniale perchè, dati i particolari movimenti eseguiti dall'animale nel normale progredire, rappresenta l'uno tratto - quello caudale - la parte più mobile e più attiva, mentre l'altro tratto - quello craniale - rappresenta la parte meno mobile e meno attiva; ci è sembrato quindi importante, data la singolare differenza di attività spiegata dalle due porzioni muscolari, saggiare se anche tra di loro si rivelassero apprezzabili differenze nel contenuto in fosfogeno.

In taluni Pesci, nella porzione caudale, e precisamente lungo la linea mediana, adagiato al disopra della massa muscolare a colorito biancastro, è ben differenziato e nettamente separabile, uno strato di muscolatura a colorito rossastro. Ci è sembrato in questi casi opportuno eseguire separatamente la determinazione nell'uno e nell'altro tipo di muscolo per accertare eventuali differenze nel contenuto in acido fosforico inorganico e in fosfogeno, anche perchè questi muscoli rossi, a parte la loro diversa origine miotomica, per la loro massa, direzione, e limitata sezione di attacco ai miosetti, lungi dalla parte assile del tronco, non possono che spiegare una molto meno forte attività e potenza che le grandi masse di muscolatura laterale opportunamente configurata in rapporto alla meccanica di movimento proprio dell'animale nell'acqua.

In taluna specie, poi, in cui è stato possibile prelevare una sufficiente quantità di sostanza muscolare della massa masseterina, abbiamo seguito

(1) BRIGGS, « Journ. of biol. chem. », 53, 13 (1922).

(2) EGGLETON P. e EGGLETON G. P., « Bioch. Journ. », 21, 1 (1928).

(3) MARTINO G., « Rend. R. Acc. dei Lincei », 7, 79 (1928).

anche in queste contemporanee determinazioni del fosfogeno, onde accertare se, in relazione al maggiore o minore sviluppo dell'apparato dentario, indice di una più o meno accentuata attività funzionale della massa muscolare in parola, potesse mettersi in evidenza, nelle varie specie, diverso contenuto percentuale in fosfogeno rispetto alle altre masse muscolari esaminate dello stesso animale.

Approfittando poi di alcuni esemplari di *Heliastes chromis* Gthr., che erano rimasti lungamente in vivaio (50-80 giorni), con sola acqua marina corrente, per cui s'erano esageratamente denutriti, e disponendo dei dati relativi al contenuto in fosfogeno di esemplari nei quali le determinazioni erano state eseguite quasi subito non appena pescati, istituendo opportuni confronti abbiamo voluto vedere se la lunga permanenza in vivaio potesse — anche per effetto della conseguente ipoalimentazione o del digiuno — apportare delle apprezzabili variazioni nel contenuto in acido fosforico inorganico e in fosfogeno.

Riservandoci di pubblicare dettagliatamente tutti i nostri dati sperimentali nel lavoro in extenso, che comparirà nelle « Memorie del R. Comitato Talassografico Italiano » riepiloghiamo qui semplicemente quelli che ci permettono di poter formulare delle fondate conclusioni.

Sembra anzitutto che i nostri dati depongano a favore dell'esistenza di un rapporto diretto tra contenuto in fosfogeno dei muscoli e grado di attività e di resistenza muscolare in rapporto al nuoto, nel senso che i pesci migratori, forti o resistenti nuotatori, presentano un contenuto in fosfogeno nei muscoli relativamente più alto in rispetto a quello presentato dai pesci stazionari, cattivi o deboli nuotatori.

Infatti nei primi il contenuto in fosfogeno (espresso in mgr. di P per 100 gr. di muscolo) risultò variabile — nel tratto caudale — tra un minimo di mgr. 20 % e un massimo di mgr. 58 % e precisamente secondo questa scala ascendente per le singole specie: *Scomber scomber* (20 %), *Auxis bisus* (23.5 %), *Engraulis encrasicolus* (27 %), *Clupea alosa* (40 %), *Clupea pilchardus* (54 %); nei secondi, invece, risultò variabile solo tra un minimo di mgr. 9 % e un massimo di mgr. 22 % e precisamente secondo questa scala ascendente: *Rhomboidichthys podas* (9 %), *Coris julis* (11.5 %), *Heliastes chromis* (12.5 %), *Blennius gattorugine* (13 %), *Dicentrarchus labrax* (14 %), *Pagellus erythrinus* (15 %), *Maena vulgaris* (15 %), *Julis pavo* (18 %), *Gobius jozo* (18 %), *Gobius capito* (18 %), *Arnoglossus laterna* (21 %), *Scorpaena porcus* (21.5 %), *Sargus vulgaris* (22 %).

In tutte le specie è stata sempre evidente una sensibile differenza nel contenuto in fosfogeno tra tratto caudale e tratto craniale nel senso che nel primo il fosfogeno si è mostrato sempre in quantità più abbondante che nel secondo. I seguenti sono infatti i dati relativi al tratto craniale:

Scomber scomber (13 %), *Auxis bisus* (16 %), *Engraulis encrasicolus* (22 %), *Clupea alosa* (36 %), *Clupea pilchardus* (38 %), *Rhomboidichthys podas* (1 %), *Coris julis* (7 %), *Heliastes chromis* (5,5 %), *Blennius gattorugine* (8 %), *Dicentrarchus labrax* (13 %), *Pagellus erythrinus* (12,5 %), *Maena vulgaris* (10 %), *Julis pavo* (12 %), *Gobius jozo* (14 %), *Gobius capito* (16 %), *Arnoglossus laterna* (15 %), *Scorpaena porcus* (19,5 %) *Sargus vulgaris* (15 %).

Degno di rilievo è il dato trovato per lo *Scyllium canicula*, in cui il contenuto in fosfogeno si è mostrato assai ridotto (mgr. 8 % nel tratto caudale e mgr. 4 % nel tratto craniale), pur essendo questo un discreto nuotatore. A differenza di tutti gli esemplari esaminati che sono dei *Teleostei* questo è invece un *Selacio*. Questa nostra osservazione isolata potrà assumere particolare valore, se ulteriori indagini la confermeranno.

Nei muscoli rossi del tratto caudale il contenuto in fosfogeno, come anche il contenuto in acido fosforico inorganico, è risultato nettamente inferiore non solo a quello dei muscoli bianchi dello stesso tratto caudale, ma anche a quello del tratto craniale. Riportiamo ad esempio uno dei dati relativi ad un esemplare di *Clupea pilchardus*: Tratto caudale: muscoli bianchi: ac. fosf. inorg. (espresso sempre in mgr. di P. per 100 gr. di muscolo) 203 %, fosfogeno 57 %; muscoli rossi: ac. fosf. inorg. 130 %, fosfogeno 8 %; tratto craniale: ac. fosf. inorg. 192 %, fosfogeno 44 %.

Un evidente rapporto sembra esistere tra contenuto in fosfogeno dei muscoli masseteri e sviluppo dell'apparato dentario nel senso che quanto più questo si presenta sviluppato tanto più alto è il contenuto percentuale in fosfogeno della massa muscolare in rispetto a quello delle altre masse muscolari dello stesso animale.

La lunga permanenza in vivaio non sembra che abbia apportato differenze in meno del contenuto in fosfogeno anzi - per quanto le nostre esperienze in merito non sono numerose e meritano ulteriore conferma - sembra che vi sia un modico aumento percentuale.

Botanica. — *Apogamocarpia in « Cucurbita Pepo » e « C. Moscata »*
Nota di R. SAVELLI e N. SOSTER, presentata dal Socio B. LONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Relazioni nervose dell'occhio e organo olfattorio trapiantati come abbozzi primari in embrioni di Axolotl.* Nota di P. PASQUINI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Morfologia sperimentale. — *Provocazione della monofilia in « Cannabis sativa L. », mediante traumi.* Nota di R. SAVELLI e N. SOSTER, presentata ⁽¹⁾ dal Socio B. LONGO.

I. In una recente Nota, inserita in questi « Rendiconti », ci siamo occupati della forma *monofilla* di *Cannabis sativa* L. Non potemmo riconoscerle il valore di una entità sistematica, poichè per questo il suo carattere distintivo avrebbe dovuto rappresentare una innovazione ereditariamente stabile in ambiente ordinario. Così ad esempio — stabilito che ogni carattere risulta da una reazione tra il plasma germinale e l'ambiente — se noi paragoniamo la Canapa comune e la sua mutazione *pinnatifidofilla*, noi ci convinciamo che esse differiscono effettivamente nel loro plasma germinale, poichè vediamo che esse manifestano i loro distinti caratteri pur sviluppandosi sotto lo stesso identico ambiente normale. Invece per la forma *monofilla* noi abbiamo potuto addurre numerose prove che conducevano a interpretarla come una transitoria reazione somatica insorgente in risposta a condizioni esterne anormali; e poichè numerose razze di Canapa avevano dato questa stessa reazione, veniva a delinearsi il convincimento che la monofilia potesse costituire una potenzialità latente in qualunque germoglio adulto della Canapa in generale.

Questa convinzione doveva spingere verso il campo della morfologia sperimentale, il cui compito, conformemente all'opinione dello Chodat e in parte del Klebs, ci sembra appunto ridursi alla evocazione delle forme latenti mediante il cimento sistematico dell'organismo. E siccome il cimento biologico consiste, per massima parte, in una *intenzionale* variazione nella intensità e nel rapporto di quegli stessi fattori che già in via normale agiscono sull'organismo, quel che naturalmente precede e guida tale sorta di esperimenti è l'analisi delle condizioni sotto cui si manifestano le modificazioni spontanee dello sviluppo e della forma.

Così studiando le manifestazioni di monofilia involontariamente conseguite da coltura jemale in vaso ed in serra, considerando il carattere in se stesso, le condizioni della sua comparsa, e la sua maniera di distribuzione sulla pianta, ci parve di poter concludere, in estrema sintesi, che questo carattere — il quale morfologicamente costituisce una semplificazione — dovesse scaturire da una specie di depauperamento della pianta, da un particolare stato fisiologico di alterata nutrizione che agisse nel momento della differenziazione degli abbozzi fogliari. Ci parve, dunque, che un consimile localizzato cambiamento dello stato di nutrizione delle gemme, e della forma

(1) Nella seduta del 17 novembre 1929.

d'evoluzione dei loro abbozzi, si sarebbe potuto conseguire per altra via, anche durante l'estate, ed all'infuori delle particolari condizioni di vita della serra: il quale risultato — se conseguito — avrebbe potuto costituire la miglior prova del nostro assunto. E così, intuitivamente, pensammo che lo scopo sarebbe stato conseguito qualora si fosse riusciti ad ottenere che la pianta, *a spese di scarso materiale di riserva, spingesse a rapido sviluppo molte gemme in attiva concorrenza*. Questo il concetto — guida del fortunato esperimento sul quale riferiamo in questa Nota.

II. Il mezzo adoprato fu il trauma in diverse forme: asportazione dell'apice del germoglio principale, recisione dei rami laterali, recisione della pianta a varie altezze, e — *in tutti i casi* — *sfogliatura totale*.

Nella pianta integra esiste un determinato rapporto, basato su scambi di materia, fra la totalità dei punti di crescita e la possibilità di sviluppo di ciascuno di essi singolarmente considerato; esiste un freno, un trattenersi reciproco che comunemente s'intende come *correlazione*. La rottura di questo equilibrio, la soppressione di questa, che Errera chiamava, « eccitazione inibitoria », svincola lo sviluppo di una quantità di punti o focalari di accrescimento, con tutto quello che di tumultuario è proprio di questi processi di riparazione. Per quanto concerne il primo inizio dei punti di vegetazione — anche lasciando a parte che nel suscitargli il trauma è efficace di per se stesso come agente di *irritazione* (svolgasi essa oppur no col mezzo dei necrormoni) — non c'è ragione perchè essi, nelle piante che sopravvivono, non sieno molto numerosi; ma in un momento immediatamente posteriore, quando il loro sviluppo è già avviato e la differenziazione degli abbozzi fogliari iniziata, non potrà non farsi sentire la conseguenza necessaria dello sfogliamento, cioè, globalmente, la penuria di nutrizione e la sua composizione alterata per effetto del brusco squilibrio tra le funzioni radicali e quelle della parte aerea così improvvisamente menomata.

L'esperimento fu condotto su 1812 piante della canapa *pinnatifidofilla* di Dewey, con abbondantissimi lotti di confronto non traumatizzati. Per ogni sorta di trauma fu proceduto in doppio: su di una parcella abbondantemente annaffiata e su di un'altra non annaffiata. La semina del materiale era stata un po' tardiva: l'11 aprile 1929; e le operazioni traumatiche vennero fatte tra il 29 luglio e i primi di agosto, quando la pianta era già adulta, scegliendo il momento assai critico in cui si stavano abbozzando i germogli fiorali, ciò che dà ragione della profonda sofferenza e dell'alta mortalità. Le piante recise a 5-10 centimetri da terra morirono tutte; di quelle tagliate a 20-25 cm. da terra sopravvisse il 2 % nella sola parte annaffiata, nella parte secca morirono tutte; di quelle tagliate a 30-40 cm. (con mutilazioni varie dei rami laterali), sopravvissero il 13 % e di quelle tagliate a 80-90 cm., sopravvissero il 22 %. Alta mortalità, da far sopravvivere soltanto il 25 %, si ebbe anche in quelle che subirono semplicemente la solita totale sfogliatura e la recisione del solo apice del germoglio

principale. Alcuni dei più bei casi di monofillia si ebbero dalle pochissime sopravvissute del 2° gruppo, tagliate a 20-25 cm. da terra.

La sfogliatura veniva sempre fatta asportando - o almeno ledendo profondamente - anche la gemma già abbozzata all'ascella della foglia. Se noi consideriamo morfologicamente per quale via la pianta risponde a questo complesso di stimoli e ripara a queste lesioni, noi vediamo che ciò avviene, in modo generale, mediante la comparsa di *gemmae collaterali* che si sviluppano in forma di rami vegetativi. Generalmente si tratta di una gemma che si sviluppa accanto al ramo tagliato o accanto alla gemma normale distrutta, talora di due gemme, a destra e a sinistra; talora anche, mentre si sviluppano le due gemme collaterali, si forma nuovamente per un qualche processo di restituzione una gemma mediana al posto di quella che era stata distrutta, e allora si vedono tre rami nascenti dalla stessa zona ascellare della foglia asportata e così vicini da parer quasi concrescenti alla base, come mostra la figura in alto della tavola illustrativa. In rari casi queste formazioni si sviluppano da internodi successivi, sì che il loro insieme può, alla lontana, suggerire l'idea di uno scopazzo.

Questi prodotti sono ascellari, anche se la foglia è stata asportata; e certamente nascono a spese del tessuto embrionale quivi appunto normalmente depositato: per nessuna ragione possiamo dirli avventizi, benchè coi rami avventizi abbiano una qualche fisiologica somiglianza, il cui aspetto più saliente è quello della formazione - in discreta percentuale - di foglie che, in un certo senso approssimato, si potrebbero dire *di forma giovanile*, come appunto interviene tanto di frequente nei germogli avventizi.

Per valutare al giusto grado la formazione di queste gemme collaterali bisogna che ci facciamo a considerare il modo di ramificazione proprio delle infiorescenze: in quella femminile all'ascella di ogni foglia si producono tre germogli, i due laterali hanno carattere florale, il mediano ha carattere vegetativo e produce foglie alla cui ascella si ripete di nuovo la stessa disposizione; nell'infiorescenza maschile abbiamo pure tre germogli ascellari, di cui il mediano talvolta si riduce ad un sol fiore, ma che per lo più hanno tutti e tre uno sviluppo copioso e portano i fiori (cfr. Briosi e Tognini, *Anatomia della Canapa*, pp. 32, 93 e 95). Dunque l'effetto conseguito dal trauma non costituisce, quanto alla disposizione dei rami, una innovazione, bensì soltanto un estendersi alla zona vegetativa (e dove le foglie passano dalla disposizione spirale a quella decussata) di un carattere che normalmente si pone in atto nella regione fiorifera, ma che possiamo considerare latente in tutta la pianta. Difatti rarissime volte, in piante molto rigogliose, si possono vedere quà e là, nella regione delle foglie decussate, in corrispondenza delle stipole e accanto al ramo ascellare, delle piccole formazioni fogliari simili a brattee ricoprtrici, che costituiscono il segno di una debole sporadica attività di punti vegetativi in disposizione collaterale. Il trauma risveglia ed eccita tale potenzialità latente e i rami prodotti, in questa zona, hanno

sempre carattere vegetativo e soltanto le loro ramificazioni d'ordine superiore producono fiori. Per dare una idea della rapida evoluzione di questi germogli, diremo che su di essi vennero a trovarsi fiori in antesi già il 6 settembre,



circa 30 giorni dopo la loro emissione e, in media, con appena 15-20 giorni di posticipazione rispetto alla fioritura normale delle piante non traumatizzate.

Tali germogli non si sviluppano su tutta la lunghezza della pianta; la grandissima maggioranza di quelli abbozzati muore presto, e quelli che rimangono si trovano riuniti a gruppi in zone limitate, in alto o in basso.

III. Appunto su questi rami noi abbiamo colto alcune centinaia di foglie, delle quali un piccolo saggio è mostrato dall'annessa tavola illustrativa: si

va da quelle della fila in basso, a impaginatura ampia, grandi, molto più grandi di quel che competerebbe ad un singolo segmento di una foglia normale, a quelle piccole, strette, finemente seghettate, a quelle a margine intero che segnano l'estremo della semplificazione. Alcune di esse per la forma generale ricordano molto da vicino la foglia d'*Ortica* e questo non può non richiamare al pensiero le discussioni e i dissensi sulla interpretazione filogenetica di queste forme. Non pare di poter affermare che le foglie di questi germogli rappresentino senz'altro la riproduzione della foglia primordiale della piantina germinante, non pare cioè che sieno schiettamente delle *forme giovanili*, tuttavia con queste hanno una grande somiglianza, sottolineata anche dalle condizioni in cui compaiono: Goebel ha più volte affermato che le forme giovanili ritornano quando le condizioni di vegetazione sono sfavorevoli, e - scendendo a circostanze più particolari - in alcuni casi, per ottenerle, è stata indicata la coltura in spazio umido, ciò che corrisponde in parte alle condizioni della coltura in cui per la prima volta le vedemmo e che suggerì l'odierno esperimento. Come per le forme giovanili dei germogli avventizi, la monofillia fu più frequente nei germogli basali, mentre in quelli nascenti al sommo della pianta la normalità fu quasi costante. Si sa anche che nelle piante eteroblastiche la lunga persistenza del tipo primario è propria degli individui meno nutriti, o dei germogli che provengono da bulbi o da tuberi meno dotati di sostanze di riserva.

Tutte queste analogie e corrispondenze, anche se non ci obbligano a omologare completamente la monofillia con una « forma giovanile », lasciano adito alla domanda se non sia da riagitare - anche per la *Canapa* - la questione dell'acquisto recente della complicazione fogliare, della eventuale derivazione da un prototipo omoblastico, e della parentela con le specie omoblastiche più affini.

Preferiamo collocarci dal punto di vista della ricerca delle cause attuali e, a tal proposito, dopo aver richiamato l'attenzione del lettore su alcune forme di passaggio figurate nella fila mediana, a sinistra della tavola illustrativa, vogliamo soggiungere che ci è parso di notare una minor produzione di monofillia nelle piante ombreggiate, e che sebbene i rami delle piante mantenute al secco fossero più piccoli, essi non presentavano, nei riguardi della monofillia, sensibili differenze rispetto a quelli delle piante annaffiate. Nelle piante non traumatizzate non si ebbe neanche il minimo cenno di queste manifestazioni.

Come si è detto, per questo primo esperimento, abbiamo adoprato la *Canapa* pinnatifidofilla di Dewey, intuendo che quivi l'assunto sperimentale dovesse essere più facile poichè essa è già una espressione di semplificazione fogliare e può quindi presumersi più propensa alla monofillia. In un ristretto esperimento su *Canapa* comune (var. *Kimington*) abbiamo ottenuto soltanto una notevole diminuzione del numero dei segmenti ed una grande diminuzione della loro superficie, il che ci fa ricordare come anche in con-

dizioni di depauperamento realizzate per tutt'altra via, e cioè quelle che si presentano in piante provenienti dai piccoli embrioni di semi poliembrionici, le foglie spesso sieno molto piccole e a tre lobi soltanto.

IV. Ultima questione connessa all'argomento era quella d'indagare le eventuali relazioni fra la monofilia e le anomalie sessuali. Le manifestazioni di monofilia viste in coltura di serra erano accompagnate da anomalie sessuali tanto prevedibili in quelle condizioni ecologiche da non costringere a fare particolari ipotesi su una eventuale connessione delle due manifestazioni, ma da far pensare piuttosto ad un parallelismo di influenze. Ed un analogo parallelismo si sarebbe potuto supporre ottenibile per la via del trauma, non solo per la esplicita affermazione del Blaringhem, che nella Canapa il monoicismo e l'ermafroditismo si manifestano specialmente nei germogli di sostituzione derivati da traumi; ma anche per un cumulo di sparse affermazioni di diversi studiosi della Canapa, le quali corroborerebbero questa aspettativa.

Intanto, una prima domanda che, nei riguardi del sesso, ci siamo posti, era quella di sapere se la provocazione di un'alta mortalità non avesse spostato il consueto rapporto sessuale. Ora, la statistica fatta su 947 piante di confronto, ha dato il 43 % di ♂ e sulle 225 rimaste vive dopo il trauma la percentuale era del 44 %, il che significa che la mortalità, e - in correlazione inversa - la resistenza alle cause ostili, è stata perfettamente uguale tanto per i ♂ che per le ♀, e questa è già una constatazione poco in armonia con le idee correnti. Quanto poi alle alterazioni sessuali, è bensì vero che abbiamo constatato frequentemente un monoicismo insorgente per la comparsa di fiori ♂ nelle piante ♀, e più precisamente perchè sono ♂ alcuni dei fiori che si trovano in corrispondenza delle stipole della foglia ascellante (e cioè in posizione collaterale rispetto al germoglio ascellare mediano che resta inalterato); ma la stessa modificazione si trova nelle piante non traumatizzate, sicchè possiamo dire con sicurezza che il trauma, in riguardo, è stato - *nel nostro caso* - del tutto inefficace. Invece l'alterazione sessuale ci è apparsa dipendente dalla posticipazione di semina, perchè in altro lotto seminato più tardivamente, cioè il 18 luglio 1929, e che dette le prime antesi il 15 settembre 1929, la alterazione, sempre limitata alle piante ♀, fu molto più intensa, perchè non solo erano ♂ i fiori collaterali accennati nel caso precedente, ma la maschilità si estendeva anche al germoglio mediano e riguardava i nuovi fiori collaterali nascenti da esso in corrispondenza delle stipole delle sue foglie.

Non si riesce tuttavia ad afferrare bene quale sia il fattore efficiente, perchè se questo risiedesse nell'epoca in cui si differenziano gli abbozzi florali, allora anche il trauma avrebbe dovuto agire, non per se stesso, ma in quanto cagione di ritardo nella fioritura. In linea di fatto questa probabile influenza non ci è apparsa sensibile. Invece è apparsa evidente una particolare propensione della Canapa pinnatifidofilla, poichè altre razze comuni, seminate negli stessi giorni, non dettero tali manifestazioni.

PRESENTAZIONE DI LIBRI.

Il Corrispondente FRANCHI presenta in omaggio due suoi lavori dai titoli: « Sulla tettonica delle Alpi Cozie franco-italiane » e « Un primo lavoro riconoscente l'età eocenica dei "Grès d'Annot" dopo la esauriente confutazione della loro età oligocenica da me data nel 1916 », con le seguenti parole:

« Il primo lavoro, che ha per titolo « Sulla tettonica delle Alpi Cozie franco-italiane », ha per iscopo la dimostrazione della *non esistenza* delle due più grandi falde di carreggiamento delle Alpi occidentali, quella del Monte Rosa e quella del Gran San Bernardo. Queste falde, concepite da M. Lugeon e da E. Argand verso il 1910-11, non sono state accolte da me e dai miei Colleghi dell'Ufficio geologico, ma furono accettate invece con grande fervore da alcuni dei più eminenti studiosi di tettonica (P. Termier, Emile Haug, Max Baur, Kober) e da alcuni giovani geologi italiani. In seguito alle lunghe discussioni avute nelle Alpi Cozie coll'illustre Direttore del Servizio geologico della Francia, P. Termier e con Wilfrid Kilian, io sono giunto alla conclusione che quelle due grandissime falde, le quali dovrebbero comprendere tutte le Alpi occidentali, sono insussistenti, cioè non sono che un bel sogno.

« Questo lavoro, con numerosi profili geologici, panorami e fotografie, costituisce, a mio avviso, una inattaccabile documentazione di tale mia conclusione, la quale, dato il numero e il valore degli avversari, potrebbe parere temeraria.

« Il secondo lavoro è un semplice annunzio della vittoriosa chiusura di una vertenza che vigeva da qualche diecina di anni fra me ed alcuni dei più illustri geologi francesi, Jean Boussac, Emile Haug, W. Kilian e Léon Bertrand, sulla età di una potente ed estesissima formazione di arenarie, detti dai Colleghi di Francia *Grès d'Annot*, la quale essi ritennero finora oligocenica, e affermata e dimostrata da me eocenica. W. Kilian ne ammise la eocenicità nel 1925, un mese prima della sua morte immatura (insieme a P. Termier) e il grande geologo Emile Haug morì nel 1928 senza lasciare uno scritto riparatore.

« Toccava alla signorina Gublex-Wahl, giovane allieva del grande Maestro di farmi giustizia, col riconoscere finalmente, in un suo grande lavoro, la eocenicità della grande formazione dei *grès d'Annot*.

« Questa vittoria scientifica ha una grande portata tanto per la stratigrafia ch  per la tettonica di tutte le Alpi Marittime e pi  di tutte le Alpi occidentali.

« L'annuncio ne   stato dato con questa breve Nota pubblicata nel "Bollettino della Societ  geologica italiana" ».

Il Corrispondente ABETTI, anche a nome dei Consoci DE FILIPPI e ALESSIO, presenta il vol. II della 1^a serie delle « Pubblicazioni scientifiche della Spedizione italiana DE FILIPPI », e il fasc. 46 delle *Osservazioni e Memorie* del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia, anche a nome dei consoci Filippo De Filippi e Alberto Alessio, il vol. II della I Serie delle Pubblicazioni scientifiche della Spedizione Italiana De Filippi nell'Him laia, Caracorum e Turchest n Cinese (1913-14). Il volume contiene le misure della accelerazione della gravit  e degli elementi magnetici terrestri eseguite da me e da Alessio nei massicci montagnosi dell'Asia Centrale.

« Stazione di partenza e di chiusura a Genova con collegamento alle misure del "Trigonometrical Survey" e a quello del Servizio geodetico Russo.

« Osservazioni di campagna nelle abitazioni e sotto la tenda.

« Stazione D psang a 5368 metri s. l. M.

« Le determinazioni eseguite dalla Spedizione De Filippi confermano i risultati ottenuti dal "Trigonometrical Survey" nelle sue varie campagne nell'India settentrionale al Sud della catena dell'Him laia, li estendono attraverso   questa, ed a quelle del Caracorum e del Cu n Lun e li collegano con le determinazioni del Servizio geodetico Russo nel Turchest n e Pamir. Tutte queste misure si completano a vicenda nel dimostrare che la gravit  sulle catene montagnose dell'Him laia e del Caracorum   generalmente in eccesso ed   invece in difetto, tanto al Sud quanto al Nord di queste, indicando probabilmente uguali condizioni di non compensazione, tanto nel piano indo-gangetico quanto nei piani del Turchest n.

« Fra le maggiori anomalie si debbono notare quelle nella vallata dell'Indo fra l'Him laia e il Caracorum e quelle al limite occidentale del Turchest n, che   interessante paragonare con le forti e simili anomalie esistenti al di l  della catena dei monti Al i e Transal i. Con queste anomalie vanno anche insieme le eccezionali deviazioni della verticale da noi determinate con misure geodetico-astronomiche. In conclusione la ben nota teoria dell'isostasi terrestre non trova conferma nei dati dell'esperienza per queste regioni dell'Asia Centrale e ci  ha dato occasione ad Alessio di fare alcune considerazioni teoriche nella seconda parte di questo volume. Nell'ultima parte sono ridotte e discusse dal prof. Tenani dell'Istituto idrografico di Genova le nostre misure di magnetismo terrestre.

« Presento altres  il Fascicolo 46 delle *Osservazioni e Memorie* del Regio Osservatorio Astrofisico di Arcetri. Contiene fra l'altro una Nota del

prof. Giorgio Piccardi del Laboratorio di Chimica Fisica della Regia Università di Firenze, che dimostra la possibilità dell'esistenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie del sole e poi la prova su spettroeliogrammi eseguiti alla Torre solare di Arcetri e all'Osservatorio di Monte Wilson. È interessante notare che il prof. Russel, discutendo recentemente la costituzione del Sole, giungeva per altra via con considerazioni teoriche alle stesse conclusioni a cui era giunto il prof. Piccardi sulla presenza dell'idrogeno molecolare nelle macchie solari.

« Un altro lavoro è quello sul periodo di rotazione della cromosfera solare eseguito da me, coadiuvato dalla sig.na B. Novàkovà, alla Torre solare di Arcetri.

« Lo studio delle componenti di emissione e di assorbimento della riga H_{α} portano a determinare una dissimetria fra queste, costante a tutte le latitudini. Confrontando lembi opposti del Sole sono stati dedotti i periodi di rotazione che spettano a ciascuna delle componenti, ciò che porta alla stima del livello a cui queste sono probabilmente generate. Sono studiati e discussi infine gli effetti Einstein, St. John e al lembo, che contribuiscono a spostare le righe di Fraunhofer al centro o al lembo del Sole ».

Il Socio LEVI-CIVITA, per incarico dell'A., presenta in omaggio due Memorie del Socio MARCOLONGO, intitolate: *Le ricerche geometrico-meccaniche di Leonardo da Vinci* « Atti Società dei XL » e *La dinamica di Leonardo* « Rend. del Seminario Matematico e Fisico di Milano ».

« Dalla introduzione alla prima Memoria (che è molto estesa e corredata da tavole) si rileva come, pur dopo i numerosi e profondi studi, di cui da oltre un secolo fu oggetto l'opera scientifica di Leonardo, i contributi specifici da lui apportati alle matematiche non fossero stati ancora nè completamente desunti dal ricco materiale sparso nei manoscritti, nè tanto meno discussi con moderno spirito storico-critico.

« Tale faticoso e non facile esame si è assunto il nostro Collega, portandolo a felice compimento. Particolarmente notevoli sembrano i risultati cui egli è pervenuto circa le concezioni meccaniche di Leonardo. Rimane tra altro acquisito (ciò che non era ancora ben sicuro) che egli enunciò in modo chiaro e generale la legge d'inerzia e ne ricavò qualche applicazione concreta. Riconobbe l'identità qualitativa fra il peso e le altre forze, e in più esempi (tra cui vanno segnalati il remo e il paracadute) mostrò di avere intuizione cosciente del principio di reazione.

« Di Leonardo come tecnico è specialmente lumeggiata dal Marcolongo la costruzione di strumenti matematici; ma in sintesi si ha pur la conferma che il genio inventivo di meccanismi appunto in Leonardo ha raggiunto i più alti fastigi, rispetto a tutti i tempi e a tutti i paesi ».

Il Socio SEVERI presenta all'Accademia il volume primo, parte prima dell'*Enciclopedia delle matematiche elementari*. Egli fa la presentazione a nome del Socio BERZOLARI, Presidente della Commissione che

cura la pubblicazione dell'Enciclopedia. È questo frutto di un'iniziativa della sezione senese delle Società Mathesis, in seguito a proposta del compianto Roberto Bonola. L'Enciclopedia ha per iscopo di presentare un quadro completo delle matematiche elementari e dei loro rapporti colle matematiche superiori, facendo opera soprattutto utile pei futuri insegnanti e pei professori di scuole medie, che vivono lontani dai maggiori centri di studio. Il volume con cui l'opera s'apre contiene pregevoli articoli e dà fin dal principio sicuro affidamento che lo scopo cui l'Enciclopedia è dedicata sarà pienamente raggiunto. Si deve perciò esser grati alla Commissione editrice, e soprattutto al suo infaticabile Presidente, per questa utile pubblicazione, che continua l'alta tradizione della matematica italiana.

Il Socio MARCHIAFAVA presenta in omaggio e illustra un volume di A. ILVENTO: « Eredità e Igiene ».

Il Socio CASTELNUOVO presenta un volume inviato in omaggio all'Accademia, di I. J. IZQUIERDO: « Curso de Fisiologia de Laboratorio ».

Il Corrispondente C. GUIDI presenta in omaggio un suo opuscolo dal titolo: « Prove di usura su funi di funivie ».

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le pubblicazioni giunte in dono all'Accademia e segnala in ispecial modo l'opuscolo del Socio SILVESTRI: « Due nuove specie di Iapygidae (Thysanura) di Costa Rica ».

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente GARBASSO annuncia che sono stati inviati, perchè siano conservati negli archivi dell'Accademia, tre plichi suggellati rispettivamente dai Sig.ri FREDIANI GASTONE, SENSINI IVO, ZOPPICH AMATO.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rediconti » i Soci: CASTELNUOVO, CORBINO, FRANCHI, GARBASSO, NASINI, SEVERI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° dicembre 1929

- ABETTI G. — Altezza della cromosfera nel 1928 ed andamento del presente ciclo solare. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matem. e natur.». Vol. X, pp. 7-9). Roma, 1929, 8°.
- ABETTI G. — Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1927. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matemat. e natur.». Vol. VII. pp. 445-448). Roma, 1928, 8°.
- ABETTI G. — Immagini spettroscopiche del bordo solare osservate a Catania, Madrid, Zò-sè e Zurigo negli anni 1925 e 1926. (Pubblicate dal R. Osservatorio di Arcetri). Firenze, 1929, 8°, pp. 1-11. tav. XX.
- ABETTI G. — L'edizione nazionale delle opere di Galileo e la mostra delle Scienze di Firenze. (Estr. dalla Rivista «l'Universo». Anno X. 1929). Firenze, 1929, 8°, pp. 1-8.
- ABETTI G. e ALESSIO A. — Geofisica, gravità e magnetismo. (Spedizione italiana De Filippi nell'Himàlaia, Carocorum e Turchestàn Cinese [1913-1914] Vol. II). Bologna, 1929, 4°, pp. 1-218, tav. I-XXXVIII.
- ARCANGELI A. — Isopodi terrestri raccolti in Cuba dal prof. F. Silvestri. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Volume XXIII, pp. 129-148). Spoleto, 1929, 8°.
- BEZZOLARI L., VIVANTI G. e GIGLI D. — Enciclopedia delle matematiche elementari. Vol. I, parte I, Milano, 1930, 8°, pp. 1-XVI, 1-450.
- BOSELLI F. — Elenco delle specie d'insetti dannosi e loro parassiti ricordati in Italia dal 1911 al 1925. Portici, 1928, 8°, pp. I-VIII, 1-264.
- BOSELLI F. B. — Studi sugli Psyllidi (Homoptera: Psyllidae o Chermidae), (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici», Vol. XXIV, pp. 70-77), Portici, 1929, 8°.
- CANNON W. B. — Curso de Fisiologia de Laboratorio. Version Española por Dr. J. J. Izquierdo. New York, 1929, 4°, pp. I-XXV, 1-201.
- COSTA S. — Altre inie scoperte. Grosseto, 1929, 8° fol.
- COSTA S. — La nuova scienza astronomica. Una serie di scoperte. Grosseto, 1929, 8°, pp. 1-8.
- DE CHAURAND DE SAINT EUSTACHE E. — La forma del globo terrestre determinata dal «calcolo astronomico». (Estr. dalla Rivista «l'Universo». Anno X, 1929). Firenze, 1929, 8°, pp. 1-10.
- FRANCHI S. — Sulla tettonica delle Alpi Cozie Franco-Italiane. (Estr. dalle «Memorie descrittive della carta geologica d'Italia». Vol. XXII). Roma, 1929, 8°, pp. 1-62.
- FRANCHI S. — Un primo lavoro riconoscante l'età eocenica dei «Grès d'Annot» dopo la esauriente confutazione della loro età oligocenica da me data nel 1916. (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. XLVIII, pp. 65-70). Roma, 1929, 8°.
- GUIDI C. — Prove di usura su funi di funivie. (Estr. da «l'Ingegnere». Volume III). Roma, 1929, 4°, pp. 1-8.
- ILVENTO A. — Eredità ed igiene. (Trattato italiano d'igiene. Vol. VI, parte II). Torino, 1927, 8°, pp. 1-328.

- IACCHIA P. — Dieci anni di assistenza sanitaria agli orfani di guerra. Bologna, 1929. 8°, pp. 1-119.
- LANDAU E. — Bemerkungen zu einer Arbeit von Hrn. Hoheisel über die Zetafunktion. (Sonderabd. aus den « Sitzungsberichte der Preuss. Akademie der Wissenschaften, Phys. Math. Klasse ». Bd. XXL 1929). Berlin, 1929. 8°, pagine 1-7.
- LANDAU E. — Ueber die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten. (Sonderabd. aus « Mathematische Zeitschrift ». Band XXX, pp. 608-634). Berlin, 1929. 8°.
- LANDAU E. — Ueber die Carathéodorysche Verschärfung des grossen Picardschen Satzes. (Sonderabd. aus « Mathematische Zeitschrift ». Band XXX, pp. 207-210). Göttingen, 1929. 8°.
- LANDAU E. — Ueber einen Mordellschen Satz. (Sonderabd. aus « Prace Matematyczne — Fizyczne ». Tom. XXXVI). Warszawa, 1929. 8°, pp. 1-11.
- LANDAU E. — Ueber einen Satz von Hrp. Esclançon. (Sonderabd. aus « Mathematische Annalen ». Band 102, pp. 177-188). Berlin, 1929. 8°.
- LANDAU E. — Ueber einen Valironschen Satz. (Sonderabd. aus « Mathematische Zeitschrift ». Band XXX, pp. 205-207). Göttingen, 1929. 8°.
- LANDAU E. — Ueber schlichte Funktionen. (Sonderabd. aus « Mathematische Zeitschrift ». Band XXX, pp. 635-638). Göttingen, 1929. 8°.
- MARCOLONGO R. — La dinamica di Leonardo. (Estr. dai « Rendiconti del Seminario Matematico e fisico di Milano ». Vol. III). Milano, 1929. 8°, pp. 1-20.
- MARCOLONGO R. — Le ricerche geometrico-meccaniche di Leonardo da Vinci. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana delle Scienze »). Roma, 1929. 4°, pagine 1-53.
- MORTON WHEELER W. — Ants Collected by Professor F. Silvestri in Formosa, the Malay Peninsula and the Philippines. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIV, pp. 27-64). Portici, 1959. 8°.
- Osservazioni e Memorie del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri. Fascicolo n° XLVI. Milano, 1929. 8°. pp. 1-97.
- SILVESTRI F. — Due nuove specie di Japygidae (Thysanura) di Costa Rica. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Volume XXIV, pp. 65-69). Portici, 1929. 8°.
- STEVENS B. — The Identity Theory. Wittington. 1929. 8°, pp. 1-31.
- TURATI E. — Eteroceri di Tripolitania. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto agrario di Portici ». Volume XXIII, pp. 98-128). Spoleto, 1929. 8°.
- VINCI F. — Ostilio Ricci da Fermo, maestro di Galileo Galilei. Fermo, 1929. 8°, pp. 1-39.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 dicembre 1929 (anno VIII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Sui triedri intermediari di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta.* Nota del Corrisp. V. NOBILE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sul confine franco-italiano tra il Colle del Piccolo S. Bernardo ed il Colle della Seigne, a sud del Monte Bianco.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. S. FRANCHI.

Appena uscito dalle lunghe dispute relative alle Alpi franco-italiane Marittime e Cozie, sulle quali ho avuto l'onore di riferire poco fa all'Accademia ⁽²⁾, è per me doloroso di intraprenderne un'altra, riguardante il settore più settentrionale, confinante con il gruppo del Monte Bianco. Ma mi vi accingo colla certezza di far trionfare, qui pure, le mie vedute, concordanti, d'altronde, con quelle dei grandi predecessori Alfonso Favre e Carlo Lory.

In seguito a poche gite eseguite nei dintorni di Pré St. Didier, di La Thuile e di Courmayeur, io mi sono convinto, fin dal 1895, della identità della formazione di calcescisti, che denominai « zona di Courmayeur » con la famosa « zona delle pietre verdi » che, pel ritrovamento di strati ad *Arietites* ed a *Belemnites*, da me fatto in Valle Grana, già avevo, potuto ascrivere, con sicurezza, ai terreni secondari ⁽³⁾.

(1) Presentata nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) Reale Accademia dei Lincei, nel presentare due miei lavori su quelle regioni (vedasi il resoconto della seduta).

(3) S. FRANCHI, *Sull'età mesozoica della « zona delle pietre verdi » nelle Alpi Occidentali.* « Boll. R. Comitato Geologico », 1898.

Ma il rinvenimento fatto nel 1899 di innumerevoli belemniti al margine della strada internazionale, al di qua e al di là dell'Ospizio del Piccolo S. Bernardo, attorno al lago Verney e nella discesa verso Seez, in territorio francese, entro a calcescisti identici a quelli delle Alpi Cozie, mi dava una conferma, non necessaria, che si trattava qui della stessa formazione, con identici, sebbene svariati tipi litologici, minutamente studiati al microscopio.

L'esatta corrispondenza litologica e cronologica delle due zone si rese poi tanto più manifesta dalla presenza di numerose masse di pietre verdi, comprese nei calcescisti e in rocce gneissico-micascistose nel contrafforte di confine, fra il Monte Lancebranlette ed il Colle di Breuil.

I calcescisti sono però gli stessi fino al limite della Valle Veni e oltre, fino alla sella del Colle della Seigne, dove appaiono in essi intercalazioni ripetute di grossi banchi di breccie poligeniche, come quelle tanto frequenti nei calcescisti delle Alpi Cozie, dove le mostrai nell'agosto 1925 a P. Termier ed a W. Kilian, sopra Valloriate, i quali le ritennero indubbiamente liasiche.

Un elemento di queste breccie, costituito da frammenti di calcari cristallini neri e da calcari dolomitici gialli e bigi di varia grossezza, con pellicole calcescistose nel cemento, dimostranti che esso aveva subito un metamorfismo identico a quello dei calcescisti, mi mostrò una ben distinta belemnite, piuttosto grossa (16 mm.), la quale, nelle due sezioni, una col fragmocono ben distinto, non mostra di essere stata rotolata, come suppose H. Schöeller, ritenendola fluitata ⁽¹⁾.

Di belemniti al Colle della Seigne erano già state trovate: una da Charpentier nel 1822 (« Cosmos », t. I, p. 541) e un'altra da B. Studer nel 1850 (lettera al « Neues Jahrbuch »). Cosicché le belemniti ivi rinvenute sono già almeno tre, per cui l'ipotesi della fluitazione parrà ancora meno accettabile.

I tre ritrovamenti, di cui solo la posizione della mia è indicata esattamente, per quanto ciò sia stato possibile, nel foglio al 100.000 della Carta geologica del Monte Bianco, unitamente alla continuità indubitabile della massa di calcescisti dal Piccolo S. Bernardo al Colle della Seigne, senza alcun segno che indichi il contatto di due formazioni di età tanto disparata, mi fanno convinto che la belemnite da me trovata sia realmente giurese, e che il Nummulitico della *nappe de l'Embrunais* non penetri al di qua del confine in masse di qualche importanza. È a rimpiangere che con nessun grafico siasi segnato quel limite ipotetico che sarebbe stato interessantissimo, poichè la cartina della zona di confine della tav. VII non è molto chiara, causa la piccola scala.

(1) H. SCHÖELLER, *La nappe de l'Embrunais au nord de l'Isère*. « Bulletin des Services de la Carte géologique de la France et des topographies souterraines », n. 175, t. XXXIII, 1929.

Disgraziatamente poi, io non sono penetrato in territorio francese, al di là del confine, che per poche decine di metri, sicchè non posso escludere che a quella distanza arrivi, senza distinguersi con forme notevoli, il terreno che i Colleghi di Francia attribuiscono alla parte eocenica della *nappe de l'Embrunais*.

Henri Schœller, nel suo poderoso lavoro, ha esaminato con una diligenza ed obbiettività non frequenti nei geologi ultramontani verso i nostri lavori, obbiettività di cui, per parte mia, gli sono gratissimo⁽¹⁾.

Sono tuttavia dolente di dover osservare, a questo proposito, che se l'autore avesse letto con maggior attenzione il mio lavoro citato in bibliografia, dal titolo *Escursioni in Valle d'Aosta*⁽²⁾, dopo qualche po' di riflessione egli avrebbe mutato radicalmente le sue idee, sulla cronologia e la tettonica della regione di cui stava per trattare. Con quel mio lavoro, che può dirsi una chiara anticipata confutazione della tesi che egli ora sostiene, io confermavo infatti, anche con l'autorità di petrografi valentissimi, soci della Società Geologica Italiana, che gran parte della mia « Zona calcescistosa di Courmayeur » è costituita da calcescisti di tipi svariatiissimi, a luoghi fossiliferi, con localizzate intercalazioni di pietre verdi, e, in tutto il loro spessore, di breccie poligeniche, di calcari cristallini, ecc., e che i calcescisti sono *petrograficamente identici* (secondo Artini), a quelli dei dintorni di Aosta. Essi sono insomma un terreno ben noto ai geologi francesi, da Carlo Lory in poi, sotto il nome di *schistes lustrés* (zona delle Pietre verdi di B. Gastaldi), tanto sviluppato nelle Alpi Occidentali.

Ciò è sufficiente per convincerci che il profilo del *Vallon de Jula*, dato da Schoeller a p. 378 del suo lavoro, è non solo inesatto dal punto di vista topografico, litologico e tettonico, ma addirittura inaccettabile, al pari del profilo, da lui solo descritto, tra Courmayeur e Morgex (p. 380). Ad esempio, contrariamente alla negazione sua, questo profilo comprende certamente la zona dei calcescisti a belemniti, di cui io vidi evidenti tracce presso Pré Saint-Didier, dove, con attive e diligenti ricerche se ne potranno ritrovare⁽³⁾.

L'A. sostiene questa tesi: che fra il Colle del Piccolo S. Bernardo e quello della Seigne si possono riconoscere due formazioni: una liasica, fra il primo Colle ed il Colle di Breuil, ed una eocenica fra questo ed il secondo di quei Colli.

L'autore riconosce che la presenza di belemniti al Colle della Seigne e l'assenza di nummuliti costituiscono obiezioni, io direi anzi fatti, gravi

(1) Io gli sono grato per gli elogi fatti alla nostra carta geologica al 400.000 (1908), pur rammaricando la sua affermazione che la parte oltre confine sia fantastica. Ad ogni modo quella parte deve essera stata copiata da carte geologiche francesi stampate.

(2) S. FRANCHI, « Bollettino della Società Geologica Italiana », anno 1907.

(3) Delle lenti di prasiniti tipiche si osservano pure nella salita al Piccolo San Bernardo e alle falde del Monte Cormet, a nord della Dora.

contro la sua ipotesi; però egli cercherebbe di diminuirne l'importanza, supponendo che la mia belemnite (delle altre non si parla, *et pour cause*) sia stata fluitata e che le nummiliti e le elminthoidi, che egli confessa manchino del tutto, siano state distrutte dal metamorfismo.

Ma con tali metodi, ne converrà il giovane collega Schœller, si possono risolvere tutte le difficoltà e far trionfare molte ipotesi.

Orbene, a dir la verità, non conoscendo io le regioni oltre confine che per brevi tratti, verso Seez, oltre la punta Lèchaud e oltre il Colle della Seigne, io posso anche ammettere che le estese formazioni di terreni eocenici cui si accenna, esistano realmente, e si avvicinino anche di molto al nostro confine, ma che non l'oltrepassino, se mai, che di poco, in qualche punto singolare.

Questa può essere la spiegazione delle lunghe discussioni e delle oscillazioni, fra pareri contrari, di geologi di valore, messe bene in vista da Schœller, nel suo diligente lavoro, oscillazioni a cui io non ho mai partecipato, come lealmente si riconosce.

Esaminiamo ora un po' i fatti.

La grande e caratteristica cortina di alte cime: Monte Crammont (2737 m.), M. Nix, M. Berio Blanc (3259 m.), M. Fortin (2750 m.), M. Percé (2844 m.), Tête de la Ouille (3099 m.), ecc., cortina che cela il gruppo del Monte Bianco a chi risalga la strada del piccolo S. Bernardo, è stata arditamente scolpita dall'erosione in una potente massa di calcescisti di una uniformità singolare di tinte e di forme, con pendenza prevalente verso sud, per modo che nelle sue falde meridionali ⁽¹⁾ dovrebbe esser facile riconoscere, se esistesse, il supposto limite fra due così distinte formazioni, l'iasica l'una, terziaria l'altra. Invece non c'è proprio nessun indizio che possa giustificare una tale ipotesi.

Nella gita fatta nel 1907 con W. Kilian e P. Lory noi non avemmo il più lontano sospetto che la pila di banchi di breccie poligeniche, con la quale culmina il M. Crammont, fosse eocenica; così per quella del M. Fortin, pure avendo visto d'un colpo d'occhio tutte quelle chiarissime stratificazioni.

Lo studio del lungo profilo fra il M. Grand'Assaly ed il Colle del Gigante, stampato nella relazione del Congresso della Società Geologica Italiana, nel settembre del 1907 ad Aosta ⁽²⁾, nel quale tutta la serie di calcescisti, con frequenti intercalazioni di banchi di breccie poligeniche e di calcari cristallini è compresa in una evidente, sebbene complessa sinclinale di Trias, è sufficiente per dimostrarci l'inammissibilità dell'ipotesi, che una parte qualsiasi dei calcescisti della zona di Courmayeur, e meno di tutte quella delle vette del M. Crammont e del M. Fortin, siano terziarie, e appartengano,

(1) Dalle quali si staccano soventi enormi lastroni, da cui derivarono i nomi di varie cime: Côte de Laugeron, M. Belleface, ecc.

(2) « Bollettino della Società Geologica Italiana », anno 1907.

in qualsiasi modo, ad una *nappe* che si sia incassata in mezzo alla massa dei calcescisti giuresi.

Questo profilo, sintetizzante le osservazioni fatte lungo il corso della Dora, da Pré St. Didier a Dolonne, di quelle fatte nella salita da La Tuile alla vetta del Monte Crammont, nelle salite dal Piccolo S. Bernardo al Monte Berio Blanc e alla punta della Ouille, dallo stesso Ospizio al Colle della Seigne, per il Colle di Breuil e la punta Léchaud, ecc., mi permette di essere assolutamente tranquillo sulla giustezza della mia concezione, resa nelle carte geologiche stampate al 100.000, la quale è pienamente contrastante con quella che il sig. Schoeller sembra sostenere.

Io prego il giovane Collega di notare: che per lunghi anni io ho studiato, anche al microscopio, tutti i tipi rocciosi delle due suddette zone, delle pietre verdi e di Courmayeur⁽¹⁾, allo scopo che credo di avere, oltre ogni desiderio, raggiunto, di stabilire la loro identità, fin nei più minuti particolari. E ciò, a partire dalla valle Grisanche, a tutte le valli delle Alpi Cozie, delle Alpi Marittime e del Gruppo di Voltri, come risulta dal mio lavoro sull'età mesozoica della zona delle pietre verdi⁽²⁾.

Dopo ciò io confido che egli vorrà convincersi che io non potevo cadere nel gravissimo errore, che mi si vorrebbe attribuire, di aver messo cioè nel Giurese e nel Lias enormi distese di formazioni eoceniche, comprendenti gran parte del contrafforte separante la Valle Veni da quella del Piccolo S. Bernardo, dove sarebbero venute in grazia di un grande carreggiamento da lui non definito, nella parte al di qua del confine, e del quale non si vede alcuna chiara traccia.

(1) Pubblicando studi petrografici specialmente sulle rocce verdi e sulle loro forme metamorfiche.

(2) Le grandi particolarità litologiche del gruppo della Punta Rossa rispetto alle grandi masse di calcescisti e le forme altamente cristalline, con biotite automorfa, alla Tête du Chargeur, potrebbero, fino ad un certo punto, giustificare l'ipotesi avanzata da F. HERMANN (*Eclogae geologicae Helvetiae*, l. XXI, n. 1); ma per mio conto, allo stato attuale dello studio delle idee di Schoeller, l'ipotesi non mi sembra fondata sopra chiari e solidi dati di fatto.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sulla curvatura geodetica sopra una superficie e sulla formula di Liouville.* Nota di E. RAIMONDI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Indichiamo con σ la superficie descritta da un punto $P(x_1, x_2)$, dove x_1, x_2 sono le coordinate curvilinee, o di Gauss, sopra σ .

Supponiamo che le linee $x_2 = \text{cost.}$, $x_1 = \text{cost.}$, di σ , siano fra loro ortogonali, cioè che si abbia

$$(1) \quad \frac{dP}{dx_1} \times \frac{dP}{dx_2} = 0;$$

allora se con t_1 e t_2 indichiamo i versori tangenti in P a queste linee, ed aventi il verso rispettivamente di $\frac{dP}{dx_1}$ e $\frac{dP}{dx_2}$, si ha pure

$$(2) \quad t_1 \times t_2 = 0.$$

Consideriamo inoltre una curva L passante per P e giacente sopra σ , della quale indichiamo con s l'arco; se poniamo

$$t = \frac{dP}{ds};$$

t è un versore tangente in P alla curva L .

Chiamando φ l'angolo dei versori t e t_1 (cioè della curva L con la curva $x_2 = \text{cost.}$), ed $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ le *curvature geodetiche* ordinatamente delle curve L , $x_2 = \text{cost.}$, $x_1 = \text{cost.}$, si ha che

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos \varphi + \frac{1}{\rho_2} \sin \varphi - \frac{d\varphi}{ds}.$$

Questa formula è stata stabilita, in una Nota recentissima, dal professore F. Sbrana ⁽²⁾, il quale ha data pure una nuova dimostrazione della nota formula di Liouville, per la curvatura totale di una superficie, basandosi su proprietà del trasporto per parallelismo, nel senso di Levi-Civita.

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) F. SBRANA, *Parallelismo e curvatura geodetica sopra una superficie*. Questi « Rendiconti », vol. IX, serie 6^a, 1° sem., fasc. 12, giugno 1929.

In questa Nota espongo altre due dimostrazioni [della formula (3) e di quella di Liouville] molto semplici, ed indipendenti dalle proprietà del parallelismo.

2. Ricordiamo intanto che se $\frac{1}{\rho}$ è la curvatura di L in P, si ha, per una delle formule di Frenet,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{n^*}{\rho},$$

dove n^* è un versore diretto secondo la normale principale ad L in P.

Ciò posto, se si proietta (ortogonalmente), sul piano tangente a σ in P, la normale principale di L, si ha una retta che si chiama *normale principale relativa a σ* della curva L; e se n è un versore parallelo a tale retta e si indica con $\frac{n}{\rho}$ la proiezione del vettore $\frac{n^*}{\rho}$ sul piano tangente in P, allora $\frac{1}{\rho}$ è la *curvatura geodetica* di L in P, e si ha ovviamente ⁽¹⁾

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{n^* \times n}{\rho} = n \times \frac{dt}{ds}.$$

Ora, si può porre ⁽²⁾

$$(5) \quad \begin{cases} t = \cos \varphi \cdot t_1 + \sin \varphi \cdot t_2, \\ n = \sin \varphi \cdot t_1 - \cos \varphi \cdot t_2; \end{cases}$$

perciò, sostituendo nella (4),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= (\sin \varphi \cdot t_1 - \cos \varphi \cdot t_2) \times \\ &\times \left[-(\sin \varphi \cdot t_1 - \cos \varphi \cdot t_2) \frac{d\varphi}{ds} + \cos \varphi \cdot \frac{dt_1}{ds} + \sin \varphi \cdot \frac{dt_2}{ds} \right], \end{aligned}$$

e, siccome t_1 e t_2 sono vettori unitari,

$$(6) \quad t_1 \times \frac{dt_1}{ds} = 0, \quad t_2 \times \frac{dt_2}{ds} = 0$$

quindi, tenendo presente anche la (2),

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} + \sin^2 \varphi \cdot t_1 \times \frac{dt_2}{ds} - \cos^2 \varphi \cdot t_2 \times \frac{dt_1}{ds};$$

(1) Confronta ad esempio: BURALI-FORTI e BOGGIO, *Espaces courbes; critique de la relativité*, STEN, Torino, 1924, p. 181.

(2) Con questa posizione si viene ad attribuire alla coppia $t \rightarrow n$ un verso opposto a quello della coppia di riferimento $t_1 \rightarrow t_2$. Abbiamo fatto così, allo scopo di ritrovare la (3) cogli stessi segni, dato che anche il prof. Sbrana adottò tale verso.

ma dalla (2) si deduce

$$t_2 \times \frac{dt_1}{ds} = -t_1 \times \frac{dt_2}{ds},$$

perciò

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} + t_1 \times \frac{dt_2}{ds}.$$

Osservando che, in virtù della prima delle (5),

$$\frac{dt_2}{ds} = \frac{dt_2}{dP} t = \frac{dt_2}{dP} t_1 \cos \varphi + \frac{dt_2}{dP} t_2 \sin \varphi = \frac{dt_2}{ds_1} \cos \varphi + \frac{dt_2}{ds_2} \sin \varphi,$$

dove ds_1 e ds_2 sono gli elementi d'arco delle curve $x_2 = \text{cost.}$ ed $x_1 = \text{cost.}$, si ha la formula

$$(7) \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} + \cos \varphi \cdot t_1 \times \frac{dt_2}{ds_1} + \sin \varphi \cdot t_1 \times \frac{dt_2}{ds_2},$$

che sostanzialmente non differisce dalla (3), perchè, se si applica la (7) alle curve $x_2 = \text{cost.}$ ed $x_1 = \text{cost.}$, si deve porre rispettivamente $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$; e, chiamando $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho_2}$ le curvature geodetiche di tali curve si ottiene

$$(8) \quad \frac{1}{\rho_1} = t_1 \times \frac{dt_2}{ds_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = t_1 \times \frac{dt_2}{ds_2},$$

e, sostituendo nella (7) si ha la (3).

3. Passiamo ora a dimostrare la formula di Liouville.

La curvatura totale, o di Gauss, della superficie σ in P si può esprimere colla formula ⁽¹⁾

$$K = \frac{dN \wedge \delta N \times N}{dP \wedge \delta P \times N}$$

dove N è un versore normale a σ in P, ed avente un verso stabilito a piacere; dP e δP sono due spostamenti infinitesimi di P sopra σ , e dN , δN i corrispondenti incrementi di N .

Supponendo che dP sia tangente alla curva $x_2 = \text{cost.}$ e δP tangente alla $x_1 = \text{cost.}$, si può porre

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1, \quad \delta P = \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2$$

onde

$$dN = \frac{\partial N}{\partial x_1} dx_1, \quad \delta N = \frac{\partial N}{\partial x_2} dx_2$$

(1) Confronta ad esempio: BURALI-FORTI e BOGGIO, op. cit., p. 155.

e la (9) ci dà:

$$(10) \quad K = \frac{\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_2} \times \mathbf{N}}{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2} \times \mathbf{N}},$$

ma, poichè i vettori \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 sono unitari, ortogonali e tangenti a σ , si può porre

$$\mathbf{N} = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2;$$

e quindi

$$K = \frac{\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_2 - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_1}{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_2};$$

e, poichè $\mathbf{N} \times \mathbf{t}_1 = 0$, $\mathbf{N} \times \mathbf{t}_2 = 0$, si trae

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_1 = -\mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_1 = -\mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2},$$

e, sostituendo,

$$mK = -\mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_2 + \mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_2,$$

dove si è posto

$$m = \text{mod } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_1} \cdot \text{mod } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2};$$

segue che

$$(11) \quad mK = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} \cdot \mathbf{N} \right) \times \mathbf{t}_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2} \cdot \mathbf{N} \right) \times \mathbf{t}_2.$$

Ora osserviamo che $\mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} \cdot \mathbf{N}$ non è altro che la componente, secondo la normale \mathbf{N} , del vettore $\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1}$, e quest'ultimo, in virtù di una relazione analoga alle (6) è uguale a \mathbf{t}_1 , perchè \mathbf{t}_1 è unitario; perciò si può porre

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} \cdot \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} + u \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{N} \times \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2} \cdot \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2} + v \mathbf{t}_2; \end{cases}$$

ove u e v sono due convenienti numeri reali (funzioni di P); sostituendo quindi nella (11), si ha

$$mK = -\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Ma dalle (12) si ricava

$$u = -t_2 \times \frac{\partial t_1}{\partial x_1}, \quad v = -t_2 \times \frac{\partial t_1}{\partial x_2} = t_1 \times \frac{\partial t_2}{\partial x_2},$$

quindi, sostituendo,

$$(13) \quad mK = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(t_2 \times \frac{\partial t_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(t_1 \times \frac{\partial t_2}{\partial x_2} \right).$$

Questa, sostanzialmente, è la formula di Liouville per la curvatura totale⁽¹⁾.

4. Alla (13) si può dare agevolmente la forma ordinaria, osservando che, essendo le linee coordinate ortogonali, si ha

$$ds^2 = dP^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \right)^2 dx_1^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^2 dx_2^2 = a_{11} dx_1^2 + a_{22} dx_2^2,$$

perciò

$$(14) \quad ds_1 = \left(\text{mod } \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) dx_1 = \sqrt{a_{11}} dx_1, \quad ds_2 = \left(\text{mod } \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_2 = \sqrt{a_{22}} dx_2$$

dopo ciò si ha dalle (8)

$$t_2 \times \frac{\partial t_1}{\partial x_1} = t_2 \times \frac{dt_1}{ds_1} \sqrt{a_{11}} = -t_1 \times \frac{dt_2}{ds_1} \sqrt{a_{11}} = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1},$$

$$t_1 \times \frac{\partial t_2}{\partial x_2} = t_1 \times \frac{dt_2}{ds_2} \sqrt{a_{22}} = \frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2};$$

e la (13) diviene

$$(15) \quad K = \frac{1}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1} \right) \right]$$

che è l'espressione usuale della formula di Liouville.

5. La formula di Liouville si può anche mettere sotto una forma intrinseca molto semplice, dovuta al prof. Gregorio Ricci⁽²⁾.

(1) Un'altra dimostrazione, anche per linee coordinate non ortogonali, si trova in: BURALI-FORTI, *Fondamenti per la Geometria Differenziale su di una superficie, ecc.*, n. 45 «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo»; tomo XXXIII, 1° sem. 1912.

(2) G. RICCI, *Lezioni sulla teoria delle superficie*. Drucker, Padova, 1898, p. 190.

Infatti, la (15) si può scrivere:

$$K = \frac{1}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \left[\sqrt{a_{22}} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\rho_2} - \sqrt{a_{11}} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial x_2} \right]$$

od anche, ricordando le (14),

$$(16) \quad K = \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{\rho_2} - \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial s_1} - \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial s_2};$$

ma è chiaro che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial s_1} &= \frac{1}{2\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial a_{22}}{\partial s_1} = \frac{1}{2\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial P}{\partial x_2} \times \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial P}{\partial x_2} = t_2 \times \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial P}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

ed inoltre che

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial P}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \right) \frac{\partial P}{\partial x_1},$$

quindi, ricordando anche le (8),

$$\frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial s_1} = t_2 \times \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial P}{\partial s_1} = \sqrt{a_{22}} t_2 \times \frac{\partial t_1}{\partial s_2} = -\sqrt{a_{22}} t_1 \times \frac{\partial t_2}{\partial s_2} = -\frac{\sqrt{a_{22}}}{\rho_2};$$

ed, analogamente,

$$\frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial s_2} = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\rho_1};$$

infine, sostituendo nella (16),

$$K = \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{\rho_2} - \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2},$$

che non differisce dalla formula stabilita dal prof. Ricci.

Matematica. — *Metodo generale per la costruzione delle «funzioni separate» di Fourier e delle «funzioni caratteristiche» di De La Vallée Poussin.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. A. CROCCO.

L'importanza delle funzioni esprimenti l'ordinata di una linea che comprende un arco finito, di forma arbitraria, e coincide con l'asse delle ascisse per tutto il resto del suo corso, è stata rilevata da Fourier che dette ad esse il nome di *fonctions séparées* o di *parties de fonctions* ⁽²⁾.

Se nell'intervallo in cui non son nulle le dette funzioni hanno un valore costante, uguale all'unità, esse coincidono con le *funzioni caratteristiche d'insieme* di C. De La Vallée Poussin ⁽³⁾ così definite non solo per l'intervallo lineare, ma anche per uno spazio a più dimensioni.

In alcuni dei precedenti miei scritti ho adoperato funzioni di questa specie chiamandole *funzioni limitatrici* ⁽⁴⁾, considerando anzi il caso di funzioni a più valori $\varphi_{x_1, x_2, \dots} (a_1, a_2, \dots)$ od anche più generalmente $\varphi_{x_1, x_2, \dots} (f_1, f_2, \dots)$ con questa notazione, della quale mi servirò qui appresso, volendo indicare una funzione che in successivi intervalli — $\infty x_1, x_1 x_2, \dots$ ha espressioni analitiche diverse f_1, f_2, \dots .

Queste funzioni sono esprimibili mediante integrali definiti da formare di volta in volta in ogni caso particolare. Ma, come ora mostrerò, per formare tutte le funzioni che in pratica occorrono, ne bastano tre sole fondamentali, di quelle più semplici, a valore costante negli intervalli nei quali non son nulle, e queste sono poi tutte deducibili da una sola funzione che può essere anche arbitrariamente costruita.

Dalle funzioni fondamentali non periodiche così ottenute si passa agevolmente ad altre funzioni periodiche anch'esse fondamentali per la rappresentazione delle funzioni poligonali di forma arbitraria.

1. Nel caso più semplice di una sola variabile, cioè dell'intervallo lineare, tutte le funzioni separate si possono ridurre a tre tipi fondamentali: $\varphi_a(f, 0)$, $\varphi_{a,b}(0, f, 0)$, $\varphi_b(0, f)$, cioè a uno dei casi in cui la funzione esiste ed ha l'espressione f a sinistra del punto di ascissa a , nell'intervallo

(1) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(2) *Théorie analytique de la chaleur*, § 428, p. 530.

(3) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'Ensemble, Classes de Baire*, p. 7, Paris, 1916.

(4) In una mia Nota «R. C.», vol. XXXI, fasc. 12, seduta 18 giugno 1922.

(a, b) o a destra del punto di ascissa b ed è nulla per ogni altro valore della ascissa.

Al caso particolare in cui la funzione f sia costante, ed $= 1$, corrispondono le funzioni caratteristiche $\varphi_a(1, 0)$, $\varphi_{a,b}(0, 1, 0)$, $\varphi_b(0, 1)$, dei tre intervalli $-\infty a$, ab , $b\infty$, con le quali, adoperate come fattori, si possono formare tutte le funzioni separate poichè è evidentemente:

$$(1) \quad \varphi_a(f, 0) = f\varphi_a(1, 0) \quad , \quad \varphi_{a,b}(0, f, 0) = f\varphi_{a,b}(0, 1, 0) \quad , \\ \varphi_b(0, f) = f\varphi_b(0, 1) .$$

Sono dunque queste le tre funzioni fondamentali che si tratta di costruire.

2. Per costruirle si formi, nel modo come si dirà in appresso, una funzione $F = \varphi_0(f_1, f_2)$ analiticamente espressa da f_1 per $x < 0$ e da f_2 per $x > 0$. Quali che siano queste due funzioni f_1, f_2 purchè fra loro diverse, si ha sempre, con le notazioni innanzi indicate,

$$(2) \quad F - f_1 = \varphi_0(0, f_2 - f_1)$$

cioè una funzione nulla per $x < 0$ ed espressa da $f_2 - f_1$ per $x > 0$. Da questa poi segue subito

$$(3) \quad (F - f_1)(f_2 - f_1)^{-1} = \varphi_0(0, 1) .$$

Ed analogamente si otterrebbe

$$(4) \quad (F - f_2)(f_1 - f_2)^{-1} = \varphi_0(1, 0) .$$

Ma più semplicemente basta osservare che si passa dall'una all'altra delle due funzioni $\varphi_0(0, 1)$ e $\varphi_0(1, 0)$ col porre in una di esse $-x$ invece di x , il che mostra che non si tratta di due funzioni veramente distinte.

Un'altra funzione diversa si ottiene sottraendo la (4) dalla (3) e si ha

$$(5) \quad \varphi_0(0, 1) - \varphi_0(1, 0) = \varphi_0(-1, 1)$$

ed analogamente si otterrebbe

$$(6) \quad \varphi_0(1, 0) - \varphi_0(0, 1) = \varphi_0(1, -1)$$

per la quale vale la stessa osservazione fatta innanzi. Se poi le due funzioni (3) e (4) si sommano dopo aver posto in esse rispettivamente $x - a$ e $x - b$ in luogo di x , si ha

$$(7) \quad \varphi_a(0, 1) + \varphi_b(1, 0) = \varphi_{a,b}(1, 2, 1)$$

e quindi

$$(8) \quad \varphi_a(0, 1) + \varphi_b(1, 0) - 1 = \varphi_{a,b}(0, 1, 0)$$

e si ottiene così la terza funzione caratteristica fondamentale.

3. Resta solo da assegnare effettivamente la funzione $F(f_1, f_2)$ la quale può essere ottenuta in vari modi. Ad esempio come caso particolare della espressione ⁽²⁾,

$$(9) \quad F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1 + f_2 e^{n\psi}}{1 + e^{n\psi}}$$

in cui ψ, f_1 e f_2 sono funzioni di x, y, z , e che coincide con f_1 per tutti i valori negativi di ψ , con f_2 per tutti i valori positivi di ψ e prende il valore $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ per $\psi = 0$.

Oppure si può far uso di una di quelle funzioni biformi, segnalate già dallo stesso Fourier ⁽²⁾ come ad esempio

$$(10) \quad \varphi_0(e^{-x}, e^x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos qx dq}{1 + q^2} \quad \varphi_0(e^{-x}, -e^{-x}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin qx dq}{1 + q^2}.$$

Infine si può partire dalla funzione I_x , intero di x , osservando che essa dà direttamente

$$(11) \quad \varphi_0(0, 1) = (Ie^x)^{Ie^{-x}} \quad \varphi_0(1, 0) = (Ie^{-x})^{Ie^x}$$

dalle quali relazioni poi segue

$$(12) \quad \varphi_0(-1, 1) = (Ie^x)^{Ie^{-x}} - (Ie^{-x})^{Ie^x}.$$

Le funzioni ottenute in uno dei detti modi possono differire per il loro comportamento nel punto di discontinuità dove, a seconda della funzione di partenza, si può avere o un punto isolato o un valore coincidente con quello di una delle funzioni f_1, f_2 . Si possono rendere identiche due funzioni che differiscono solo in tale particolare aggiungendo all'una od all'altra di esse un termine, preso col segno opportuno, costituito da una funzione puntiforme come

$$(13) \quad y = kIe^{-(x-a)^2}$$

la quale è dappertutto nulla ed ha il valore k nel punto $x = a$. Si può perciò scegliere ad arbitrio la forma che si vuole considerare normale delle funzioni.

4. Assumendo come normali quelle funzioni per le quali nel punto di discontinuità si ha $y = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ si vede che le tre funzioni fonda-

(1) Vedi J. C. MAXWELL, *Treatise on Electricity and Magnetism*, 2nd Edition, Oxford, 1881, vol. I, p. 7.

(2) *Théorie analytique de la chaleur*, § 358. figg. 19, 20.

tali costruite nel modo innanzi indicato corrispondono a funzioni già note ed ordinariamente espresse con integrali definiti⁽¹⁾. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \left\{ \begin{aligned} \varphi_0(-1, 0, 1) &= \operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x\alpha}{\alpha} d\alpha \\ (15) \quad (A) \quad \varphi_0\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) &= \operatorname{sem} \operatorname{sgn} x = \frac{1}{\pi} e^{kx} \int_0^\infty \frac{\alpha \sin x\alpha + k \cos x\alpha}{k^2 + \alpha^2} d\alpha \\ (16) \quad & \varphi_{-1,1}\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right) = \operatorname{Dir} x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos x\alpha d\alpha. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dove è da osservare che la (15) e la (16) sono legate alla (14) dalle relazioni

$$(17) \quad \operatorname{sem} \operatorname{sgn} x = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} x)$$

$$(18) \quad \operatorname{Dir} x = \frac{1}{2} \{ \operatorname{sgn} (x + 1) - \operatorname{sgn} (x - 1) \}.$$

Riguardo ai simboli qui adoperati quello $\operatorname{sgn} x$, di Kronecker per la (14) è da lungo tempo in uso. Per la (15), detta qualche volta la funzione *telegrafica* o dei *telegrafisti*, O. Heaviside aveva adoperato⁽²⁾ il simbolo \mathbf{r} , al quale il prof. G. Giorgi aveva proposto⁽³⁾ di sostituire l'altro $\mathbf{r}(x)$. In una mia comunicazione al Congresso dei Matematici di Bologna⁽⁴⁾ ho proposto di chiamare *semisegno* di x questa funzione indicandola col simbolo $\operatorname{sem} \operatorname{sgn} x$, e di indicare brevemente $\operatorname{Dir} x$ la funzione (16) che è il *fattore discontinuo di Dirichlet*.

5. Le funzioni fondamentali (A) si estendono al caso del piano (dello spazio) ponendo in esse invece di x il prodotto $xy(xyz)$ delle coordinate di un punto o dei coseni direttori $\alpha\beta(\alpha\beta\gamma)$ del raggio vettore passante per esso, tenendo presente che questi coseni sono legati da una relazione di ortogonalità, e si ottengono delle funzioni come ad esempio

$$(19) \quad \operatorname{sgn} xy \qquad \operatorname{sem} \operatorname{sgn} xyz$$

$$(20) \quad \operatorname{sem} \operatorname{sgn} \alpha\beta \qquad \operatorname{sgn} \alpha\beta\gamma$$

(1) Recentemente il prof. G. GIORGI (« Boll. dell'U. M. I. », p. 63, vol. VI, 1927) ha mostrato come queste funzioni possano essere sviluppate in serie di Texeira.

(2) *Electromagnetic Theory*, vol. II, § 241, p. 36.

(3) *Sul calcolo delle soluzioni funzionali ecc.*, « Atti della A. E. I. », vol. IX, fasc. VI, § 36.

(4) Sulla *Estensione dei metodi della geometria analitica alla rappresentazione dello spazio fisico*.

che nei diversi quadranti (ottanti) hanno alternativamente il valore ± 1 , e lungo gli assi e nell'origine il valore zero o $\frac{1}{2}$. La considerazione di funzioni di questo tipo ricorre continuamente nell'analisi dove vengono ancora descritte a parole, o definite mediante enumerazioni di valori, in mancanza di una espressione che le rappresenti.

Si scorge che le funzioni (19), (20) eguagliate allo zero, od all'unità, positiva o negativa, forniscono senz'altro le equazioni che rappresentano quadranti del piano od ottanti dello spazio, nel mentre con la (16) si ha agevolmente la rappresentazione di regioni limitate, cosicchè è, ad esempio

$$(21) \quad \text{Dir} \left(\frac{x - \pi}{\pi} \right) \text{Dir} \left(\frac{y - \pi}{\pi} \right) = 1$$

l'equazione del «quadrato fondamentale» del piano⁽¹⁾, ed analogamente

$$(22) \quad \text{Dir } 2x + \text{Dir } 2y + \text{Dir } 2z = 3$$

l'equazione del cubo solido di lato = 1 col centro nell'origine⁽²⁾.

6. A funzioni periodiche di una variabile si giunge dalle (A) ponendo in esse $\sin x$, o $\cos x$ in luogo di x e si hanno le tre funzioni fondamentali seguenti

$$\begin{aligned} (23) & \quad \text{sgn } \sin x = \psi_{0,\pi}(0, 1, 0, -1) \\ (24) \quad (B) & \quad \text{sem sgn } \sin x = \psi_{0,\pi}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right) \\ (25) & \quad \text{Dir } \sin x = \psi_{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}\left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

La (23) non è altro che il *fattore alternante* la prima e più semplice delle funzioni circolari discontinue⁽³⁾, la (24) il *fattore intermittente* $\frac{1}{2} \left(1 + i^{21} \frac{x}{\pi} \right)$ e dalla (25), si ottiene immediatamente la funzione puntiforme periodica fondamentale $2(1 - \text{Dir } \sin x)$ la quale è zero dappertutto tranne nei punti di ascissa $\frac{\pi}{2}(1 + 2k)$, con k intero nei quali ha il valore + 1.

7. Con le tre funzioni fondamentali (A) e le corrispondenti funzioni periodiche (B) che ne derivano è possibile estendere i metodi della geo-

(1) L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, p. 435.

(2) Per le singolarità nell'origine, lungo gli assi e sui piani coordinati nonchè sul perimetro e la superficie di contorno si veggia una mia piccola Nota nel «Boll. dell'U. M. I.», anno VI, n. 4, ottobre 1927.

(3) Intorno al fattore alternante ed alla sua generazione geometrica, si veggia una mia piccola Nota nel «Boll. dell'U. M. I.», anno VIII, n. 3, giugno 1929.

metria analitica anche alla rappresentazione di linee e di superfici formate da porzioni diverse, aventi ciascuna espressione analitica propria, nonchè delle regioni del piano e dello spazio delle quali esse formano il contorno, ed inoltre, come è necessario nelle questioni concernenti lo spazio fisico, reale o figurativo, anche alla rappresentazione di quelle grandezze che sono espresse da funzioni diverse in domini del piano e dello spazio della specie anzidetta aventi forma e posizione assegnate ad arbitrio.

I procedimenti particolari per tali estensioni essendo stati esposti nelle mie precedenti Note, non occorre ritornare su di essi, perciò mi limiterò qui alla sola osservazione di ordine generale seguente.

8. Poichè quando si abbia una linea (od una superficie) lungo la quale (o sulla quale) si annulla una funzione F che è sempre positiva in una delle due regioni nelle quali la detta linea (o la detta superficie) divide il piano (o lo spazio), ed è sempre negativa nell'altra regione, le equazioni delle due dette regioni (piane o solide) e dell'elemento separatore sono

$$(26) \quad \operatorname{sgn} F = 1 \quad \operatorname{sgn} F = 0 \quad \operatorname{sgn} F = -1$$

siccome $\operatorname{sgn} F = 0$ è identicamente equivalente a $F = 0$, così si scorge che le ordinarie equazioni delle linee e delle superficie rappresentano le discontinuità, lineari o superficiali, delle funzioni biformi che hanno valori costanti nelle due regioni da esse separate e che comprendono quelle linee o superficie come elementi isolati singolari.

Meccanica. — *I primi elementi d'una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi.* Nota II⁽¹⁾ di G. MAZZONE-SANGIORGI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

II. — CONFERME SPERIMENTALI.

Le prime conferme sperimentali delle tre leggi di cui nella 1^a Nota⁽²⁾ le ho avute confrontando le portate a mezzo di esse desunte, con le misure di portata ottenute da Bazin nelle sue molto accurate esperienze (in un canale a sezione rettangolare e con traversa a cresta sottile) ed i casi esaminati sono tali e così diversi fra loro per caratteristiche, che il controllo, come si vedrà subito, è anche completo ed esauriente.

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1929.

(2) Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. 9, p. 1085.

Esporrò qui di seguito i risultati ottenuti per la portata in sette casi. I primi sei sono a *vena libera* (fig. 1), cioè di quelli in cui al di sotto della vena, a valle della traversa, ha libero accesso l'aria e quindi anche in tale spazio si ha la pressione atmosferica; il settimo è a *vena aderente* alla parete della traversa che è rivolta verso valle (fig. 2) e in esso si ha in prossimità della cresta della traversa una regione chiusa con una pressione notevolmente inferiore a quella atmosferica.

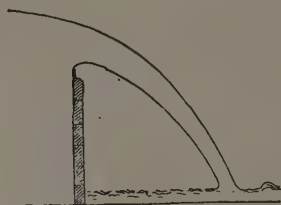


Fig. 1.



Fig. 2

1° Caso: a traversa verticale. — La resistenza della traversa alla base della lama stramazante, e nella direzione orizzontale (2ª legge) è costituita dalla sola pressione statica $\frac{2}{3}H$, perchè la pressione dinamica, dello straterello che tende a salire verticalmente, lungo la parete di ritenuta, ha una proie-

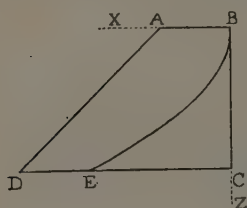


Fig. 3.

zione orizzontale nulla. Nella fig. 3 ho rappresentato il diagramma delle pressioni nella sezione della lama stramazante lungo il ciglio della traversa. BC , per la 1ª legge, dev'essere uguale a $\frac{2}{3}H$, mentre AB dev'essere uguale ad $\frac{1}{3}H$; CD ad H e CE , che è la resistenza, a $\frac{2}{3}H$. La parabola, secondo cui si propaga la resistenza (3ª legge), è BE .

La portata è data dalla somma delle velocità corrispondenti alle pressioni dinamiche $ABED$. Ritenendo, per semplicità, $H = 1$, riferendoci a due assi: X orizzontale e Z verticale con l'origine in B , e considerando che l'equazione della parabola è $z^2 = 2px$, si ha, chiamando con Q la portata dell'unità di lunghezza di ciglio della traversa,

$$(1) \quad Q = \sqrt{2g} \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{z + \frac{1}{3} - \frac{z^3}{2p}} \cdot dz.$$

Nel nostro caso, siccome per $z = \frac{2}{3}$ deve essere $x = \frac{2}{3}$, si ha $2p = \frac{2}{3}$. Sostituendo tale valore nella (1) e integrando:

$$\begin{aligned}
 Q &= \sqrt{2g} \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\zeta + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\zeta^2} \cdot d\zeta = \sqrt{2g} \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{-\zeta^2 + \frac{2}{3}\zeta + \frac{2}{9}} \cdot d\zeta \\
 &= \sqrt{2g} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{3} \right) \sqrt{-\zeta^2 + \frac{2}{3}\zeta + \frac{2}{9}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \right) \arcsen \frac{2\zeta - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{8}{9}}} \right]_0^{\frac{2}{3}} = 0.4438 \sqrt{2g}.
 \end{aligned}$$

Come ho detto nella 1^a Nota, perchè lo strato che tende a salire lungo la parete di ritenuta si possa considerare proprio tangenziale alla detta parete, almeno in prossimità del ciglio, occorre che la parete abbia una notevole altezza; di più, perchè siano trascurabili l'influenza delle pareti laterali dello stramazzone e la pendenza del pelo d'acqua, occorre che lo spessore della lama strammazzante sia molto piccolo rispetto alla lunghezza della traversa e per sè stesso. Ora, Bazin, con la traversa più alta (1^m.135) e più lunga (2^m) e col più piccolo carico (0^m.0590) trovò il coefficiente di $\sqrt{2g}$, che chiamò m , uguale a 0.4440.

Come si vede, i due valori, teorico e sperimentale, si possono ritenere assolutamente coincidenti.

2° Caso: *a traversa inclinata a 45° verso monte.* — In questo caso la resistenza CE della traversa è $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos 45^\circ = 0.9024$ e quindi $2p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : 0.9024 = 0.4925$. Per questo valore di $2p$, com'è facile vedere guardando la (1) ed eseguendo l'integrazione, si ha

$$m = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\zeta + \frac{1}{3} - \frac{\zeta^2}{0.4925}} \cdot d\zeta = 0.3988.$$

Bazin cominciò le esperienze su tale tipo di traversa (alta e lunga sempre come prima) con un carico minimo di 0^m.2404 ed andò sino ad un carico di 0^m.4489, ottenendo coefficienti variabili da 0.3911 a 0.3984.

Questa variazione io l'ho spiegata, ma qui non è il caso di insistervi, perchè comunque la conferma del mio procedimento è chiarissima lo stesso.

3° Caso: *a traversa verticale munita in cresta d'una placca orizzontale rivolta verso monte.* — In questo caso, se lo straterello, che lambisce la faccia

inferiore della placca, potesse disporsi proprio orizzontale, la resistenza della traversa sarebbe 1 e quindi $2p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.4444$ ed

$$m = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\chi + \frac{1}{3} - \frac{\chi^2}{0.4444}} \cdot d\chi = 0.3742.$$

Bazin, con una placca orizzontale larga 0^m.15 ed il carico di 0^m.2451 (il più piccolo adottato) ottenne 0.3783.

La placca, per la sua piccola larghezza, probabilmente non bastava a far rivolgere orizzontalmente lo straterello a contatto e quindi la resistenza della traversa era minore di 1 e la portata risultava lievissimamente maggiore di quella teorica, che è la minima possibile.

4° Caso: a traversa inclinata, di 3 di altezza per 1 di base, verso valle. — A tale inclinazione di traversa adottata da Bazin corrisponde l'angolo sulla orizzontale di 71° 33' 54".2. La resistenza della traversa è quindi $2/3 - 1/3 \cos 71^\circ 33' 54''.2 = 0.5613$. Da cui $2p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : 0.5613 = 0.7919$ ed

$$m = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\chi + \frac{1}{3} - \frac{\chi^2}{0.7919}} \cdot d\chi = 0.4610.$$

Bazin, col carico di 0^m.0502 (il più piccolo adoperato), trovò 0.4616.

5° Caso: a traversa inclinata a 45° verso valle. — La resistenza della traversa è $2/3 - \frac{1}{3} \cos 45^\circ = 0.4310$; per cui $2p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : 0.4310 = 1.0313$ ed

$$m = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\chi + \frac{1}{3} - \frac{\chi^2}{1.0313}} \cdot d\chi = 0.4808.$$

Bazin, con carichi di 0^m.0421, 0^m.0631, 0^m.0829, 0^m.1029, trovò rispettivamente per m : 0.4873, 0.4787, 0.4825, 0.4777. È chiaro che, malgrado le oscillazioni ed il non assoluto rigore matematico, inevitabili nella misura di fenomeni, principalmente del genere, il limite a cui l' m sperimentale tende, specialmente se si scarta il primo che sembra ragionevolmente un po' meno attendibile degli altri, è proprio quello da me trovato.

6° Caso: a traversa inclinata a 1/2 verso valle. — L'angolo sulla orizzontale che corrisponde a tale inclinazione è 26° 33' 54".2 per cui la re-

sistenza della traversa è $2/3 - 1/3 \cos 26^\circ 33' 54''.2 = 0.3685$ e quindi $2p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : 0.3685 = 1.2060$ ed

$$m = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\chi + \frac{1}{3} - \frac{\chi^2}{1.2060}} \cdot d\chi = 0.4900.$$

Bazin, con il carico più piccolo adoperato ($0^m.0649$), trovò 0.4940.

Egli aggiunse che la detta inclinazione di traversa è quella che, per un medesimo carico, dà all'incirca la portata massima per la vena libera.

Questo si spiega agevolmente rilevando che, se la parete di ritenuta potesse essere addirittura orizzontale e lo straterello che tende a scorrere lungo essa potesse essere distinto dallo strato orizzontale inferiore proprio della lama stramazante secondo la mia schematizzazione, la resistenza della tra-

versa sarebbe $1/3$ e quindi $2p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{1}{3} = 1.3333$ ed

$$m = \int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{\chi + \frac{1}{3} - \frac{\chi^2}{1.3333}} \cdot d\chi = 0.4947.$$

Cioè la portata sarebbe pochissimo differente da quella sulla traversa inclinata a $1/2$. Però il caso non è realizzabile, perchè con una parete orizzontale lo strato adiacente ad essa non sarebbe distinto dallo strato orizzontale inferiore della lama stramazante ma i due strati si confonderebbero e quindi si avrebbe alla parete non più la resistenza $1/3$, ma $2/3$, per la pressione idrostatica intera, e la portata diventerebbe minore.

Ecco perchè Bazin riscontrò che la portata oltre quel valore non andava ed anzi diminuiva avvicinando molto la traversa alla orizzontale.

I risultati teorici, dunque, per la vena libera, nelle condizioni poste nella 1ª Nota per isolare gli elementi essenziali, concordano perfettamente con i risultati sperimentali ottenuti comunque fosse inclinata la traversa. Assumendo costantemente: lo spessore della lama stramazante uguale a $2/3 H$; la propagazione della resistenza, nell'interno della vena, parabolica; la resistenza alla base come data dalla somma della pressione statica ($2/3 H$) e della pressione dinamica ($1/3 H$) e facendo variare solo l'orientazione della pressione dinamica al variare dell'orientazione della traversa - che, nelle condizioni poste, è effettivamente il solo elemento variabile - si ritrovano perfettamente i dati sperimentali.

Ciò evidentemente si verifica anche per tutti gl'infiniti casi compresi fra quelli esaminati e significa che col mio procedimento e con i miei concetti sono riuscito ad isolare ed identificare tutti gli elementi essenziali del fenomeno ed a trovare le leggi esatte alle quali essi obbediscono. Era solo

da accertare, e ciò ai fini della generalizzazione alla quale miravo per i principi, se in altri fenomeni le medesime cause, le medesime circostanze, com'è logico, danno i medesimi effetti, ed è quanto ho pure fatto ed esporrò in appresso, specialmente per la 3^a legge, di cui, quando avrò mostrato altri fenomeni, cercheremo la giustificazione.

Per gli stramazzi, alle conferme chiare ed incontrovertibili che ho dato, ne aggiungo intanto un'altra, che ritengo molto interessante.

7° Caso: *a vena aderente*. — Secondo il mio assunto, che nel 1° Saggio, citato nella 1^a Nota pubblicata in questi « Rendiconti », misi in speciale rilievo fin da principio, le pressioni orizzontali, che si possono avere allo stato dinamico e che possono dar luogo a delle velocità, sono, in qualunque caso, quelle rappresentate dal trapezio *ABCD* della fig. 3 di questa Nota, od una parte di esse. Perchè parte possono essere contrastate dalla resistenza della traversa e, come abbiamo visto, facendo variare l'orientazione della parete di ritenuta il limite inferiore della resistenza è $\frac{1}{3} H$. Questo limite però è per la vena che si chiama comunemente *libera* (fig. 1), cioè per quella che cade liberamente nell'atmosfera e che quindi anche al disotto, a valle del ciglio della traversa, è sottoposta, alla pressione atmosferica. Ci sono invece dei casi in cui l'accesso dell'aria al disotto della vena è reso difficile o impedito addirittura, ed allora si produce ivi una rarefazione, come vedremo un'altra volta esaminando più a fondo il meccanismo sulla cresta della traversa. Il fenomeno assai interessante della depressione merita una trattazione a parte.

Per ora verificheremo che, anche quando, come ho sostenuto, nel caso estremo la vena si appoggia alla parete della traversa rivolta verso valle (*vena aderente*, fig. 2) e si produce nella piccola regione sotto la vena in prossimità del ciglio la massima depressione, non si ha, in sostanza, che l'annullamento della resistenza della traversa e la portata diviene quella corrispondente a tutte le pressioni del diagramma *ABCD*, non maggiore ⁽¹⁾.

Quindi si deve avere (considerando ora z a partire dal livello di carico)

$$(2) \quad m = \int_{\frac{1}{3}}^1 \sqrt{z} \, dz = \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{3}}^1 = 0.5384.$$

Bazin riscontrò la vena aderente in numerosi casi, ma fece uno studio più completo per soli quattro di essi, e per il caso estremo, cioè a portata massima, trovò un coefficiente 0.553 con le misure a mezzo del tubo di Pitot e 0.559 con la misura della portata a mezzo di stramazzo tarato, ma

(1) Il mio concetto riuscirà più chiaro quando, come ho promesso, dirò del modo come si produce la depressione.

osservò che l'altezza di carico misurata doveva essere moltiplicata ⁽¹⁾ per 1.029. Prendendo per il coefficiente il risultato della 2^a misura (l'altro del resto è pochissimo differente) e osservando, com'è facile vedere anche dalla (2), che la portata è proporzionale alla potenza $3/2$ dell'altezza di carico, si ha che il risultato sperimentale, per essere ridotto all'altezza di carico 1, deve essere diviso per $1.029^{3/2}$ e quindi

$$m = 0.559 : 1.029^{3/2} = 0.5355.$$

Come si vede, pure qui la coincidenza tra risultato teorico e sperimentale si può ritenere perfetta.

Dunque in tutti i casi esaminati, che rappresentano tutti i casi possibili sino ai casi estremi, le leggi poste conducono a risultati in pieno accordo con quelli sperimentali. Ora, non mi pare ragionevolmente possibile attribuire al caso una concordanza così estesa, così varia, così precisa e non credo che in fenomeni fisici complessi si possano desiderare maggiori e più chiare conferme.

La spiegazione e unificazione teorica semplicissima, che ho dato, l'ho ottenuta, si noti, senza chiedere nulla a prestito ai dati sperimentali.

Rileverò e discuterò i caratteri di generalità dei concetti che informano le leggi che si son viste confermate e ne trarrò le conseguenze. Intanto una conseguenza è chiara: che bisogna procedere in modo analogo in tutti i fenomeni in cui comunque si abbia una corrente fluida contro una parete fissa o casi assimilabili.

In seguito, fra l'altro, aggiungerò, a quanto ho esposto per quello che avviene alla parete anteriore e sulla cresta della traversa, quanto riguarda le forze verticali sulla traversa e la sezione contratta. Così, e con quello che dirò per la depressione, avremo, per il fenomeno generale di un fluido ed un solido in moto relativo, gli elementi principali per la discriminazione di quel che avviene nelle varie parti.

(1) In tutti i casi Bazin notò che la somma delle altezze: piezometrica, geometrica e cinetica, rilevate nella vena stramazzante, era un po' maggiore dell'altezza H , misurata a monte. In sostanza la differenza è dovuta alla cosiddetta velocità di arrivo.

Nei casi a vena libera, per piccoli carichi, la differenza risultava molto piccola e perciò ho trascurato di tenerne conto, quantunque avrei potuto ottenere un'ancor maggiore precisione, che non m'è parsa necessaria per confermare il mio assunto.

Meccanica. — *Sistemi odografi.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dato un punto fisso A, essendo P un punto qualunque del sistema mobile S(P), possiamo chiamare *sistema odografo* del sistema S il sistema $S_1(P_1)$ dei punti

$$P_1 = A + P'$$

perchè essendo

$$(1) \quad P_1 = P''$$

le velocità dei punti P_1 del sistema S_1 sono, in ogni istante, eguali alle accelerazioni dei punti corrispondenti del sistema S.

La corrispondenza non è necessariamente biunivoca: a tutti i punti del sistema S che, in un dato istante, hanno eguale velocità, corrisponde, nel medesimo istante, lo stesso punto del sistema S_1 .

Supponiamo che il sistema odografo $S_1(P_1)$ sia un *solido* (cioè si muova in modo che si conservino le mutue distanze). Per due punti *qualunque* P_1, Q_1 di un tale sistema S_1 , sarà

$$(2) \quad \text{mod}(P_1 - Q_1) = \text{costante},$$

o, per la (1),

$$(3) \quad \text{mod}(P' - Q') = \text{const.}$$

e inversamente.

Quindi, la condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema S(P) abbia un odografo solido, è che il modulo della differenza delle velocità di due suoi punti qualunque sia costante.

A questa condizione può darsi un'altra forma che facilmente si deduce dalla (3):

Se P, Q, R, O sono quattro punti qualunque del sistema S(P), la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema odografo sia solido è che il prodotto

$$(P' - Q') \times (R' - O')$$

sia costante.

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

Supponiamo ora che il sistema dato $S(P)$ sia un *solido*. Perchè anche il sistema $S_1(P_1)$ sia *solido*, dovrà essere, per la (1) e per l'equazione fondamentale della cinematica dei solidi,

$$(4) \quad \omega_1 \wedge (P' - \mathcal{L}') = [\omega \wedge (P - \mathcal{L})]'$$

dove ω_1 è la velocità angolare del movimento di S_1 e ω quella del movimento di S . Oppure

$$(5) \quad (\omega_1 - \omega) \wedge (P' - \mathcal{L}') = \omega' \wedge (P - \mathcal{L})$$

qualunque siano P ed \mathcal{L} .

Da questo (moltiplicando scalarmente per $\omega_1 - \omega$) risulta che i vettori $\omega_1 - \omega$, ω' e $P - \mathcal{L}$ devono essere complanari, e che, siccome $P - \mathcal{L}$ è arbitrario, dovrà essere $(\omega_1 - \omega) \wedge \omega' = 0$, il che implica

$$a) \quad \omega' = 0,$$

ovvero

$$b) \quad \omega_1 - \omega = m \omega',$$

essendo m un opportuno scalare.

Ma è facile riconoscere che, in virtù della (5), anche nell'eventualità b), si è ricondotti ad $\omega' = 0$. Infatti, quando sussista la b), ove si tenga conto che $P' - \mathcal{L}' = \omega \wedge (P - \mathcal{L})$, la (5) stessa può essere scritta

$$\omega' \wedge \{ (P - \mathcal{L}) - m \omega \wedge (P - \mathcal{L}) \} = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $P - \mathcal{L}$, segue appunto $\omega' = 0$: per rendersene conto, basta per es. assumere una prima volta $P - \mathcal{L}$ parallelo ad ω , con che si vede che ω' dovrebbe pure risultare parallelo ad ω ; se poi si prende invece $P - \mathcal{L}$ perpendicolare ad ω , si trova che lo stesso dovrebbe accadere per ω' . Le due conclusioni sono compatibili soltanto a patto che $\omega' = 0$.

Perciò, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema odografo di un solido $S(P)$ sia un altro solido $S_1(P_1)$ è che la velocità angolare ω del sistema S sia costante.

Il solido odografo S_1 ha la stessa velocità angolare costante ω ; ed, essendo

$$P_1 - \mathcal{L}_1 = P' - \mathcal{L}'$$

perpendicolare ad un vettore costante $\omega = \omega_1$, il solido S_1 sarà piano e perpendicolare a ω .

Se $S(P)$ è un *solido* e la velocità angolare ω non è costante, il sistema odografo è *deformabile*. Le proiezioni di $P'_1 - \mathcal{L}'_1$ e $\omega \wedge (P_1 - \mathcal{L}_1)$ sulla direzione di ω' sono eguali. Difatti,

$$P'_1 - \mathcal{L}'_1 = \omega \wedge (P_1 - \mathcal{L}_1) + \omega' \wedge (P - \mathcal{L});$$

o

$$(P'_1 - \mathcal{L}'_1) \times \omega' = [\omega \wedge (P_1 - \mathcal{L}_1)] \times \omega'.$$

Meccanica. — *Eliche ed anelli di risucchio*. Nota di L. S. DA RIOS, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. — AZIONE CENTRIPETA DELL'ELICA RUOTANTE.

L'elica ruotando nell'aria tranquilla provoca nelle particelle fluide circostanti un moto di rotazione ed insieme un richiamo verso il proprio asse. L'uno e l'altro dei due fatti si verifica anche se l'elica sia investita da una corrente uniforme o (come suol anche dirsi) sotto il vento d'una galleria. Le analisi sperimentali al riguardo sono numerose, e risalgono alle ormai antiche esperienze del Riabouchinsky, del Soreau e del Crocco⁽²⁾; dai quali furono anche segnate le relative traiettorie. Ricordo, che in altra Nota⁽³⁾, per determinare la spinta assiale dell'elica ho immaginato questa immobile in seno ad una corrente elicoidale; prescindendo però (com'era lecito per l'indole della ricerca) dalla necessaria azione centrifuga inerente alle particelle fluide. Ora conviene osservare che allo sforzo centrifugo di queste molecole in moto, per ciò che vengono a strisciare sulla pala fissa, fa riscontro uno sforzo centripeto opposto nella pala stessa. Viceversa, se la pala ruota e il fluido si trova previamente in quiete, è su questo che dovrà agire lo sforzo centripeto, a cui seguirà il richiamo verso l'asse.

Comunque, la spinta dell'elica (al di sopra di ogni possibile interpretazione) è certamente dovuta all'incremento della velocità assiale che essa determina nella massa circostante, e che assume il massimo valore in corrispondenza di quella che si dice la *sezione ristretta* della scia. Questo restringimento a valle dell'elica è precisamente l'effetto dei suddetti incrementi di velocità; al cessare dei quali soltanto potrebbe venir meno e la sezione ristretta e una convergenza all'asse, la densità del fluido rimanendo costante.

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(2) Cfr. «La technique aéronautiques» 1^{er} décembre, 15 décembre 1912.

(3) Cfr. *Ali ed eliche*. «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», seduta del 1^o giugno 1929 (vii); vol. IX, serie 6^a, 1^o sem., fasc. II.

2. — ANELLI DI RISUCCHIO.

Consideriamo dapprima il caso generale (e d'altronde più semplice) dell'elica ruotante nella galleria del vento; e che si sa essere, sotto l'aspetto dinamico, del tutto equivalente al moto d'avanzamento dell'elica in aria quieta.

Effluendo l'acqua da un foro aperto nel fondo orizzontale d'un vaso, si viene a costituire una regione a forma di conoide o *gorgo*, che partecipa al richiamo verso lo sbocco; la rimanente parte del liquido restando pressochè immobile. Se si provvede la luce d'un imboccatura opportuna e rivolta verso l'interno (come già fece il Borda), le linee di corrente del gorgo risultano meglio definite, e il tubo addizionale diventa una netta superficie di separazione fra il gorgo e la parte di liquido in riposo.

Ove si prescinda dalla rotazione, le traiettorie fluide di una corrente uniforme diretta assialmente contro un'elica ruotante, sotto l'azione di questa vengono a costituire una regione di moto comparabile a quella anzidetta; e che per analogia diremo *gorgo dell'elica*. Introducendo una superficie rotonda o *anello* (che risponda ai tubi del Borda) potrà effettuarsi un netto distacco fra le traiettorie dall'elica incurvate e le altre che da essa si conservano quasi indipendenti. Raggiungendo la sezione ristretta dell'elica, le linee di corrente (sempre a prescindere dal loro movimento di rotazione attorno all'asse) riprenderanno l'andamento rettilineo primitivo. La forma dell'anello che appare *a priori* la più appropriata è quindi quella *a bicchiere* rappresentata in sezione nell'annessa figura. Esternamente all'anello: o i filetti fluidi conserveranno la loro direzione rettilinea, verificandosi una regione di fluido stagno a valle dell'anello; oppure essi dalla superficie di questo anello non si staccheranno.

3. — ASPIRAZIONE SUBITA DA UN ANELLO.

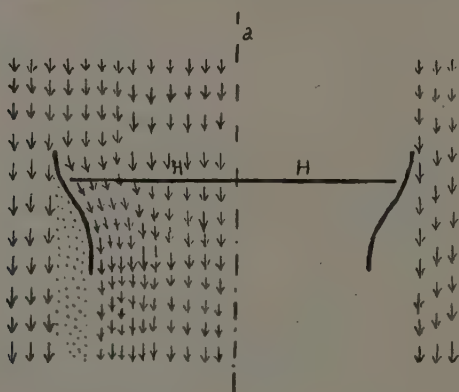
Riferendoci alla figura, indichiamo con V la velocità del vento e con v , la variazione vettoriale della velocità determinata dall'elica in un generico punto P . Bisogna ammettere intanto che v , in un meridiano passante per l'asse a vari colla distanza di P dall'asse stesso e dalle sezioni estreme S_1 ed S_2 di entrata e d'uscita del fluido attraverso l'anello, nel quale si trova l'elica HH . Per uno stesso meridiano è da ritenersi anche che v vari col tempo, perchè diversa col tempo è la sua posizione rispetto all'elica ruotante. Tuttavia per semplicità, in regime normale, si è sempre riguardato il moto come permanente e dovuto ad un elica costituita da un numero infinito di pale. L'intensità di v in massima andrà aumentando da S_1 verso S_2 , e dalla superficie anulare verso l'asse.

Se il fluido si suppone in riposo esternamente all'anello, in un punto P_e di quella regione e attiguo alla superficie anulare si avrà la pressione statica p_o e nel punto P_i contrapposto la pressione dinamica

$$p_o = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{V} + \mathbf{v})^2,$$

con δ densità dell'aria. Ne segue che l'integrale $\int_{\sigma} \frac{1}{2} \delta (\mathbf{V} + \mathbf{v})^2 \mathbf{n} d\sigma$

(dove \mathbf{n} designa il vettore unitario normale alla superficie σ di separazione diretto verso l'interno) dà la forza di risucchio \mathbf{R} subita dall'anello.



Ove si tratti di una superficie σ tubolare comunque incurvata, ma colle sezioni terminali S_1 ed S_2 normali alle velocità costanti \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 del fluido in ciascuno dei loro punti, si sa essere⁽¹⁾

$$(1) \quad \int_{\sigma} \frac{1}{2} \delta v_i^2 \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{2} Q (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2);$$

dove v_i designa la velocità in un generico punto P_i interno e aderente al tubo, e Q la sua portata uguale a $\delta S_1 V_1$.

Nel caso nostro si potrà ammettere che la velocità preesistente \mathbf{V} non sia alterata nei punti della sezione d'imbocco S_1 dell'anello; e che nei punti della sezione S_2 di sbocco l'incremento \mathbf{v}_2 sia prevalentemente assiale. Con ciò, facendo nella (1) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}$; $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}$; $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V} + \mathbf{v}_2$, si otterrà

$$(2) \quad \mathbf{R} = \int_{\sigma} \frac{1}{2} \delta (\mathbf{V} + \mathbf{v})^2 d\sigma = -\frac{1}{2} Q \mathbf{v}_2.$$

(1) Cfr., per es., T. LEVI-CIVITA, *Corso di meccanica razionale; idrodinamica*, p. 41 e sgg.; la Litotipo, Padova, 1914.

L'aspirazione subita dall'anello risulta quindi uguale a circa la metà della spinta S_e prodotta dall'elica, essendo appunto

$$(3) \quad S_e = Qv_2.$$

4. — RISULTATI SPERIMENTALI.

a) *A punto fisso.* — Per $V = 0$, ossia con un'elica ruotante in seno all'aria calma, ho già rilevato per un anello (di profilo uguale a quello della figura) l'aspirazione di grammi 1600⁽¹⁾, mentre l'elica a sè dava una spinta di circa grammi 3000. Le formule (2) e (3) risulterebbero quindi separatamente confermate. Rendendo però l'anello solidale all'elica, l'aumento di spinta dovuto alla presenza dell'anello variava col profilo dell'anello stesso, e col passo e la velocità di rotazione dell'elica⁽²⁾. Con un anello slabbrato a monte e con un'elica di forte passo si registrò un vantaggio di spinta di oltre il 50 %.

Spetta ad ulteriori esperienze lo stabilire se e come si possa conservare o migliorare in ogni caso all'elica la sua spinta propria, sommandole per giunta quella dell'anello solidalmente congiunto.

b) *Sotto il vento della galleria.* — Misurata dapprima la resistenza dell'anello, si trovò sempre per il sistema elica-anello un notevole vantaggio; vantaggio che per il suddetto anello slabbrato raggiunse quasi il 90 % della spinta dell'elica nelle stesse condizioni di funzionamento⁽³⁾.

Resta a constatare se, con eliche di maggiore spinta, la resistenza dell'anello possa essere come annullata o convertita in aspirazione.

Il fenomeno potrà praticamente sfruttarsi anche in base ai dati sperimentali già acquisiti; ciò che sarà discusso in altra occasione.

(1) Cfr. *Depressioni nella scia di eliche sostenatrici ad anello*. L'« Aerotecnica », 1927, n. 2.

(2) Vedasi un richiamo delle mie esperienze a punto fisso nell'articolo: *Intorno ad un nuovo principio di navigazione aerea*. L'« Aerotecnica », 1928, n. 5.

(3) Cfr. L. S. DA RIOS, *I primi esperimenti al vento sul sistema elica-anello*. L'« Aerotecnica », novembre 1929. Dalla Relazione fatta dal Laboratorio Sperimentale di Aeronautica della R. Scuola d'Ingegneria di Torino sugli esperimenti intorno al mio anello rappresentato in figura, vien messo in rilievo che il vantaggio del sistema elica-anello è dovuto precisamente ad una diminuzione di resistenza dell'anello e ad un aumento di spinta dell'elica. Vedasi: *Prove sperimentali sui tubi di accompagnamento delle scie d'elica*. L'« Aerotecnica », novembre 1929.

Fisica-matematica. — *Sull'integrazione delle equazioni elettromagnetiche di Maxwell-Hertz.* Nota di A. TONOLO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sembrerà strano che dopo molti lavori pubblicati sulle equazioni di Maxwell-Hertz della elettrodinamica dei corpi in riposo, e che più o meno direttamente si riferiscono alla loro integrazione, io abbia voluto ritornare sopra una tale quistione. Ma in primo luogo mi consta che soltanto il Tedone⁽²⁾ ha eseguito l'integrazione delle suddette equazioni da un punto di vista uguale al mio. E in secondo luogo ho intrapreso la ricerca per una ragione tutta personale. Nel 1910 pubblicai una Memoria⁽³⁾ ove venivano integrate le equazioni in discorso nella loro forma più semplice, nel caso, cioè, dell'etere. Nel 1916, nel citato lavoro, il Tedone riusciva ad integrare le equazioni di Maxwell-Hertz nella loro forma più generale.

Il metodo del Tedone e dello scrivente sono completamente diversi. Era perciò naturale che io cercassi di vedere se era possibile una estensione del mio procedimento adatta all'integrazione delle equazioni generali, beninteso nelle stesse condizioni iniziali e ai limiti del Tedone. Vi sono riuscito, e perciò io spero che si troverà giustificata la pubblicazione del presente lavoro.

La suddetta integrazione, e l'esame di qualche caso particolare, verranno esposti con ogni dettaglio in una Memoria in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica ».

In questa Nota ho ritenuto opportuno svilupparne la parte concettuale, e indicare un risultato che mi sembra non privo d'interesse. Affinchè poi il lettore possa confrontare rapidamente la mia integrazione con quella del Tedone, richiamerò anche di questa il criterio direttivo.

Innanzitutto, enuncio il problema:

Una superficie σ chiusa fissa, o variabile col tempo, è immersa in un campo omogeneo, isotropo, in riposo, percorso, oltre che da correnti di spostamento e voltaiche, anche da correnti di convezione. Siano assegnate:

a) le componenti della forza elettrica e magnetica in ogni istante di tempo e in ogni punto della superficie⁽⁴⁾;

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(2) O. TEDONE, *Sull'integrazione delle equazioni di Maxwell*. [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXV, serie 5^a, 1° semestre (1916)]. Due Note.

(3) A. TONOLO, *Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica*. [« Annali di Matematica », tomo XVII, serie III (1910)].

(4) Non tutte queste componenti possono essere date ad arbitrio: esse devono infatti soddisfare a due equazioni che fanno parte del sistema di Maxwell-Hertz, e che agevol-

b) la distribuzione iniziale del campo racchiuso da σ . Si domanda l'univoca determinazione del campo interno a σ in qualunque istante di tempo.

Necessita fare un'osservazione insita tanto nel metodo d'integrazione del Tedone, quanto nel mio. Sia nell'uno che nell'altro s'introduce lo spazio lineare S_4 a quattro dimensioni, in cui il tempo e le coordinate cartesiane dello spazio fisico indicano le coordinate cartesiane ortogonali di un suo punto. Allora la superficie σ mobile dello spazio ordinario genera nello spazio S_4 una varietà fissa a tre dimensioni che diremo Σ .

Negli anzidetti metodi d'integrazione la varietà Σ è obbligata a soddisfare certe condizioni restrittive; queste, tradotte in linguaggio ordinario, impongono delle limitazioni alla mobilità della superficie σ . Ne risulta, che per poter assumere come formule risolutive del problema, sia quelle del Tedone, sia le mie, occorrerà prima esaminare se le ipotesi cinematiche che caratterizzano la variabilità della superficie sono tali per cui la corrispondente varietà Σ soddisfa alle condizioni richieste dai metodi d'integrazione. Constatato questo, gioverà liberare dalla forma iperspaziale gli integrali che figurano nelle formule finali, mettendo invece in evidenza lo spazio fisico e il tempo.

Metodo d'integrazione del TEDONE.

Questo metodo consta delle seguenti parti:

a) Trasformazione del sistema generale di Maxwell-Hertz in un altro S aggiunto di se stesso.

b) Formula di reciprocità per il sistema S nello spazio lineare S_4 .

c) Introduzione delle soluzioni fondamentali, e della varietà conica caratteristica.

d) Applicazione della formula di reciprocità alle funzioni che sono integrali del sistema S , e alle soluzioni fondamentali nello spazio limitato da un pezzo di varietà Σ , dalla varietà conica caratteristica, e da una piccola varietà cilindrica che racchiude il punto P ove si vogliono determinare le soluzioni del sistema S . Note queste soluzioni, sono eziandio conosciute la forza elettrica e magnetica nel punto P .

e) Passaggio al limite quando il raggio della varietà cilindrica tende a zero.

f) Doppia derivazione rispetto alla variabile che rappresenta il tempo, e conseguente determinazione del campo nel punto P .

mente si scrivono, ove si assuma in un punto generico P di σ come asse coordinato z quello offerto dalla normale positiva in P alla superficie σ . Allora le suddette due equazioni sono quelle che contengono derivazioni fatte secondo gli assi x, y che giacciono sul piano tangente in P .

Metodo d'integrazione dell'Autore.

Questo metodo consta delle seguenti parti:

a) Dalle equazioni di Maxwell-Hertz, si deducono due equazioni ad una delle quali soddisfa la forza elettrica, e all'altra la forza magnetica. Queste equazioni sono della forma

$$(1) \quad \alpha \Delta_2 \bar{f} - \beta \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \bar{\varphi},$$

dove Δ_2 è l'operatore di Laplace relativo alle coordinate spaziali, α, β, γ sono costanti reali positive, $\bar{\varphi}$ un vettore noto delle coordinate dei punti di S_4 .

b) Per la conoscenza delle forze elettriche e magnetiche in ogni istante nei punti di σ , e per il fatto che queste forze sono vincolate dalle equazioni di Maxwell-Hertz, segue che si possono determinare in ogni istante di tempo le derivate prime di queste forze nei punti della superficie.

c) Integrazione dell'equazione (1) (più propriamente di una sua trasformata) con un giudizioso maneggio del metodo Volterra-Tedone.

d) Dimostrazione che gli integrali di (1) i quali soddisfano in ogni istante nei punti della superficie σ alle equazioni di Maxwell-Hertz, le verificano anche all'interno di σ .

Si fissi il caso della superficie immobile. Allora le mie formule risolutive rendono manifesta una essenziale differenza fra i dati che sono richiesti per la risoluzione del problema enunciato, a seconda che la superficie è immersa in un mezzo non assorbente, oppure di natura qualsivoglia. E precisamente, mentre nei mezzi non assorbenti i dati a) sono sufficienti per l'univoca determinazione delle forze elettriche e magnetiche in ogni istante di tempo all'interno della superficie, nel problema generale si richiede inoltre la conoscenza del campo nell'istante iniziale.

Questo diverso comportamento, che non risulta esplicitamente dalle formule del Tedone, perchè Egli considerò a parte il problema relativo alla superficie fissa soltanto quando questa è situata in un mezzo a conducibilità nulla, mi sembra degna di attenzione.

Faccio notare infine che, escluso il caso della superficie immobile situata nell'etere, nel quale le mie formule coincidono con quelle date dal Tedone, nel problema generale esse sono ben diverse. A me sembra però di aver raggiunto un perfezionamento, perchè queste formule, per quanto complesse, sono più semplici di quelle ottenute da questo eminente Analista.

Fisica. — *Nuovi fenomeni osservati nella scarica anulare.* Nota di N. STACUSANO, presentata dal Corrisp. M. LA ROSA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Relations entre le comportement distillatoire d'un système binaire et l'allure des courbes température-tension de vapeur des composants.* Nota di M. LECAT, presentata ⁽¹⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Pour la Chimie organique, tant scientifique qu' industrielle, les tables d'azéotropes ⁽²⁾ sont fort utiles. Mais elles ne seront jamais complètes et il importe de pouvoir prédire si tel système de substances sera ou non azéotrope (az.). Pour les mélanges à 3 composants, il s'en faut que ce soit possible aujourd'hui; mais pour les systèmes binaires, on possède plusieurs méthodes.

Étant donné un tel système, quand il y a intersection (R) des courbes, γ_1 et γ_2 , tension de vapeur-température, (p, t), l'azéotropisme (Az.) a lieu. C'est la règle de Bancroft ⁽³⁾. Au point R (p_R, t_R), la différence des volatilités des composants change de signe. L'association moléculaire d'un composant au moins est nécessaire, mais non suffisante, pour l'intersection ⁽⁴⁾, comme pour l'azéotropisme positif. Si l'isobare p_R et l'isotherme t_R étaient rectilignes, il y aurait, au sens étymologique, Az., et ce pour toute concentration x d'un composant déterminé; ni positif, ni négatif, cet Az. serait d'écart δ nul (appelons-le l'Az. neutre). Il est évident aussi qu'une courbure, si faible soit-elle, entraîne l'Az. sous la pression p_R . L'intersection est donc suffisante pour l'Az., ce qui démontre la règle de Bancroft. Par raison de continuité, l'Az. se maintiendra dans un intervalle (p_1, p_2), contenant p_R , et de même, dans un intervalle de températures (t_1, t_2) contenant t_R . La réciproque de la règle n'a pas lieu: R n'est pas nécessaire à l'Az. Quant au signe, il n'est pas indiqué par l'allure des courbes γ .

Soient: sur la « surface-limite » (p, t, x), de Duhem, g la ligne de Gibbs-Konovalov; g_0 sa projection orthogonale sur le plan (p, t). On pour-

(1) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(2) Pour références, voir « Ann. Soc. scient. Bruxelles », 49, B. 129 (1929).

(3) W. D. BANCROFT, *The Phase Rule*, Ithaca, N. Y., 1897, p. 98.

(4) L'intersection est à prévoir quand le composant le plus volatil, sous quelque pression, est le moins fusible. Cfr. la table de C. VON RECHENBERG, *Einfache und fraktionierte Destillation*, Miltitz, 1923, p. 358.

rait dire que g_0 est « la courbe (p, t) du système az. ». Le domaine D, délimité par les γ , l'axe des t et la projection l_0 de la ligne critique l , n'est pas pénétré par g_0 . Mais g_0 peut s'appuyer (par ses 2 extrémités) sur les deux courbes γ ou sur une seule, suivant que R existe ou non. Si l'axe des p est horizontal, g_0 est au-dessous ou au-dessus de D, suivant que le signe de l'Az. est + ou —. Pour un *azéotrope d'intersection*, $|\delta|$ est maximé, ou à très peu près⁽¹⁾. S'il n'y a pas intersection, le point de g_0 maximant δ est voisin de la normale aux γ ⁽²⁾.

Suivant van der Waals, g joindrait l à la courbe de congélation : l'Az. serait toujours *absolu* ; mais cela est contredit par l'expérience. Non absolu, l'Az. est dit *borné* ; il l'est *en bas*, ou *en haut*, ou des deux côtés, suivant qu'il y a une ou deux *bornes*⁽³⁾. Le *zétotropisme* (Z.) est la négation de l'Az. Le Z. *absolu* (absence de points de Gibbs-Konovalov) est fréquent en cas de parenté chimique étroite des deux composants. Si l'intervalle (p_1, p_2) contient la pression normale (760^{mm}) — désignons-la par v — l'Az. est dit *normal* (Az_v). Il est superflu de définir le Z. *normal* (Z_v)⁽⁴⁾.

Pour que tout x soit az., il faut et il suffit que, R existant, l'Az. soit doublement borné, car g joint alors les γ . Mais si l'intersection n'a pas lieu, toute concentration az., sauf une, est az. pour 2 pressions, les extrémités de g étant sur une même courbe γ , et il y a alors des concentrations toujours zéotropiques.

Nous avons cru intéressant de faire une vaste enquête au sujet des relations entre le comportement distillatoire des systèmes binaires, sous la pression v , et l'allure relative des γ . Une table a été dressée⁽⁵⁾ qui, pour 972 systèmes, formés par 194 corps, *les plus divers*, confronte avec les

(1) D'après les données expérimentales de R. W. MERRIMAN, « J. Chem. Soc. Trans. », 103, I, 1801 (1913), la propriété a lieu pour le système (éthanol, acétate d'éthyle).

(2) Cfr. W. MUND, « Bull. Soc. chim. Belgique », 38, 327 (1929).

(3) De la règle de BAKHUIS-ROOZEBOOM (*Die heterogenen Gleichgewichte*, II, 1, Braunschweig, 1904) sur le sens de variation de la concentration azéotropique ξ quand p croît il résulte que l'Az. positif ne pourrait être borné que si R n'existe pas et, le cas échéant, il le serait en bas ou en haut suivant que la courbe γ du composant le plus volatil est la moins ou la plus ascendante. Mais, empirique, la règle est en défaut pour le système (eau, éthanol), où l'Az. (positif) est borné en bas, vers 75^{mm}, l'eau disparaissant. M. S. VREVSKIJ, « Z. phys. Chemie », 83, 569 (1913), a établi, par la thermodynamique, une règle qui ne souffre pas d'exception, mais qui ne s'exprime pas par les courbes γ . Il en est de même de la règle empirique de C. VON RECHENBERG, loc. cit. Dans le système (propanol, iodure d'isoamyle), sans intersection, l'Az. (positif) est borné en haut, mais en deça de 760^{mm}. On n'a pas encore constaté de borne d'Az. négatif sans R. Dans les systèmes avec R : (1) (eau, propanol) (+), (2) (acétone, chloroforme) (—), (3) (eau, acide formique) (—), l'Az. serait absolu pour (1), borné en haut pour (2, 3).

(4) Contre la règle de Bancroft, M. R. EBERSOLE, « J. phys. Chemistry », 5, 239 (1901), argue, à tort, de cas d'existence du Z_v avec intersection des γ . C'est exclure l'Az. borné.

(5) On la trouvera en annexe à un Mémoire qui a été présenté en octobre 1929 à la Société scientifique de Bruxelles. Voir « Annales », 49, B. (1930).

nombre p_R et t_R le comportement en question (l'écart δ est consigné). Il y a : 1) 489 cas d'intersection, dont 377 az. (soit az. R) et 112 z. (soit z. R); 2) 483 systèmes sans R sont az. (soit az. s. R). Non consignés dans cette table, les z. s. R comprennent des az. s. R (non normaux).

Pour l'ensemble des systèmes, la proportion P des az. s. R est environ 50 p. c. Vu le nombre et surtout la grande variété des systèmes étudiés, on doit admettre que cette proportion serait conservée, ou à très peu près, si la statistique portait sur tous les systèmes binaires possibles (distillables sans altération). Pour l'ensemble des az. s. R (normaux et non-normaux), P serait sans doute encore très sensiblement accru. Ceci mesure la *grande portée de la non-réciprocité de la règle de Bancroft*. Basée sur le laborieux tracé des courbes γ , cette loi ne fournit donc pas la moitié des azéotropiques et elle ne distingue pas les normaux, qui sont pratiquement les plus importants. Pour prévoir l'Az., la méthode des courbes delta semble de beaucoup préférable ⁽¹⁾.

Parmi les az. R, il en est 7.7 p. c. de négatifs; parmi les az. s. R, 9.0 p. c. Témoignage d'association moléculaire ⁽²⁾, l'intersection serait donc relativement défavorable à la négativité de l'Az. ⁽³⁾.

Pour les systèmes az. R, l'intervalle de pressions (v, p_R) n'est qu'un intervalle partiel d'existence de l'Az. Cela montre néanmoins l'intérêt de connaître p_R . On n'a la relation $p_R > v$ que dans 20 p. c. des cas; mais si $p_e = 155^{\text{mm}}$, on a $p_R > p_e$ aussi souvent que l'inégalité inverse; de même, $t_e = 112^\circ$. Pour les z. R, on a: $p_e = 30^{\text{mm}}$ et $t_e = 105^\circ$.

Sur tous ces nombres, l'influence du chimisme est considérable. Encore de 50 ~ dans le cas de parenté étroite des composants, P prend des valeurs fort différentes pour les diverses couples de fonctions chimiques ⁽⁴⁾. Par exemple, $P = 73$ pour l'ensemble des systèmes contenant une amide et 80, 87, 93 si la substance lui associée est respectivement un ester, un halogénure, un hydrocarbure. Si un composant est le glycol, $P = 77$.

Si une forte association moléculaire est favorable à l'intersection des γ , elle l'est aussi à l'Az. sans intersection ⁽⁵⁾ et à un grand écart δ ⁽⁶⁾. Mais

(1) Voir M. LECAT, ces « Rendiconti », (6), 9, 1121 (1929, I). Sur les courbes delta, l'auteur a basé une méthode d'analyse organique fonctionnelle. Voir: « Bull. Acad. R. Belg. », décembre 1929; « Z. f. phys. Chemie » (1930).

(2) L'association, dont P. DEBYE et J. ERRERA, « Comptes-rendus », 187, 737 (1928), distinguent deux espèces, est insuffisante pour l'intersection des γ , comme pour l'Az.

(3) L'Az. négatif serait dû à la présence, dans le liquide, d'un composé d'addition, en proportion dépendant de t (ZAWIDZKI, 1900); composé labile dans la vapeur. Mais aucune méthode n'a permis de déceler la présence d'un tel composé dans l'azéotropique négatif (eau, acide formique), où les deux constituants sont associés. Cfr. D. E. TSAKALOTOS, « Z. f. phys. Chemie », 71, 667 (1910).

(4) Pour les détails, voir notre Mémoire dans les « Annales », 49, B. (1930).

(5) A première vue, cela paraît assez paradoxal, parce que l'intersection assure l'Azéotropisme.

(6) Voir notre Note des « Comptes-rendus », 183, 880 (1926).

les plus grands δ ont cependant lieu quand R existe; c'est le cas du système (acétamide, dibrombenzène p), où $\delta = 20.9$: on ne connaît pas de plus grand δ .

Tout ce qui précède suppose que l'azéotropisme du système binaire étudié n'a qu'un seul signe.

Si g a deux branches, une de chaque signe, b_+ , b_- , l'Az. est dit *mixte*. Cas vraisemblable, car des az. positifs sous la pression v donnent, dans certain intervalle de température, des composés d'addition⁽¹⁾. La géométrie de position des courbes b et γ (et de R) orientera les recherches expérimentales sur les domaines d'existence des Az. positif et négatif. Nous allons ici, très brièvement, en donner une idée.

(I). Si les deux signes n'ont pas lieu pour une même pression, une branche est bornée en bas, en A, l'autre en haut, en B, avec $p_B < p_A$ et $t_B < t_A$. L'*inférieure* b_i peut être b_+ ou b_- , et si R existe, ce point peut être « couvert » par l'une ou l'autre des projections b_{oi} , b_{os} ; chacun de ces 4 cas en comprend 4, suivant que b_i et b_s sont, ou non, encore bornées en bas ou en haut. Il y a alors l'hypothèse, plus simple à discuter, de R inexistant; nous n'en dirons rien.

(II). Si les signes + et — ont lieu pour des mêmes t (donc aussi pour des mêmes p), on a, suivant F. Caubet, le cas du système (SO_2 , CH_3Cl), à deux composants non-associés; il est contesté par certains auteurs, mais admis par Duhem, Nernst et Zawidzki. Il se discute à peu près comme le cas (I).

(III). Cas-limite, de possibilité physique invraisemblable: b_{o+} et b_{o-} se rejoindraient en R. En ce point, il y aurait Az. neutre. La courbe g comporterait une *branche neutre*, la parallèle à l'axe des x menée par R, mais les deux nappes de la surface-limite seraient tangentes en outre suivant la *branche mixte*.

En tout, il y a 89 configurations, mais probablement pas toutes possibles.

En ce qui concerne les x az., suivant la position des intervalles d'Az. positif et négatif, l'intervalle de x (qui va de 0 à 100 p. c.) sera partagé de 89 manières. D'après les nombres de bornes des deux b , il y a 6 cas: (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2), pour lesquels on aura, par exemple, respectivement:

$$(Z, A_-, A_{\pm}, A_+, Z) \quad , \quad (A_+, A_{\pm}, A_-, Z) \quad , \quad (A_-, A_{\pm}, A_+, Z) \\ (A_-, A_{\pm}, A_+) \quad , \quad (A_+, Z, A_-) \quad , \quad (A_-, A_{\pm}^+, A_+^+);$$

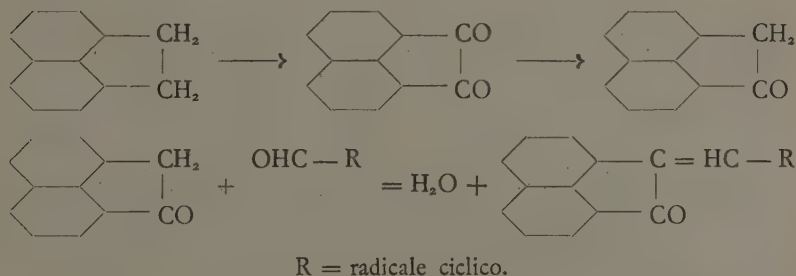
(1) L'azéotropique positif (éthanol, chloroforme) donne lieu à combinaison entre -6° et $+1^\circ$. Ceci est à rapprocher du fait que le δ relatif à v est beaucoup plus petit que celui indiqué par la courbe des deux delta des systèmes (éthanol, halogénures). Cfr. « Ann. Soc. sc. Brux. », 47, B. 48 (1927).

les notations sont faciles à interpréter; par exemple, Z , A_- , A_{\pm} désignent respectivement: un intervalle de Z_- , un d'Az. négatif, un dont chaque point (x) fournit sous *une* pression un azéotrope positif et sous deux pressions un azéotrope négatif. Dans chacun des 6 cas susdits, il faut distinguer deux ou trois éventualités, suivant que R existe ou non, suivant la nature des bornes (inférieure, supérieure), suivant la position des deux branches par rapport au point R , etc. ⁽¹⁾.

Chimica. — *Una nuova reazione delle aldeidi* ⁽²⁾. Nota IV di REMO DE FAZI e F. MONFORTE, presentata ⁽³⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Nelle Note precedenti ⁽⁴⁾ uno di noi ha dimostrato che nelle condizioni descritte non è possibile ottenere dei prodotti di condensazione tra l'acenaftene e le aldeidi cicliche, mentre queste sono capaci di dare con tale idrocarburo, in presenza di acido solforico concentrato, una caratteristica e assai sensibile reazione cromatica.

Fu perciò trasformato l'acenaftene in acenaftenchinone e poi in acenaftenone e condensato questo con le aldeidi piperonilica, vanillica, anisica, cinnamica, p-dimetil-ammino-benzoica e furfurica onde vedere se questi composti erano capaci di dare la caratteristica reazione colorata.



Infatti il piperonal-acenaftenone, il 3-metossi-4-ossi-benzal-acenaftenone, il 4-metossi-benzal-acenaftenone, il cinnamal-acenaftenone, il 4-di-

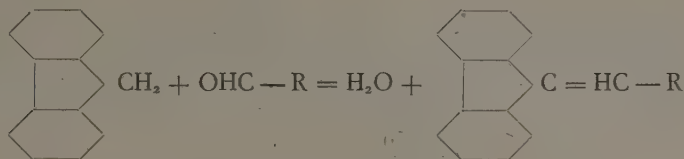
(1) Pour un exposé complet, on consultera le Mémoire annoncé, dont la présente Note n'est qu'un très bref résumé.

(2) Ricerche eseguite nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Messina.

(3) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(4) «Gazz. Chim. Ital.», 46, (I), p. 334, 1916; 51, (I), p. 328, 1921, e 54, (I), p. 658, 1924.

da l'acenaftene con le aldeidi cicliche è anche provocata dal fluorene e che è dovuta ai prodotti di condensazione che si formano, secondo la reazione seguente:



R = radicale ciclico.

E uno di noi ha già dimostrato⁽¹⁾ con le aldeidi piperonilica, cuminica, m-toluica, cinnamica, p-dimetil-ammino-benzoica e furfurica, che quando i prodotti di condensazione ottenuti con etilato sodico e fluorene, sono ben purificati, non danno la caratteristica reazione cromatica, ma colorazioni svariate con acido solforico concentrato. Altre esperienze eseguite ora, confermano i precedenti risultati.

L'aldeide o-nitro-benzoica, l'aldeide fenil-acetica e l'aldeide p-nitro-benzoica danno con fluorene ed etilato sodico, il 2-nitro-benzal-fluorene, il fenil-etiliden-fluorene e il 4-nitro-benzal-fluorene, i quali non danno la nota reazione cromatica.

Queste ultime ricerche confermano perciò le precedenti e dimostrano in modo definitivo che l'ipotesi di Guglielmelli e Delmon non può essere accettata.

I prodotti di condensazione del fluorene con le aldeidi suddette saranno trattati in altra Nota perchè hanno assunto particolare importanza dopo la nuova teoria di Schlenk⁽²⁾. Intanto fin da ora facciamo notare che per azione del fluorene sull'aldeide piperonilica e sull'aldeide p-dimetil-ammino-benzoica, già nel 1921 uno di noi aveva notato la formazione di due isomeri per ogni aldeide e i prodotti ottenuti si trovano descritti nella II Nota sulle aldeidi⁽³⁾.

Chimica. — *Studi intorno agli indoni. — Nuove reazioni dell'α-etil-β-fenil-indone e dell'α-metil-β-fenil-indone.* Nota di R. DE FAZI e F. PIRRONE, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 51, (I), p. 328, 1921.

(2) SCHLENK W., « A. », 463, I, 1928, e BERGMANN E. e MARK H., « Ber. », 62, p. 750, 1929.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 51, (I), p. 328, 1921.

Mineralogia. — *Nuove ricerche sull'Euclasio.* — *Euclasio di Valle Aurina*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. CAVINATO, presentata dal Socio G. BOERIS.

Da alcuni anni mi sto occupando di ricerche mineralogiche nella regione delle Alpi Aurine, allo scopo di integrare lo studio geo-mineralogico e petrografico di questa importante regione dell'Alto Adige⁽³⁾.

Già lo scorso anno ho pubblicato un primo lavoro sui cristalli di apatite di Valle Aurina⁽⁴⁾: in attesa di poter rendere noti tutti i risultati delle mie osservazioni sui giacimenti trovati e sui loro minerali, ritengo opportuno presentare sino da ora, sia pure nella forma sintetica che esigono i « Rendiconti » di questa Accademia, i risultati principali delle ricerche eseguite su cristalli di euclasio che ho avuto la fortuna di trovare nelle escursioni della scorsa estate.

L'interesse di uno studio particolare su questi cristalli, viene dalla scarsità di dati sicuri che sino ad oggi noi possediamo sul minerale; poichè si può affermare che solo l'euclasio di Villa Ricca (distretto Minerario di Minas Geraès nel Brasile) è stato sufficientemente studiato.

Bei cristalli di questo minerale furono raccolti da me nelle fratture di alcuni massi gneissici sulla destra del ghiacciaio di Valle del Vento sotto Cima di Pizzo Cavallo (m. 3200) nella regione del Picco dei Tre Signori.

Tutta questa regione del Picco dei Tre Signori e di Pizzo Cavallo è formata da paragneiss cloritici e micascisti, più o meno granatiferi, nei quali furono osservate intercalazioni di anfiboliti e di ortogneiss occhiadini. La roccia su cui i cristalli sono piantati è un probabile ortogneiss granosienitico, molto povero di quarzo, ricco di un plagioclasio albitico e di clorite, con scarse lamelle di muscovite e di talco, pochi granuli di epidoto clino-soizitico e con gli elementi accessori: titanite, rutilo, tormalina, zircone, apatite.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 17 novembre 1929.

(3) Vedi A. BIANCHI, *Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige)*, questi « Rendiconti », IX, serie 6^a, giugno 1929, e B. G. DAL PIAZ, *Appunti Geologici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige)*, Nota I e II in questi « Rendiconti », agosto 1929.

(4) A. CAVINATO, *Apatite di Valle Aurina*, « Studi Trentini di Scienze Naturali », X, 1929, Trento.

I cristalli piantati nelle litoclasti della roccia, sono limpidi e trasparenti, alcuni leggermente giallognoli, terminati ad una sola estremità e raggiungono i due centimetri di lunghezza.

Sono individui semplici che presentano solitamente le combinazioni di forme:

{010}, {120}, {100}, {021}, {011}, {111}, {121}, {141}, {102}.

In altri cristalli più ricchi di forme sono state osservate anche le:

{340}, {560}, {430}, {320}, {310}, {031}, {151}, {101}, {111}.

I valori angolari oscillavano notevolmente, tanto da far ritenere inopportuno il calcolo delle costanti cristallografiche. Le facce erano spesso arrotondate o prerose e davano, in tal caso, immagini multiple: le relative misure al goniometro servivano allora solo per l'identificazione della faccia.

Il *peso specifico* è:

$$\begin{aligned} \text{Ps} &= 3.037 \text{ (confronto con liquidi pesanti)} \\ &= 3.039 \text{ (metodo del picnometro).} \end{aligned}$$

La *durezza* è notevolmente inferiore a quella del topazio e leggermente superiore a quella del quarzo. Volendone esprimere la posizione nella scala di Mohs, si potrebbe indicarne la durezza col valore $7 \frac{1}{4}$.

La *sfaldatura* è facile e perfetta secondo {010}; meno facile e meno perfetta secondo {100}; difficile e irregolare secondo {001}.

Non ho mai osservato dei *geminati*.

PROPRIETÀ OTTICHE. — I risultati, medie delle determinazioni avute coi varî metodi e concordanti sino alla quarta cifra, sono:

λ in $\mu\mu$	Ng	Nm	Np	Ng — Np
680	1.6720	1.6550	1.6524	0.0196
589	1.6725	1.6560	1.6528	0.0197
520	1.6803	1.6629	1.6595	0.0208
460	1.6877	1.6695	1.6662	0.0216

Il Des Cloizeaux ⁽¹⁾ ha misurato sull'eucasio di Villa Ricca (Brasile) per la luce gialla del sodio:

$$\text{Ng} = 1.6710 \quad \text{Nm} = 1.6553 \quad \text{Np} = 1.6520$$

(1) A. DES CLOIZEAUX, *Manuel de Minér.*, p. 462 (Parigi, 1862).

e A. Worobieff⁽¹⁾ in cristalli verde azzurrognoli del giacimento di Sanarka (Urali del Sud):

$$Ng = 1.6714$$

$$Nm = 1.6553$$

$$Np = 1.6507$$

entrambe le determinazioni di questi autori concordano molto bene con le mie.

Ho eseguito delle misure su lamelle di un cristallo di euclasio di Villa Ricca, appartenente al Museo di Mineralogia della R. Università di Padova, ed ho trovato valori uguali a quelli avuti per l'euclase di Valle Aurina. Per un più sicuro confronto ho messo insieme lamelline di euclasio di questi due giacimenti ed ho così potuto constatare una ben certa eguaglianza degli indici.

I valori della estinzione $Z:Ng$ nell'euclasio di Valle Aurina sono i seguenti:

$$\lambda \text{ in } \mu\mu = 680$$

$$Z:Ng = 41^{\circ} 18'$$

$$= 589$$

$$= 41 \quad 12$$

$$= 520$$

$$= 41 \quad 2$$

$$= 460$$

$$= 40 \quad 50$$

Des Cloizeaux dà per i cristalli del Brasile $Z:Ng = 42^{\circ} 16'$; il Becke⁽²⁾ $42^{\circ} 16'$ per i cristalli di Rauris; Worobieff (loco citato) per quelli di Sanarka $39^{\circ} 49'$; V. Dürrfeld⁽³⁾ per quelli del Brasile ancora 40° . Fa meraviglia, dopo questa concordanza, il valore $Z:Ng = 60^{\circ}$ dato da Hussak⁽⁴⁾ per l'euclasio di San Isabel de Paraguassu, scambiando forse l'asse delle x con quelle delle z .

Per l'angolo degli assi ottici ho ottenuti i valori:

$$2V \text{ (angolo vero, luce gialla)} = 46^{\circ} 38'$$

$$2E \text{ (angolo apparente)} = 81 \quad 52$$

Questo valore sperimentale dell'angolo degli assi ottici è in buon accordo col valore teorico che si ricava dalla formula:

$$tg V = \frac{Ng}{Np} \sqrt{\frac{Nm^2 - Np^2}{Ng^2 - Nm^2}}$$

ponendo per Ng , Nm , Np i valori da me ottenuti sperimentalmente.

La dispersione è $\rho > v$.

(1) A. WOROBIEFF, « Groth's Zeitschr. », 57, p. 407.

(2) F. BECKE, « Groth's Zeitschr. », 47, p. 513.

(3) V. DÜRRFELD, « Groth's Zeitschr. », 47, p. 376.

(4) E. HUSSAK, « Tscherma's Min. und Petr. Mitt. », XII (1892), p. 473.

Sul cristallo di euclasio di Villa Ricca del Museo di Padova ho misurato:

$$2V \text{ (luce gialla)} = 46^{\circ} 26'$$

molto prossimo al valore dei cristalli di Valle Aurina.

A conclusione possiamo dire che i caratteri ottici ed i valori più probabili delle costanti ottiche dell'euclasio di Valle Aurina e di Villa Ricca sono:

carattere del minerale: positivo; netta dispersione inclinata con $\rho > v$; piano degli assi ottici parallelo al piano di simmetria; $Z:Ng = 41^{\circ} 12'$; $Ng = 1.6725$; $Nm = 1.6560$; $Np = 1.6528$; $2V = 46^{\circ} 38'$; $2E = 81^{\circ} 52'$. Questi numeri valgono per $\lambda = 589 \mu\mu$.

COMPOSIZIONE CHIMICA. — Di questa interessante e rarissima specie minerale sono state fatte solamente tre analisi, e tutte e tre su materiale di uno stesso giacimento del Brasile (Villa Ricca nel distretto Minerario di Minas Geraes), con risultati tutt'altro che concordanti. Sono dovute al Berzelius⁽¹⁾, Mallet⁽²⁾, Damour⁽³⁾.

Eccole nell'ordine di citazione:

BeO	21.78	21.43	16.97
CaO	—	—	0.14
FeO	—	—	1.03
Al ₂ O ₃	30.56	31.87	34.07
Fe ₂ O ₃	2.22	1.31	—
SiO ₂	43.22	44.18	41.63
SnO ₂	0.70	0.55	0.34
H ₂ O	—	—	6.04
F	—	—	0.38
	<hr/> 98.48	<hr/> 99.14	<hr/> 100.60

È notevolissima la diversità di dati avuti da questi tre autori, e si rimane alquanto perplessi al pensiero che queste analisi furono eseguite su materiali di uno stesso giacimento.

Di qui l'alto interesse che uno studio chimico accurato del mio materiale di Valle Aurina poteva presentare.

Il materiale per l'analisi fu controllato scrupolosamente al microscopio alfine di assicurarci di una sua perfetta omogeneità di proprietà fisiche.

(1) J. BERZELIUS, «Schweigers Journ.», 27, p. 73.

(2) R. MALLET, «Phil. Mag.», V, p. 27 (1853).

(3) A. DAMOUR, «C. R.», 40, p. 942 (1855).

Ecco i risultati dell'analisi mia:

	% in peso	Quantità molecolari	Raggruppamenti molecolari	Rapporti molecolari
SiO ₂	40.78	0.6763	0.6763	1.98
Al ₂ O ₃	34.46	0.3371	R ₂ O ₃ = 0.3432	1.005
Fe ₂ O ₃	0.97	0.0061		
FeO	0.44	0.0061		
BeO	16.54	0.6590	RO = 0.6826	2
CaO	0.22	0.0039		
MgO	0.55	0.0136		
+ H ₂ O	6.15	0.3413	0.3413	1
— H ₂ O	0.13	—		
F	0.12	—		
	<u>100.36</u>			
O = F (1)	— 0.05			
	<u>100.31</u>			

Ne risultano i rapporti molecolari:

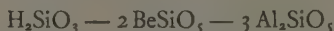
$$\text{SiO}_2 : \text{R}_2\text{O}_3 : \text{RO} : \text{H}_2\text{O} = 1.98 : 1 : 2 : 1.$$

Se non consideriamo le piccole quantità di Mg, Ca, Fe'', Fe''', F, poichè in conseguenza i rapporti molecolari si modificano solamente di una unità della terza cifra, la formula dell'eucasio può scriversi:



E ne risulta una *sicura conferma* della formula generalmente accettata in base alla sola analisi del Damour.

La formula data da Rammelsberg ⁽²⁾:



è quindi da ritenersi sbagliata. In quanto poi all'assegnare una struttura molecolare del tipo Be(AlOH)SiO₄, cioè come di un silicato basico, come

(1) Vedi in proposito: *Rolle des Chlors und des Fluors* nei silicati in C. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*, II, p. 75 (Dresda, 1914).

(2) C. F. RAMMELSBURG, « Erg. Heft », II, p. 210 (1895).

voleva il Groth ⁽¹⁾, anzichè del tipo HBeAlSiO_3 , oppure $\text{Be}_2\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_9 \cdot \text{H}_2\text{O}$, o di qualunque altro tipo facilmente immaginabile ⁽²⁾, diciamo che si è nel campo delle ipotesi; nè ci son fatti che suffraghino l'una piuttosto che l'altra; nè nulla in proposito ci può dire l'analisi. E poi come discutere questa questione se prima non si è risolta l'altra relativa alla natura dei legami degli elementi dell'acqua che questo minerale emette?

DISIDRATAZIONE. — Ho determinato in funzione della temperatura il modo di perdere le sostanze volatili di questo minerale. Delle esperienze qualitative provarono trattarsi esclusivamente di acqua.

La polvere finissima, ottenuta da cristalli molto puri, e pesata entro una navicella di porcellana, veniva posta entro un forno elettrico a resistenza: le relative temperature erano lette mediante una coppia termoelettrica chiusa su di un millivoltmetro, previamente tarato, che dava direttamente il valore in centigradi.

Ecco i risultati delle mie determinazioni:

Temperature	Perdite % sul peso totale della sostanza	Temperature	Perdite % sul peso totale della sostanza
essiccatore	0.08	750	0.57
110	0.13	780	0.62
140	0.13	790	4.05
260	0.14	800	4.50
300	0.15	810	4.97
400	0.16	820	5.78
450	0.18	900	5.93
600	0.23	930	6.37
700	0.53	1350	ibidem

Per ogni temperatura i riscaldamenti furono prolungati fino a costanza di peso rigorosamente controllata.

L'acqua viene emessa quasi totalmente nell'intervallo di temperatura 790–820°: le percentuali perdute all'infuori di un tale intervallo rappresentano una frazione minima della quantità totale.

(1) P. GROTH, *Tableau syst.* (Ginevra, 1904).

(2) Si veda in proposito: il recente lavoro di Walter WAHL, *Ueber die Konstitution der Silikate* in « Groth's Zeitschr. », 66, p. 49 e seg.; J. JAKOB, « Zeitschr. f. anorg. Chemie », 106 (1919), p. 229–267; ID., « Helvetica Chimica Acta », vol. III (1920), pp. 669–704; P. NIGGLI, « Zeitschr. f. anorg. Chemie », 98 (1916), p. 278; ID., *Lehrbuch der Mineralogie*, (Berlino, 1924), p. 486 e seg.; A. HIMMELBAUER, « Sitz.-Ber. d. k. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, Math.-Naturw. Kl. » (1906), 105, Abt. I, p. 1177 e seg.

Pel riassorbimento ho avuto i valori:

Temperatura alla quale la polvere era scaldata	% in peso di acqua riassorbita per esposizione all'aria ambiente
260	0.09
500	0.08
790	0.10
830	0.09

I quali dicono chiaramente che il minerale non presenta mai potere di riassorbimento: si tratta solo di un po' di umidità che la polvere riprende. Come è ben noto è questa una proprietà comune a tutte le polveri le quali assorbono piccole percentuali di H_2O variabili in funzione della loro natura e delle dimensioni dei granuli.

Per quanto si riferisce poi in particolare al modo di trovarsi dell'acqua o dei suoi elementi nel silicato in questione, ricordando che essa viene emessa quasi interamente ad alta temperatura ed in breve intervallo, che non viene menomamente riassorbita, si potrebbe anche ammettere provenga da una decomposizione chimica del silicato in H_2O e $Be_2Al_2Si_2O_9$. Il comportamento dell'acqua in questo minerale è eguale a quello osservato nell'epidoto, nella prehnite, ecc., nei quali minerali F. Zambonini⁽¹⁾ è stato pure condotto ad ammettere che provenisse da una decomposizione chimica.

Va però segnalato che nell'eucrasio l'emissione dell'acqua avviene senza che il primitivo edificio cristallino venga distrutto; che anzi i cristalli conservano nettamente la birefrangenza, la trasparenza, la durezza, la sfaldabilità, ecc., e che neppure i valori delle costanti ottiche, come diremo in seguito, subiscono forti cambiamenti per effetto di questa perdita. Parrebbe allora che l'ammettere che l'acqua provenga da una decomposizione chimica non sia più ragionevole, *poichè a questi processi di decomposizione si accompagnano variazioni brusche di almeno qualche proprietà che nel nostro caso abbiamo potuto non constatare*, e sembrerebbe sufficiente ammettere che si tratti di acqua di cristallizzazione.

Per le piccole frazioni emesse prima dei 780° gradi si potrebbe supporre trattarsi di acqua in « soluzione solida » dato che il suo comportamento è del tipo di quello così definito dal Tamman⁽²⁾; oppure supporre trattarsi di acqua semplicemente assorbita; ma il fatto che non viene più ripresa non depone in favore di questo modo di vedere⁽³⁾.

(1) F. ZAMBONINI, *Contributo allo studio dei silicati idrati* (Napoli, 1908).

(2) TAMMAN, *Ueber die Dampfspannung von kristallisierten Hydraten etc.*, « Zeitschr. f. physik. Chemie », 27, p. 323 (1898).

(3) Vedi C. DOELTER, loc. cit., II, p. 75; vedi anche A. CAVINATO, « Atti Acc. Veneto-Trentino-Istria » (1929).

VARIAZIONI DELLE PROPRIETÀ OTTICHE AL VARIARE DELLA TEMPERATURA.

- Alcuni cristalli tagliati in direzioni convenienti e scaldati a determinate temperature furono impiegati per lo studio delle variazioni delle proprietà ottiche con la temperatura.

Il piano degli assi ottici, i valori degli indici di rifrazione, e l'angolo di estinzione $\widehat{\chi Ng}$ non cambiavano: ho potuto osservare invece già a 260 gradi una più evidente dispersione $\rho > v$.

Solo a 790 gradi quando si inizia la disidratazione del minerale avviene pure un graduale aumento della dispersione delle bisettrici, che procede in proporzione della percentuale di acqua emessa.

Si passa così da una dispersione che, come abbiamo visto, aveva il valore di 28 primi, e che si manteneva tale sino a 780 gradi, ad un valore di ben 12 gradi (25 volte maggiore) al termine della disidratazione. Eccone i valori dopo riscaldamento ad 820 gradi:

λ in $\mu\mu$	Valore dell'angolo $\widehat{\chi Ng}$
680	41°
589	38°
520	36°
460	29°

I cristalli scaldati anche a così alta temperatura si mantengono limpidi e trasparenti: le misure si potevano quindi agevolmente eseguire.

A più elevate temperature, sino a 1200 gradi, il minerale che ha perduto tutta l'acqua, ed ha quindi la esatta composizione chimica $Be_2Al_2Si_2O_9$, rimane nettamente cristallino e trasparente, si mantiene monoclino, con la normale ottica sempre perpendicolare alla {010}; conserva la forte dispersione delle bisettrici; i valori degli indici di rifrazione sono:

$$Np = 1.6523$$

$$Ng = 1.6720$$

e differiscono ben poco dai valori che ha il minerale a composizione $Be_2Al_2Si_2O_9 \cdot H_2O$.

Solo a 1300 gradi circa, il minerale perde la sua birefrangenza e si trasforma in una massa isotropa di colore bianco lattiginoso, ma che presenta ancora tuttavia una ben netta sfaldatura.

Anche in questo minerale, dunque, all'emissione dell'acqua va unita una modificazione delle proprietà ottiche. Il fenomeno è comune ed è ormai conosciuto e studiato in parecchi minerali.

Già Des Cloiseaux⁽¹⁾ aveva potuto osservare che col riscaldamento le

(1) A. DES CLOIZEAUX, loc. cit., p. 425; ib., *Nouvelles recherches sur les propriétés optiques des cristaux, etc.* (1867), p. 136.

proprietà ottiche della heulandite si modificano; il Mallard⁽¹⁾, qualche tempo dopo, riusciva a dimostrare che le variazioni ottiche erano effetto della disidratazione. In seguito furono numerose e feconde di risultati le ricerche del genere.

Klein⁽²⁾, Rinne⁽³⁾, Artini⁽⁴⁾, Dufet⁽⁵⁾, Zambonini⁽⁶⁾, Panichi⁽⁷⁾, Slawson⁽⁸⁾, Carpanese⁽⁹⁾, Bianchi⁽¹⁰⁾, Weigel⁽¹¹⁾, ecc., offrirono osservazioni di interesse tale da meritare un tentativo di sistemazione organica.

Anche l'autore di questo lavoro⁽¹²⁾ ha osservato nella scolecite e nella mesolite delle trasformazioni ottiche in seguito a disidratazione, e oltre che studiare completamente il fenomeno ha potuto stabilire che il valore delle costanti ottiche dipende solo dal contenuto in acqua presente nel minerale, e che è indipendente dalla temperatura, nell'intervallo tra lo zero e 230 gradi.

(1) E. MALLARD, *De l'action de la chaleur sur la heulandite*, « Bull. de la Soc. Minér. de France », V (1882), p. 225.

(2) W. KLEIN, *Optische Studien*, « II. Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin » (1902), I, 8, p. 104.

(3) F. RINNE, « Neues Jahrb. f. Min. u. Geol. » (1887), II, p. 25; (1889), I, p. 1 ff.; (1897), I, p. 41 ff.; ID., « Sitzungsber. Akad. Berlin » (1890), p. 1163.

(4) E. ARTINI, *Alcune nuove osservazioni sulle zeoliti di Montecchio Maggiore*, « R. Accademia Lincei » (1888), p. 538.

(5) DUFET, « Bull. », IV, pp. 113, 191; XI, p. 123; XIV, p. 144; ID., « Journal de Phys. », VIII, p. 292 (1888).

(6) F. ZAMBONINI, *Ricerche su alcune zeoliti*, « Mem. Acc. Lincei » (1905), p. 365.

(7) U. PANICHI, *Influenze della variazione di temperatura, ecc.*, « Mem. Acc. Lincei », (1905), IV, p. 389.

(8) C. SLAWSON, *The thermo-optical properties of heulandite*, « The Am. Min. Journal », X, settembre 1925.

(9) T. CARPANESE, *La proclorite del Monte Rosso di Verra*, questi « Rendiconti », IX, serie 6^a, gennaio 1929.

(10) A. BIANCHI, *Studi sulle cloriti*, « Atti del R. Ist. Ven. », 87, II parte.

(11) O. WEIGEL, « Sitz. d. Ges. zur Förderung — — — », Marburg, ottobre 1919.

(12) A. CAVINATO, *Nuove osservazioni sulle zeoliti del gruppo della natrolite*, « Mem. Acc. Lincei » (1927): *Nuove ricerche sulla trasformazione della scolecite*, questi « Rendiconti », VII, aprile 1928.

Petrografia. — *Il basalto di “Cucchiara Zeppara” presso Guspini (Sardegna).* Nota⁽¹⁾ di GIULIA MARTINEZ, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BOERIS.

In una escursione geologica, in compagnia dell'ing. Arvedo Righi e del prof. Antonio Cavinato, ho potuto visitare l'ellissoide granitico dell'Arburese sia al centro della massa che lungo il contatto con gli scisti.

Mi è grato esprimere pubblicamente all'Ing. Righi, direttore generale della Montevecchio, i più vivi ringraziamenti per la gentile ospitalità offertami e per i mezzi messi a mia disposizione in occasione di quella visita.

Durante l'escursione ho in particolare esaminato, tra l'altro, una collina chiamata « Cucchiara Zeppara », presso il tiro a segno di Guspini, costituita da una colata a forma di cupola rotondeggiante, alta m. 166 sul livello del mare, e solo una cinquantina di metri sui terreni circostanti, ed estendentesi in lunghezza per circa 200 o 300 metri. È formata da una roccia basaltica poggiante sopra un calcare miocenico giallastro, fortemente brecciato al contatto, che a sua volta riposa sulle ultime propagini del granito di Arbus e sullo scisto. Dove affiora in posto la roccia è di colore cenere scuro e fortemente fessurata sia in direzione orizzontale sia in una direzione pressochè verticale. Sulla età della formazione può dirsi sicuramente solo che deve essere postmiocenica, molto probabilmente quaternaria. La salita del poco magma che la ha originata deve essere stata molto tranquilla, poichè i sottostanti terreni non furono disturbati, nè si trovano tracce di ceneri tufacee, lapilli, ecc.; e la collinetta ha una forma rotondeggiante senza accidentalità, e pianeggiante nella sua parte più alta.

Nell'ascesa il magma ha incluso noduli di granito e di scisto, che in numero rilevante trovansi imprigionati entro il basalto. Hanno dimensioni di alcuni centimetri; quelli di granito sono ben conservati nella parte interna e alquanto alterati nella zona periferica; quelli di scisto sono invece fortemente alterati.

Durante la escursione ho raccolti campioni della roccia e dei noduli inclusi in una cava presso la borgata di Guspini, dove il materiale era fresco.

Ad un esame macroscopico la roccia effusiva appare compatta, dura, di colore grigio nerastro a tessitura uniforme: non è possibile distinguere

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Cagliari.

(2) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

nessuno dei minerali che la compongono; appare tuttavia microcristallina e poco o punto vetrosa.

Gli inclusi di granito sono di colore bianco sporco, a tessitura granulare ben visibile, duri e compatti; quelli di scisto sono giallognoli e verdastri con chiazze violacee, lucentezza resinosa, e sono spesso contornati da una aureola verde chiara.

Al microscopio il basalto presenta struttura microlitica pilotassitica, e risulta composto da una fittissima rete di microliti di plagioclasio, olivina, augite e granuli di magnetite, imprigionati in pochissimo vetro verdognolo: vi si osservano solo rari fenocristalli di plagioclasio e di olivina. Affatto accessoria è l'ilmenite in bacchettine fascicolate.

I *plagioclasio* ben conservati, senza tracce di alterazioni, senza strutture zonari, sono idiomorfi, listiformi, alquanto più grandi degli altri microliti. Si presentano in lamelle di geminazione polisintetica secondo la legge dell'albite. In alcune di queste aventi estinzioni simmetriche i valori dell'estinzioni sono 32-33 gradi. Gli indici di rifrazione sono sempre superiori a quelli del balsamo (kollolit = 1.535); il carattere del minerale è sempre positivo. Il plagioclasio è dunque una labradorite compresa fra le miscele Ab_2An_2 (labradorite) e Ab_2An_3 (labradorite-bytownitica).

L'*olivina* è in cristalli idiomorfi; alcuni di essi sono molto irregolari, di grandezza variabile da un centesimo di millimetro ad un millimetro. Hanno tinta arancione chiara dovuta probabilmente ad ossidi di ferro che sempre in piccoli granuli si trovano sia sul contorno che entro i singoli cristalli. Talvolta questi cristalli di olivina presentano le tipiche screpolature riempite da materiale di alterazione; hanno un leggero ma evidente pleocroismo con

n_p = bruno rossastro

n_g = giallo rossastro

Alcuni cristalli presentano un nucleo interno a contorno irregolare, incolore senza pleocroismo; in essi si osservano con maggiore evidenza i caratteri ottici dell'olivina.

Tra i *pirosseni monoclino*, che insieme ai plagioclasio sono gli elementi più abbondanti, si notano piccoli cristalli a contorni netti e regolari ben idiomorfi, di colore giallo pallido, con sensibile pleocroismo che va dal giallognolo al violaceo. Gli angoli di estinzione in sezioni parallele al piano di simmetria danno valori: $\alpha : n_g = 52^\circ - 54^\circ$ che sono propri di un'*augite*. Il netto pleocroismo ed il colore del minerale fanno pensare ad un termine fortemente titanifero. Questa supposizione sarebbe avvalorata dall'alta quantità di titanio (3.60 %) presente nella roccia. La *magnetite*, nera ed opaca, si trova in granuli irregolari, e più frequentemente in granuli irregolari per forma e dimensioni.

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati (1):

	Comp. %	Quantità molecolari	Raggruppamenti molecolari	
			Sec. Loew. Lessing	Sec. Niggli
SiO ₂	45.20	0.7525	0.7525 = SiO ₂	0.7525 = <i>si</i>
TiO ₂	3.60	0.4494	—	0.1791 = <i>al</i>
Al ₂ O ₃	18.26	0.1791	0.2081 = R ₂ O ₃	0.2779 = <i>fm</i>
Fe ₂ O ₃	4.64	0.0290	—	0.1574 = <i>c</i>
FeO	5.83	0.0811	0.4636 = RO	0.0863 = <i>alk</i>
MnO	0.081	0.0011	—	—
MgO	5.60	0.1388	—	—
CaO	8.83	0.1574	—	—
Na ₂ O	3.42	0.0551	—	—
K ₂ O	2.94	0.0312	—	—
H ₂ O	1.19	0.0660	—	—
	99.59			

La rappresentazione triangolare di Osann dà:

$$S = 69.73$$

$$A = 5.02$$

$$a = 3.30$$

$$C = 5.38$$

$$c = 3.55$$

$$n = 6.38$$

$$F = 19.87$$

$$f = 13.15$$

$$100.00$$

$$20.00$$

In questo diagramma il punto rappresentativo cade nella regione dei gabbri alcalini in causa del valore abbastanza forte del coefficiente a .

(1) Il titanio è stato determinato colorimetricamente ed il ferro (ferroso) con una disaggregazione a parte in acido fluoridrico e acido solforico in ambiente di anidride carbonica.

Il manganese fu pure ricercato colorimetricamente sia nel ferro ed alluminio che nel calcio e magnesio; se ne trovò precisamente un sesto della quantità totale nel ferro ed alluminio, un sesto nel calcio e quattro sestimi nel pirofosfato di magnesio (Mg₂P₂O₇). Nel calcio e nel magnesio si ricercò col metodo di M. Marshall e H. E. Walter sciogliendo sia CaO che Mg₂P₂O₇ in acido nitrico (il secondo a caldo) e aggiungendo poche gocce di nitrato d'argento e di persolfato ammonico (NH₄)₂S₂O₈. L'ossido di manganese trasformato in Mn₂P₂O₇ venne sottratto quindi dal Mg₂P₂O₇.

La formula magmatica secondo il Loewinson Lessing è:

$$\begin{aligned} \text{RO} = 2.22 \quad \text{R}_2\text{O}_3 = 1 \quad \text{SiO}_2 = 3.61 \quad \alpha = 1.38 \quad \beta = 89 \\ \text{R}_2\text{O} : \text{RO} = 1 : 4.37 \quad \text{K}_2\text{O} : \text{Na}_2\text{O} = 1 : 1.76 \end{aligned}$$

Con la rappresentazione del Niggli⁽¹⁾ la formula della roccia è molto prossima al tipo medio gabbro-essexitico dato dall'autore pei magmi della serie sodica:

	si	al	fm	c	alk	k	mg	c/fin
Gabbro essexitico	105	23	43	24	10	0.25	0.45	0.55
	107	25	40	22	12	0.36	0.49	0.56

Essa corrisponde bene ai tipi che il Rosenbusch⁽²⁾ dà per le trachidoleriti. Per la composizione chimica e le conseguenti costanti magmatiche che ne risultano, per la sua composizione mineralogica e la sua struttura, come pure per il suo aspetto macroscopico, la roccia può definirsi un *basalto alcalino*, o una *trachidolerite augitico-olivinica*.

È vero che per una tale denominazione dovrebbe essere, secondo gli autori tedeschi (vedi Rosenbusch, p. 455), soddisfatta la relazione $a > c$ tra le due costanti dell'Osann; ma si osservi che nel nostro caso è $a = 3.30$, $c = 3.55$ che sono quindi poco diverse. Inoltre è da osservare che caratteristica delle trachidoleriti è spesso una percentuale elevata di titanio, come nel nostro caso. (Rosenbusch, p. 456).

INCLUSI.

a) *Inclusi di granito*. — In sezione sottile questi inclusi si riconoscono formati di ortoclasio e di albite oligoclasica.

L'*ortoclasio* degli inclusi è in larghe plaghe a contorno irregolare col bordo in parte riassorbito dal magma. È ben conservato, senza inclusioni; talvolta rotto in piccoli frammenti così da avere un aspetto brecciforme, o solcato da irregolari fenditure riempite di materiale isotropo fortemente alterato. In alcune plaghe poi si presenta caolinizzato.

L'*albite oligoclasica* è in grossi individui a geminazione polisintetica a fitte e sottili lamelle. Il materiale è ben conservato; talvolta i singoli cristalli sono rotti per evidenti fenomeni cataclastici e le screpolature sono riempite da materiali non riconoscibili in causa della sua profonda alterazione.

(1) NIGGLI, *Die Gesteins-Metamorphose*, I, p. 41.

(2) ROSEBUSCH, *Elemente der Gesteinslehre*, p. 462.

Il plagioclasio ha i bordi fortemente riassorbiti e ricristallizzati con la formazione di un caratteristico reticolato che il Lacroix⁽¹⁾ ha descritto nel libro *Les enclaves des roches volcaniques* e che fu anche osservato da G. B. Dal Piaz⁽²⁾ in alcune rocce degli Euganei.

I noduli inclusi sono tutti contornati da una zona di spessore variabile da un millimetro a qualche decimo di millimetro formata da augite ed in prossimità loro il plagioclasio della roccia basaltica è tutto caolinizzato e ridotto in parte ad un ammasso di sostanza isotropa di colore grigiastro.

L'*augite*, che è sempre in elementi notevolmente più grossi di quelli che si trovano nel basalto, è usualmente in granuli a contorno irregolare e di rado in individui idiomorfi prismatico tozzi. Non presenta pleocroismo, è incolora, ha sfaldatura pirossenica tipica. Alcuni piccoli cristallini sono entro il plagioclasio sia della roccia che del nodulo incluso. I lembi del plagioclasio sono sfilacciati, frastagliati, con diramazioni aghiformi intrecciate, ed imprigionano piccoli cristalli di augite. Anche in alcune parti delle zone centrali dell'albite oligoclasica si osserva una serie di minutissimi individui che ben si riconoscono per augite.

Interessante è l'alterazione subita dalla biotite in questi inclusi, che, con ogni probabilità appartengono al vicinissimo granito di Guspini come fa supporre oltrecchè questa stretta vicinanza, anche l'analoga composizione mineralogica e strutturale da me rilevata in alcune sezioni messe a mia disposizione dal prof. Cavinato, che sta studiando tutta la zona dell'Arburese.

I primitivi cristalli di biotite sono stati interamente trasformati: al contorno si osserva il tipico *orlo opacitico*, aggregato di cristalli di augite e granuli o aghettini di magnetite; nell'interno invece si ha sia formazione di clorite che di una sostanza fortemente nerastra in causa della segregazione di ossidi di ferro.

b) *Inclusi di scisto* - L'aspetto macroscopico degli inclusi di scisto è quello di plaghe violacee, a strati chiari e scuri, della grossezza di alcuni centimetri.

In qualche punto gli inclusi di scisto conservano ancora il loro primitivo carattere e risultano composti da un fitto aggregato di minuti granuli di quarzo e da listerelle di muscovite. Vi si osserva pure qualche granulo di magnetite, qualche cristallino di zircone e di tormalina fortemente pleocroica. In queste zone lo scisto si mostra analogo a quello delle formazioni, da me pure esaminate al microscopio in varie sezioni sottili, che si estendono ad arco da Guspini per Montevecchio, Ingurtosu, Fluminimaggiore, contornando l'ellissoide granitico dell'Arburese.

Nelle altre parti lo scisto è profondamente metamorfosato e vi si osserva una serie numerosa di minerali caratteristici, quali: cordierite, epi-

(1) LACROIX, *Les enclaves des roches erutives volcaniques*, p. 113.

(2) G. B. DAL PIAZ, *Il Basalto di Rio Schifanoia negli Euganei e i suoi inclusi*, «Mem. Ist. Geol. della R. Università di Padova».

doto, sillimannite e granati; ci si trovano anche dei granuli di magnetite, immersi in una notevole quantità di vetro grigiastro, nerastro, verdognolo, alle volte incolore; plaghe caolinizzate, e alcune larghe zone che sembrerebbero formate da una sostanza argillosa colloidale.

La *cordierite* è l'elemento prevalente di queste zone metamorfosate e si trova sia in cristalli a contorno molto regolare e di forma rettangolare, sia in plaghe microgranulari formate da aggregati di minutissimi cristallini. Essa presenta i caratteristici geminati secondo {110} di compenetrazione in modo da dare origine ai trigemini ben conosciuti a contorno esagonale.

I cristalli incolori hanno una grandezza che varia da due a tre decimi di millimetro a due o tre centesimi di millimetro, sono alterati, contengono spesso minutissimi granuli di magnetite e piccoli cristallini di forma bipiramidale allungata o a sezione quadrata con alto rilievo e aureole policriche. Questi cristallini fanno pensare a zirconcini che spesso si trovano nella cordierite: non fu possibile però determinarli con esattezza perchè hanno grandezze dell'ordine del millesimo di millimetro.

L'*epidoto*, molto scarso, è in granuli irregolari, non pleocroico, con altissimo rilievo, di colore leggermente bruno-verdastro. Esso è dovuto all'alterazione di plagioclasti contenuti nel primitivo scisto.

La *sillimannite* si presenta in cristalli aciculari, incolori, molto scarsi ed alle volte in fascetti radiali. Tra le proprietà ottiche non fu possibile determinare che l'allungamento positivo degli aciculi.

Il *granato* è del tipo piropo; si presenta in larghe plaghe formate da minutissimi granuli di color rosso vino con altissimo rilievo, quasi sempre perfettamente idiomorfi con abito di rombododecaedro.

Fisiologia. — *Respirazione periodica provocata dalla simpaticotomia* ⁽¹⁾. Nota di G. PUPILLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio V. ADUCCO.

Quale sia la complessa fenomenologia a carico della funzione respiratoria, che provoca il taglio bilaterale del simpatico al collo nell'animale decerebrato, è stato dettagliatamente esposto [cfr. Camis ⁽³⁾; Pupilli ⁽⁴⁾]. Fondamentalmente si osservano i seguenti fatti: subito dopo la doppia simpaticotomia diminuzione degli scambi gassosi polmonari (coniglio, testuggine), diminuzione della portata circolatoria del sangue nella vena polmonare (testuggine), dissociazione del respiro costo-diaframmatico (coniglio), successivamente aumento della grandezza respiratoria (coniglio). Tali fenomeni sono del tutto transitori nella testuggine; il coniglio invece muore in un tempo variabile da 45 minuti ad un'ora e mezza.

I fatti osservati sono stati così interpretati: lungo il simpatico cervicale devono giungere al centro respiratorio bulbare ed al centro vasomotore del polmone impulsi tonici, la cui mancanza può essere compensata dalla funzione regolatrice mesencefalica; solamente quando quest'ultima più non sia in atto, rendonsi manifesti gli effetti della simpaticotomia.

La dissociazione dei movimenti costali e diaframmatici sta a dimostrare — concludevo nell'ultima mia Memoria sull'argomento ⁽⁴⁾ — la depressa eccitabilità del centro respiratorio: lo stesso significato hanno altri fenomeni rilevati a carico della funzione respiratoria nella testuggine in analoghe condizioni sperimentali, e che qui espongo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia sperimentale della R. Università di Parma.

(2) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(3) CAMIS M., *Osservazioni sull'influsso del simpatico sulla respirazione*. « Arch. Néerland. de Physiol. », 1922, VII, 523-531, con 5 figg. int. n. t.; *Osservazioni sull'influsso del simpatico cervicale sul tipo respiratorio*. « Boll. della Soc. Med. di Parma », Serie 2^a, 1922, XV, 123-126; *Osservazioni sull'influsso del simpatico sulla respirazione*. Nota II. « Arch. di Fisiol. », 1923, XXI, 385-395, con 3 figg. int. n. t.

(4) PUPILLI G., *Simpaticotomia cervicale e respiro*. (Studio sull'animale decerebrato). « Arch. di Fisiol. », 1923, XXI, 397-409; *Simpaticotomia cervicale e respiro*. — II. *Gli effetti della simpaticotomia cervicale sugli scambi gassosi polmonari e sulla portata circolatoria nella vena polmonare, nella « Testudo graeca » decerebrata*. « Boll. della Soc. Med. di Parma », Serie 2^a, 1928, XXI, 113-130, con 4 figg. int. n. t. e « Arch. it. de Biol. », 1928, LXXX, 116-129, con 4 figg. int. n. t.; *Dissociazione dei movimenti respiratori provocata dalla simpaticotomia cervicale nel coniglio decerebrato*. « L'Ateneo Parmense », 1929, volume-supplemento, 463-468, con 3 figg. int. n. t. e « Boll. della Soc. it. di Biol. sperim », in corso di pubblicazione.

In alcune delle testuggini (*Testudo graeca*) da me operate di simpaticotomia dopo la decerebrazione è stato osservato il cambiamento di forma della funzione respiratoria, da ritmica in periodica, qualche tempo dopo la sezione dei due simpatici e più precisamente quando già i valori degli scambi gassosi polmonari e della portata circolatoria del sangue nella vena polmonare erano tornati alla norma.

Le modalità della tecnica operativa, della decerebrazione e della simpaticotomia, seguita in queste ricerche sono quelle esposte nella mia precedente Memoria ⁽¹⁾. Faccio soltanto rilevare che: gli esperimenti sono stati condotti nella stagione estiva, sopra animali svegli, in piena attività di movimenti; l'intervento operativo è stato praticato senza narcosi; la sezione del tronco encefalico è stata fatta subito all'avanti del piano passante per l'estremo posteriore dei lobi ottici; dopo la decerebrazione si è provveduto accuratamente alla emostasi, mediante piccole compresse di garza, al fine di impedire che stravasi sanguigni venissero ad esercitare un certo grado di pressione sui centri respiratori. Quest'ultima precauzione era suggerita, oltre che dalle regole generali di tecnica, dalle osservazioni sperimentali di Marckwald ⁽²⁾: separando nei conigli il midollo encefalico dal resto dell'encefalo mediante un taglio a livello degli apici delle ali cineree si osserva l'immediato comparire della respirazione periodica; ma anche se il taglio cade più in alto la respirazione talora si fa periodica, quando per stravasamento sanguigno in vicinanza delle ali cineree venga esercitata una pressione sul centro respiratorio bulbare. Il metodo di registrazione dei movimenti respiratori è quello diretto, indicato da Bert e riportato da Fredericq ⁽³⁾: mediante una cannula immessa in trachea, l'animale respira l'aria contenuta in un grosso vaso comunicante con un timpano scrivente (il dispositivo era doppio ed in ciascuno dei due bronchi veniva immessa una cannula quando volevasi ottenere contemporaneamente il pneumogramma di un polmone separato da quello dell'altro).

Riporto alcuni dei tracciati ottenuti. La linea ascendente del pneumogramma, secondo la direzione della scrittura del tracciato indicata dalla freccia, corrisponde all'espiazione e la linea discendente all'inspirazione.

Nella figura 1 (esperienza del 12 luglio 1928) è riprodotto il pneumogramma di una testuggine ottenuto tre quarti d'ora circa dopo la simpaticotomia: vedesi il respiro da ritmico farsi periodico; e periodica la funzione respiratoria permane ancora per circa mezz'ora (vedasi la fig. 2), dopo il qual tempo essa riprende il ritmo normale. Nelle figure 3 e 4 sono riportati i tracciati ottenuti in altra esperienza: il respiro della testuggine,

(1) PUPILLI G., loc. cit.

(2) MARCKWALD M., *Die Athembewegungen und deren Innervation beim Kaninchen*. « Zeitschr. f. Biol. », 1886, XXIII, 149-283, con 43 figg. int. n. t.

(3) FREDERICQ L., *Manipulations de Physiologie*. Paris, Libr. J.-B. Baillièrre et Fils, 1892. (p. 130, fig. 103).

un'ora circa dopo la sezione dei simpatici al collo, è periodico e così si mantiene per quasi un'ora (esperienza del 17 giugno 1928). La periodicità della funzione respiratoria non si manifesta nell'animale decerebrato se non dopo la doppia simpaticotomia.

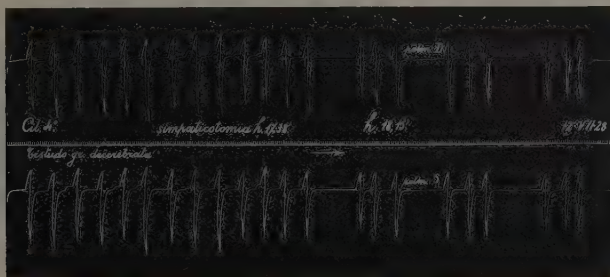


Fig. 1.

(Riduzione dell'originale a 1/4).

La forma dell'escursione respiratoria in tutti i pneumogrammi riproduce quella descritta da Bert⁽¹⁾ come caratteristica dei movimenti respiratori della testuggine ed osservata anche dal Fano⁽²⁾: l'animale compie



Fig. 2.

(Riduzione dell'originale a 1/4).

successivamente una mezza espirazione, un'inspirazione totale ed un'altra mezza espirazione seguentisi senza intervallo. Là ove il respiro è periodico, il numero degli atti respiratori di ciascun gruppo è variabile nello stesso animale e pure varia il numero dei gruppi in una data unità di tempo; non si vede inoltre nessun rapporto fra la durata ed il grado della venti-

(1) BERT P., *Leçons sur la physiologie comparée de la respiration*. Paris, Libr. J.-B. Baillière et Fils, 1870.

(2) FANO G., *Sulla respirazione periodica e sulle cause del ritmo respiratorio*. «Lo Sperimentale», 1883, LI, 561-597, con 15 figg. int. n. t.

lazione polmonare rappresentato dai gruppi e la durata delle pause: questi fatti concordano con quelli rilevati dal Luciani⁽¹⁾ nello studio del fenomeno di Cheyne e Stokes in ordine alla dottrina del movimento respiratorio e con quelli descritti dal Fano (loc. cit.) nell'esame del respiro periodico delle tartarughe ibernanti. I movimenti di ogni singolo gruppo o hanno

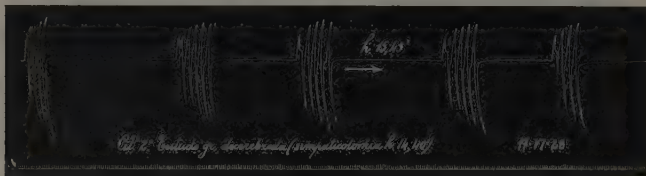


Fig. 3.

(Riduzione dell'originale a 1/4).

la stessa ampiezza (vedansi le figure 1 e 2) oppure — e ciò si è osservato più di frequente — aumentano di intensità progressivamente (vedansi le figure 3 e 4) così che le ultime respirazioni del gruppo sono le più ampie. Manca dunque la fase discendente del gruppo, che compare invece nel fenomeno classico descritto da Cheyne e Stokes.



Fig. 4.

(Riduzione dell'originale a 1/4).

L'andamento del fenomeno da me osservato è quello dei fenomeni periodici già studiati a carico della funzione respiratoria e di altre funzioni. Così nella funzione periodica del cuore di rana legato agli atri il Luciani⁽²⁾ notò la equivalenza dei singoli movimenti di ciascun gruppo, talvolta l'amplificazione maggiore delle escursioni sistoliche ultime del gruppo; i gruppi, che ebbe ad osservare il Fano (loc. cit.) registrando la respira-

(1) LUCIANI L., *Del fenomeno di Cheyne e Stokes in ordine alla dottrina del movimento respiratorio. Studio critico-sperimentale.* «Lo Sperimentale», 1879, XLIII, 341-354, con 10 tracciati ed un diagramma in tav. f. t. e 449-466.

(2) LUCIANI L., *Sulla fisiologia degli organi centrali del cuore. Indagini sperimentali sulle rane fatte nell'Istituto fisiologico di Lipsia.* «Rivista Clinica», serie 2^a, 1873, III, 129-148, 168-180 e 244-273, con 43 figg. int. n. t.

zione di tartarughe sottoposte all'azione di gas diversi, sono formati da movimenti respiratori della stessa ampiezza eccezion fatta per l'ultima o le ultime escursioni, le quali superano le altre in intensità. Le mie osservazioni corrispondono ai risultati sperimentali di questi AA., risultati i quali — come è noto — stanno a comprovare la insostenibilità dell'ipotesi messa avanti da Sokolow e Luchsinger⁽¹⁾ e da Langendorff⁽²⁾ che la pausa dei fenomeni periodici dipenda dall'esaurimento del centro ed il gruppo al contrario sia l'espressione del ristabilimento delle energie del centro stesso avvenuto durante la pausa. Come è possibile infatti accettare siffatta ipotesi, quando nella forma periodica si passa d'un tratto dalla massima attività al riposo assoluto?

Se diverse sono state le interpretazioni della genesi dei fenomeni periodici, l'affermazione enunciata in merito dal Fano (loc. cit.), è quella che più obiettivamente rispecchia l'essenza dei fatti osservati: un movimento automatico ritmico diventa periodico quando il centro che presiede al movimento stesso viene ad essere per una ragione qualsiasi depresso nella sua eccitabilità, riflessa ed automatica. Più specialmente, secondo le parole stesse dell'a. ⁽³⁾, la forma periodica della respirazione è « il prodotto di una proprietà immanente del centro respiratorio, per la quale esso in stato normale sviluppa ritmicamente le energie accumulate col processo nutritizio, mentre in condizioni speciali di depressione emette i suoi impulsi in una forma periodica ». E così i fenomeni periodici rilevati nella funzione respiratoria della testuggine, nelle condizioni sperimentali enunciate, sono l'espressione della depressa eccitabilità del centro respiratorio bulbare. Il loro comparire ha dunque lo stesso significato che ha la comparsa della dissociazione dei movimenti costo-diaframmatici nel respiro di coniglio in conseguenza della simpaticotomia: nei mammiferi la depressione del centro si manifesta qualche minuto (5-10) dopo la sezione dei due tronchi nervosi al collo e perdura fino allo stadio terminale che precede la morte dell'animale, nei cheloni invece essa compare tardivamente come fenomeno transitorio.

Il reperto sperimentale ottenuto nella *Testudo* rappresenta inoltre una indiretta conferma di quanto è stato detto riguardo al meccanismo dell'azione tonica del simpatico sul centro respiratorio: il Camis⁽⁴⁾ ha soste-

(1) SOKOLOW O. u. LUCHSINGER B., *Zur Lehre von dem Cheyne-Stokes'schen Phänomen*. « Arch. f. d. gesam. Physiol. », 1880, XXIII, 283-301.

(2) LANGENDORFF O. u. SIEBERT G., *Studien ueber die Innervation der Athembewegungen*. — III. Mitt. *Ueber periodische Athmung bei Fröschen*. « Arch. f. Anat. u. Physiol. », (physiol. Abt.), 1881, 241-258, con 1 fig. int. n. t. e 11 figg. in tav. f. t.

(3) FANO G., *Ancora sulla respirazione periodica e sulle cause del ritmo respiratorio*. « Lo Sperimentale », 1884, LIII, 132-146. (p. 137).

(4) CAMIS M., *Contributo allo studio dell'apnea adrenalinica*. « Giorn. di Biol. e Med. speriment. », 1923, I, 418-421.

nuto che gli impulsi tonici, i quali giungono al centro respiratorio bulbare seguendo la via del simpatico cervicale, potranno forse agire anche indirettamente mediante la innervazione vasale ma senza dubbio agiscono direttamente sugli elementi nervosi del centro. Siccome le proprietà — finora sconosciute — da cui si generano i fenomeni periodici vanno localizzate nell'elemento funzionante e non nell'ambiente che lo circonda ⁽¹⁾, non è chi non veda la corrispondenza fra i risultati ottenuti e l'enunciazione esposta.

Embriologia. — *Ricerche di embriologia sperimentale nei Ciclostomi.* — II. *Gastrulazione e regione cordale* ⁽²⁾. Nota di S. RANZI, presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In una precedente Nota ⁽⁴⁾ ho posto in evidenza le principali malformazioni osservate negli embrioni, che si sviluppano da ova di *Petromyzon planeri* Bl., tenute in LiCl (soluzione $\frac{m}{15}$ per 7-9 h.) durante il processo di gastrulazione e in stadi precedenti. I mostri dei quali ho fatto cenno sono di due sorta: embrioni che presentano anomala gastrulazione ed embrioni che presentano malformazioni dell'estremità cefalica. Questo mio reperto ben si accorda con quanto da Cotronei ⁽⁵⁾, da Leplat ⁽⁶⁾, da Bellamy ⁽⁷⁾ e da Pasquini e Meldolesi ⁽⁸⁾ sugli Anfibi è stato posto in evidenza: negli embrioni più avanzati nello sviluppo, da questi AA. esaminati, la malformazione interessava l'estremità cefalica e non il tronco; si deve anzi al Cotronei un'interessante osservazione: i processi malformativi sono localizzati alla zona precordale del capo e non interessano la regione cordale di questo e il tronco.

Questo fatto, alquanto strano, che pur si osserva, almeno con una certa approssimazione, anche in una forte percentuale degli embrioni di *Petromyzon*

(1) FANO G., loc. cit., (p. 145).

(2) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(3) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(4) RANZI S., *Ricerche di embriologia sperimentale nei Ciclostomi I.* «Rend. R. Acc. Naz. Lincei» (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), serie 6^a, vol. 10, 1929.

(5) COTRONEI G., *Correlazioni e differenziazioni III.* «Rend. R. Acc. Naz. Lincei» (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), serie 5^a, vol. 28, 1919.

(6) LEPLAT G., *Action du milieu sur le développement des larves d'amphibiens.* «Arch. de Biol.», vol. 30, 1920.

(7) BELLAMY A. W., *Differential susceptibility as a basis for modification and control of early development in the frog II.* «Amer. Journ. Anat.», vol. 30, 1922.

(8) PASQUINI P. e MELDOLESI G., *Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi. I.* «Rend. R. Acc. Naz. Lincei» (Cl. Sc. fis. mat. e nat.), serie 6^a, vol. 10, 1929.

da me studiati, restava inspiegato. Secondo il Cotronei⁽¹⁾, la malformazione resta localizzata alla zona precordale del capo per la differenza delle forze direttrici dello sviluppo, tra questa parte precordale, dove lo sviluppo dell'encefalo dirige lo sviluppo delle altre parti⁽²⁾, e il tronco, nel quale lo sviluppo dei diversi organi è subordinato alla presenza della corda dorsale, la cui azione morfogenetica è stata posta in evidenza dal Giardina⁽³⁾. Secondo il Bellamy, la parte cefalica è più suscettibile di malformazioni, perchè ha maggior metabolismo in rapporto ad un ipotetico gradiente assiale. L'ipotesi del Cotronei lasciava ancora adito a ulteriori ricerche, dovendosi assodare perchè la regione cordale (e nel senso dell'A. per regione non s'intende una pura condizione anatomica, ma una condizione di correlazione di sviluppo) non sia influenzata dall'agente inibitore; mentre l'ipotesi del Bellamy è contraria ad altre mie ricerche che hanno dimostrato l'inesistenza di un gradiente assiale regolatore dello sviluppo⁽³⁾.

La quistione della malformazione limitata all'estremità cefalica si presenta poi particolarmente interessante, perchè, chiarita che sia la ragione di questa limitazione, si sarà fatto un notevole passo verso la conoscenza delle cause della malformazione cefalica stessa, che, nelle forme superiori di Vertebrati, presenta tanto interesse in tutti i suoi aspetti: ciclocefalia, otocefalia, monoftalmia asimmetrica e forme corrispondenti di anoftalmia.

Credo bene pertanto di riassumere in questa Nota i risultati ottenuti, nello studio dei miei embrioni mostruosi.

Dall'esame dei miei protocolli emerge che:

Una parte degli embrioni, che hanno soggiornato in LiCl o MgCl_2 ⁽⁴⁾ prima dell'inizio della gastrulazione, gastrula irregolarmente (exogastrula, asintassia blastoporale, spina bifida) e muore, mentre l'altra parte gastrula regolarmente o, pur presentando una gastrulazione leggermente irregolare, si regola rigettando una parte dei macromeri ed allo stadio di piastra neurale è simile ai controlli. Questi embrioni, di solito, continuano a svilupparsi regolarmente e solo in rari casi danno luogo a larve con anomalie dell'estremità cefalica, anomalie che solo eccezionalmente sono molto pronunciate; affatto eccezionali sono poi i casi di larve con anomalie del tronco.

Una parte degli embrioni, che hanno soggiornato in LiCl ovvero in MgCl_2 , all'inizio nella gastrulazione, presenta varî gradi di spina bifida e asintassia blastoporale cui segue la morte; gli altri si sviluppano normalmente fino allo stadio di piastra neurale e poi si comportano come i pre-

(1) COTRONEI G., *Corrélations et différenciations*. « Arch. Ital. de Biol. », vol. 71, 1922.

(2) GIARDINA A., *Sul valore morfogenetico della corda dorsale*. « Arch. Ital. Anat. e Embr. », vol. 12, 1914.

(3) RANZI S., *Embriogenesi e gradienti assiali*. « Mem. Pontif. Acc. Sc. », vol. 12, 1929.

(4) Soluzione di MgCl_2 $\frac{m}{10}$ ovvero $\frac{m}{15}$ durante $7\frac{1}{2}$ h.

cedenti, sol che molto maggiore è la percentuale di embrioni con malformazioni cefaliche e queste sono spesso di grande entità⁽¹⁾; eccezionali sono i casi di larve con anomalie nella regione del tronco.

Gli embrioni, che hanno soggiornato in LiCl verso la fine della gastrulazione, o presentano frequenti e considerevoli malformazioni della regione cefalica, oppure sono normali; rari (ma meno che non nei casi precedenti) gli embrioni con malformazioni nella regione del tronco.

Prima di discutere questi reperti non è fuori luogo ricordare la disposizione dei materiali destinati a formare i diversi organi nella blastula degli Anfibi. Görttler⁽²⁾ e Vogt⁽³⁾, in base a ricerche, condotte con diversi metodi, stabilirono che il materiale destinato a formare il tubo neurale occupa, nella blastula, il quadrante corrispondente al dorso del futuro embrione. Il limite inferiore di questo quadrante corrisponde al punto dove si abbozzerà il solco falciforme; al di là di questo limite, è una striscia che contiene il materiale della corda e addossato a questa, verso il polo vegetativo, è il materiale destinato a formare il mesoderma. Una distribuzione non dissimile fu osservata anche dal Conklin⁽⁴⁾ nelle Ascidie, per cui si può ritenere sia propria di tutti i Cordati a segmentazione totale, quindi anche del *Petromyzon*. Il Görttler⁽⁵⁾, in successive ricerche, ha anche studiato embrioni mostruosi di Urodeli, nei quali la gastrulazione non avveniva, ed è venuto alla conclusione che il materiale, destinato a formare i diversi organi, può anche evolversi, nella posizione che occupa nella blastula, formando i mostri con spina bifida già descritti da Hertwig⁽⁶⁾ ed altri mostri che egli ha chiamato embrioni anulari.

Gli embrioni di *Petromyzon* con anomalie della gastrulazione, di cui qui mi occupo, corrispondono, nelle linee generali, a quelli osservati negli Anfibi e — poichè, per quanto ho detto, è logico ritenere che la distribuzione dei materiali, destinati a formare gli organi, sia la stessa in ambedue i casi — si possono interpretare anche le forme a spina bifida del *Petromyzon*, come

(1) Questo reperto si accorda perfettamente con quanto PASQUINI e REVERBERI (*Studi sulla determinazione nello sviluppo degli Anfibi* « Boll. Ist. Zool. Roma » vol. 7, 1929) hanno osservato negli Anfibi.

(2) GOERTTLER K., *Die Formbildung der Medullaranlage bei Urodelen*. « Arch. f. Entw. mech. », Bd. 106, 1925.

(3) VOGT W., *Ueber Wachstum und Gestaltungsbewegungen am hinteren Körperende der Amphibien*. « Verh. Anat. Ges. », 35, Vers. Freiburg, 1926.

(4) CONKLIN E. G., *The organization and cell-lineage of the Ascidian egg*. « Journ. Acad. Nat. Sc. Philadelphia », S. 2, vol. 13, 1905.

(5) GOERTTLER K., *Experimentell erzeugte « Spina bifida » und « Ringembryobildungen » und ihre Bedeutung für die Entwicklungsphysiologie der Urodelenier*. « Zeit. f. Anat. u. Entw. », Bd. 80, 1926.

(6) HERTWIG O., *Urmund und Spina bifida*. « Arch. f. mikr. Anat. », Bd. 39, 1892.

effetto del mancato spostamento del materiale neuro-cordo-mesodermico dovuto alla mancata o incompleta gastrulazione.

Come ha mostrato il Görttler⁽¹⁾ con il metodo dei contrassegni colorati, il quadrante destinato a formare il tubo neurale si stringe e si allunga durante il processo di gastrulazione prendendo, alla fine di questo, la posizione della piastra neurale con un processo, che nulla ha a che fare con la concrenscenza ma è soltanto uno spostamento di materiali.

Tenendo presenti questi fatti; poichè, prescindendo dall'ectoderma destinato a formare la pelle dell'embrione, tutto il restante tessuto, salvo la parte più prossima al polo animale del materiale destinato a formare il sistema nervoso, partecipa direttamente alla gastrulazione; ogni lesione di qualche entità su di una parte qualunque di esso, si tradurrà come un difetto di gastrulazione (exogastrula, spina bifida, asintassia blastoporale) cui abbiamo visto seguire la morte. Solo le alterazioni interessanti la parte più prossima al polo animale del materiale destinato a formare il sistema nervoso, saranno compatibili con l'ulteriore sviluppo, perchè questa parte è indipendente dal processo di chiusura del blastoporo, e le alterazioni in parola si tradurranno in malformazioni cefaliche. *Resta così spiegata la ragione dell'estrema rarità e relativa scarsa gravità delle malformazioni della zona cordale del capo e del tronco. La grave alterazione del materiale destinato a formare questa zona determina alterazioni del processo di gastrulazione non compatibili con la vita dell'embrione.*

A favore di questa interpretazione sta anche il fatto, che nelle ova, che hanno soggiornato in LiCl alla fine della gastrulazione e mentre si forma la piastra neurale, si osservano casi di anomalie di organi della regione del tronco (midolla spinale, reni ecc), fatto questo affatto eccezionale in quelle, che hanno soggiornato in LiCl prima della gastrulazione.

Quanto ho esposto vale, non solo per il *Petromyzon*, ma anche per gli Anfibi, che hanno, come ho detto, simili processi di sviluppo e presentano simili mostruosità.

(1) Op. cit., 1925.

Embriologia. — *Relazioni nervose dell'occhio e organo olfattorio trapiantati, come abbozzi primari, in embrioni di Axololl* ⁽¹⁾. Nota di P. PASQUINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In una Nota precedente ⁽³⁾ ho già accennato ad alcuni fatti che riguardano sia l'innervazione degli occhi trapiantati, negli embrioni di Anfibi Anuri e Urodeli, che quella di bulbi doppi originati per fusione di due vescicole ottiche poste a contatto.

Tali questioni appaiono di fondamentale importanza nello studio della morfogenesi del sistema nervoso, specialmente dopo le ricerche del May e Detwiler (1925), che, trapiantando in embrioni di *Amblystoma*, la vescicola ottica nella regione otica, ottennero, nei casi studiati (15 in tutto), lo sviluppo del nervo ottico. Così anche il nervo olfattorio si sviluppava dalla vescicola olfattoria che si differenziava, nell'embrione ospite, essendo stato il placode olfattorio coinvolto nel trapianto dell'abbozzo oculare. Sia il nervo ottico che l'olfattorio, appartenenti agli organi corrispondenti autodifferenziati, si potevano connettere ai centri nervosi: il nervo ottico, in tre casi, alla porzione non asportata del ganglio del VII e VIII; in quattro casi, al ganglio del IX e X; in un solo caso, alla parete del midollo allungato. Il nervo olfattorio, invece, in due casi, giunse a mettersi in relazione col ganglio di Gasser; in tre, si unì alla porzione facciale del ganglio del VII e VIII e, in tre casi, al complesso ganglionare glosso-faringeo-vago. I nervi degli organi trapiantati determinavano sempre, nei gangli ai quali giungevano, un aumento notevole del numero dei neuroblasti e tale moltiplicazione cellulare si ripeteva nella parete del mielencefalo in corrispondenza del punto di penetrazione del nervo (iperplasia del 22-53 % rispetto al normale).

Questi risultati, più specialmente nei riguardi dell'organo olfattorio, concordano con i dati di Burr (1924) che, nel cervello di larve di *Amblystoma*, riscontrò iperplasie localizzate consecutive al trapianto dell'organo olfattorio e al differenziamento del nervo. Tali iperplasie si verificavano anche nel bulbo olfattorio, quando il placode olfattorio supplementare, si fondeva con quello normale e il nervo si differenziava, ma doppio. Al Bell (1906) ed al Luna (1916) si deve poi la conoscenza di altri fatti inerenti allo sviluppo causale dell'organo olfattorio negli Anfibi.

(1) Ricerche compiute nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

*(3) P. PASQUINI, *A proposito di trapianti embrionali* in «*Monitore Zoologico*», anno XL, n. 10, 1929.

I reperti di Burr sono pienamente d'accordo con quanto io stesso misi in evidenza in *Pleurodeles* (1927) a proposito della fusione degli occhi e del dipendente aumento delle fibre del nervo ottico, con la conseguente iperplasia dei centri, nei casi di completa regolazione dei costituenti il calice doppio ⁽¹⁾. A questo stesso tipo di esperimenti si riferisce recentemente il Detwiler (1929), che conferma, a circa tre anni di distanza e in *Rana fusca*, i risultati delle mie ricerche sulla fusione degli abbozzi oculari.

Le ricerche del May (1927), in *Rana temporaria* e *Bufo vulgaris*, mentre hanno convalidato il differenziamento indipendente degli organi di senso in questione, hanno esteso agli Anuri quanto, in precedenza May e Detwiler (1925) avevano dimostrato in *Amblystoma*: l'abbozzo dell'occhio e dell'organo olfattorio, trapiantati in sede differente da quella nella quale normalmente si sviluppano, tendono, durante il loro differenziamento, a mettersi in relazione, per mezzo dei rispettivi nervi, con il sistema nervoso centrale con il quale, talora, si fondono direttamente.

A questa « attrazione » dei neuroblasti sensori per quelli dei centri, il May annette il significato di un *neuroblastotropismo* e tanto questo, come l'iperplasia degli elementi cellulari dei gangli e della parete del midollo allungato, sono discussi dal May e Detwiler (1925) prima, dal May (1927) dopo, alla luce della teoria di Kappers (1917) della neurobiotassi, e di Cajal (1893) del neurotropismo.

Fatte queste premesse ed esposti brevemente i risultati che hanno aperto la via alla ricerca, non meno interessante, della funzionalità degli organi di senso trapiantati (Laurens e Williams, 1917 e Detwiler, 1929), risulta evidente come sia utile poter stabilire — ciò che mi propongo di fare in questa Nota — se i costituenti dei nervi degli organi trapiantati manifestino una certa elezione per i vari tratti differenziati dell'encefalo in via di sviluppo.

Ho cercato anche di accertare se le fibre dei nervi supplementari (nel caso che questi si sviluppino) giungendo ai centri, provochino costantemente la tipica reazione iperplastica consistente nella migrazione delle cellule che invadono la sostanza grigia in corrispondenza della zona di penetrazione del nervo; in altri termini se questa « attrazione » dei neuroblasti sensori verso quelli dei centri, che si manifesta con la loro iperplasia, sia più o meno spiccata per le varie sedi, ove l'organo trapiantato è costretto a differenziarsi.

Così impostata la mia ricerca, comunico i risultati ottenuti trapiantando, in embrioni di *Axolotl*, la vescicola ottica insieme con l'ectoderma lentogeno o priva di questo, tra embrioni — il donatore e l'ospite — dello stesso stadio corrispondente, nei vari esperimenti agli stadi: 23, 24, 26, 27 e 28 delle tavole dell'Harrison per *Amblystoma punctatum*.

(1) Cfr. anche R. G. HARRISON in « Arch. f. Entwickl.-mech » Bd. 120 (1929).

In questi stadi di sviluppo la vescicola ottica giunge gradualmente a contatto con lo strato interno ectodermico che si ispessisce in corrispondenza del territorio lentogeno, mentre l'abbozzo olfattorio è rappresentato dal rispettivo placode che, situato cranialmente ed al disotto dell'ectoderma lentogeno, va assumendo la forma di fossetta.

Ho compiuto il trapianto della vescicola ottica insieme con l'abbozzo olfattorio, omeoplasticamente e in varie zone del capo: *nella regione della otocisti, nella regione olfattoria e nella regione oculare*. Ho ottenuto, in tutti i casi, il differenziamento di un occhio normale nei suoi costituenti (ec-

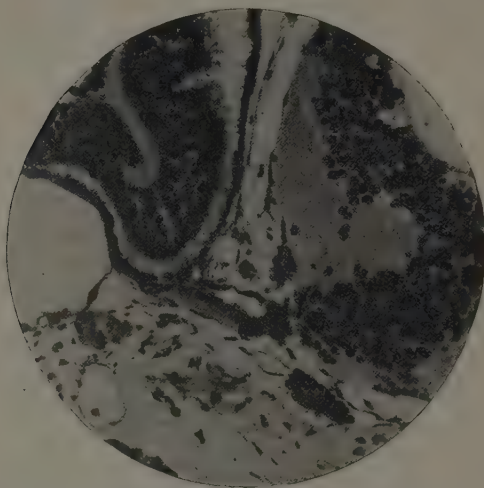


Fig. 1. — Occhio trapiantato nella regione otica: il nervo ottico giunge al midollo ove le cellule della zona iperplastica, hanno invaso la sostanza bianca.

(Da una sezione trasversale, ingr. $\times 150$ cca.).

cezion fatta dai calici ottici privi di cristallino quando la vescicola fu trapiantata senza l'ectoderma che la ricopre) che presentava tuttavia una distorsione più o meno accentuata nel calice, dipendente dallo spazio disponibile per il differenziamento della vescicola trapiantata.

Tra i vari esperimenti di trapianto della vescicola ottica, nel territorio omonimo, alcuni sono riusciti particolarmente dimostrativi, cioè quelli — che, nel differenziamento dell'organo, ripetono alcune modalità, verificate già in mie precedenti ricerche — nei quali la vescicola ottica fu trapiantata cefalicamente e caudalmente a quella dell'ospite e fra questi casi, alcuni, ai quali più particolarmente mi riferisco, di fusione parziale e di fusione completa delle due vescicole, negli elementi da queste differenziatisi (cellule visive, *tapetum*, nervo ottico e gli altri costituenti del calice).

Il risultato comune ottenuto, consiste nel fatto che tutti gli occhi trapiantati nelle varie regioni, hanno sviluppato il nervo ottico, il quale, negli occhi derivati dalla fusione di due vescicole, si presentò, talora, in relazione col componente trapiantato, od anche costituito dalla riunione delle fibre di esso con quelle del nervo normale.

Gli abbozzi olfattori trapiantati insieme con l'occhio si sono sviluppati nell'ospite in vescicole olfattorie, che però non in tutti i casi sono provviste del nervo.

TRAPIANTO NELLA REGIONE OTICA.

La vescicola ottica trapiantata, in vari esperimenti, dorsalmente e cranialmente all'otocisti non lesa, si è autodifferenziata in un occhio normale, nei costituenti del calice più o meno deformato, situato fra il mielencefalo e il labirinto. In un caso, particolarmente illustrativo, l'occhio è provvisto del cristallino derivato dall'ectoderma lentogeno trapiantato, che occupa tutta la cavità oculare priva di abbozzo del vitreo e gli strati retinici (coni e bastoncelli, granulare e reticolare esterno; granulare e reticolare interno, cellule ganglionari e fibre) normalmente differenziati. L'occhio, possiede il nervo che giunge ventralmente e lateralmente alla parete del mielencefalo percorrendo un breve tratto nel mesenchima e produce la tipica iperplasia cellulare nel midollo, immediatamente dietro l'origine dell'acustico. La zona iperplastica corrisponde in modo definito al punto d'arrivo delle fibre del nervo ottico e si estende lungo questo (cfr. la fig. 1).

TRAPIANTO NELLA REGIONE OLFATTORIA.

La vescicola ottica, insieme con l'ectoderma lentogeno e il placode olfattorio, sono stati trapiantati dorsalmente al placode olfattorio dell'ospite.

In un caso l'occhio, autodifferenziatosi dorsalmente e caudalmente alla fossetta olfattiva normale, è capovolto risultando la fessura coroidea rivolta dorsalmente ed è compreso fra l'emisfero cerebrale, l'epidermide e l'organo olfattorio trapiantato (cfr. la fig. 2). Questo è rappresentato da una vescicola cava priva di nervo non comunicante con l'esterno ed a contatto immediato con il calice supplementare. L'occhio, per un tratto è aperto sulla parete cerebrale per un'interruzione nel tapetum che si continua con essa. Nella cavità interposta fra la retina e l'encefalo sporge lo strato dei coni e bastoncelli da un lato; dall'altro, le cellule prodotte dalla forte iperplasia cellulare che si è provocata nella parete del diencefalo.

Il nervo ottico è rappresentato, per un cortissimo tratto, da fibre che emergono dorsalmente dal calice e giungono alla zona iperplastica localizzata.

In un altro esperimento, dello stesso tipo, fu escluso l'ectoderma lentogeno e compresa, invece, una porzione della parete prosencefalica che si è autodifferenziata sull'ospite in sostanza grigia e bianca dorsalmente al bulbo olfattorio di un lato estendendosi più caudalmente all'emisfero con il quale si è fusa. L'occhio trapiantato, privo di cristallino, si apre con il tapetum nel ventricolo dell'emisfero e il tapetum stesso, che circonda completamente la retina, si continua, ventralmente, con la parete cerebrale, dorsalmente con il territorio nervoso trapiantato. La retina che è differen-

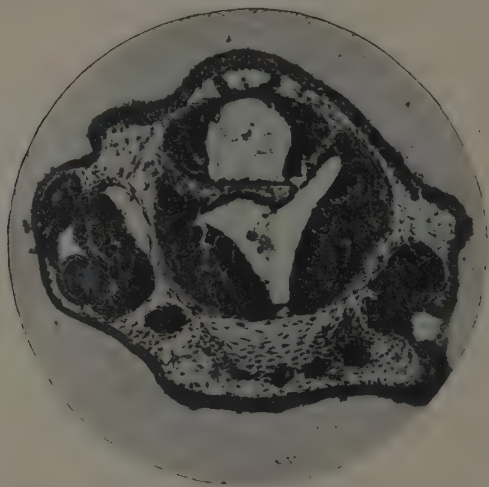


Fig. 2. - Occhio trapiantato, nella regione olfattoria, dorsalmente e caudalmente all'organo olfattorio normale. (Sezione trasversale, ingr. $\times 80$ cca.).

ziata in tutti gli strati, viene così a sporgere nel ventricolo cerebrale estendendosi caudalmente al 3° ventricolo del diencefalo ove diviene libera insieme ai processi corioidei superiori. Più caudalmente si unisce, per un certo tratto, alla parete encefalica trapiantata.

Nella retina autodifferenziatasi in seno al cervello, il nervo ottico è presente e si porta alla parete nervosa trapiantata che è iperplastica nella zona corrispondente alla penetrazione del nervo (cfr. la fig. 3).

TRAPIANTO NELLA REGIONE OCULARE.

Molto interessante è il risultato ottenuto in un esperimento di trapianto della vescicola ottica con l'ectoderma lentogeno ventralmente e a contatto a quella dell'ospite, lesa nel diante ventrale. Undici giorni dopo

l'operazione è in atto la regolazione di un doppio calice i cui due componenti si continuano per gli strati retinici e sono di dimensioni corrispondenti. La retina, che è in un grado di differenziamento alquanto avanzato (coni e bastoncelli) è caratteristica in tutta la sua superficie interna per l'abbondanza delle cellule ganglionari assai più numerose che nell'occhio normale dell'altro lato (cfr. per questo caso: la fig. 4).

Sono presenti due cristallini che ostacolano la regolazione della forma del calice, ciò che può indicare un'indipendenza fra questo processo e la regolazione della struttura nella retina doppia.

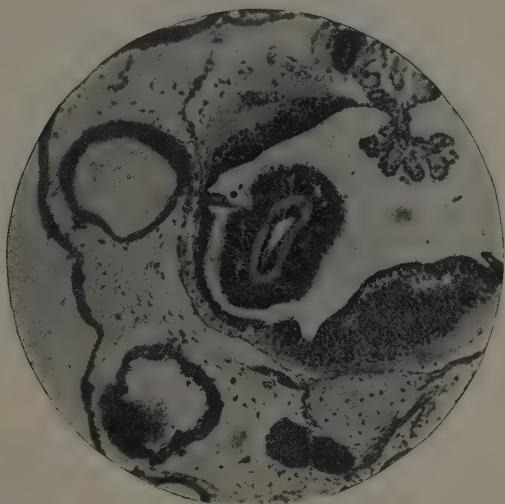


Fig. 3. — Il territorio nervoso e la retina, derivati dal trapianto in continuità, per il nervo, con il cervello dell'ospite.
(Da una sezione trasversale, ingr. $\times 80$ cca.).

I due cristallini sono eccentrici all'apertura pupillare essendo accosti uno al margine dorsale, l'altro a quello ventrale dei due componenti la retina, di cui il supplementare è quello ventrale, ed a questa metà della retina doppia, corrisponde appunto il cristallino più piccolo, derivato dall'ectoderma lentogeno trapiantato.

Il nervo ottico si porta ventralmente al cervello pur appartenendo alla retina supplementare trapiantata, ed emerge, dal calice doppio, avendo un volume più notevole di quello normale.

A questo modo di fusione delle retine, non seguita dalla completa regolazione del calice, si può ricondurre il caso, verificatosi in un altro esperimento di trapianto della vescicola ottica senza l'ectoderma che la ricopre, caudalmente a quella dell'ospite, appena lesa nel corrispondente diante.

L'occhio fuso è cefalicamente regolato negli strati retinici differenziati quasi normalmente; soltanto lo strato reticolare interno è discontinuo e quello delle cellule gangliari notevolmente ipertrofico.

Più caudalmente, nel calice, compare la zona di fusione delle due retine con alterazioni gravi nella distribuzione degli strati; il tapetum essendo invece continuo intorno ai due costituenti la retina doppia.

L'innervazione di questo calice anomalo si compie attraverso il nervo della retina normale, al quale si aggiungono fibre originate dalla retina sup-

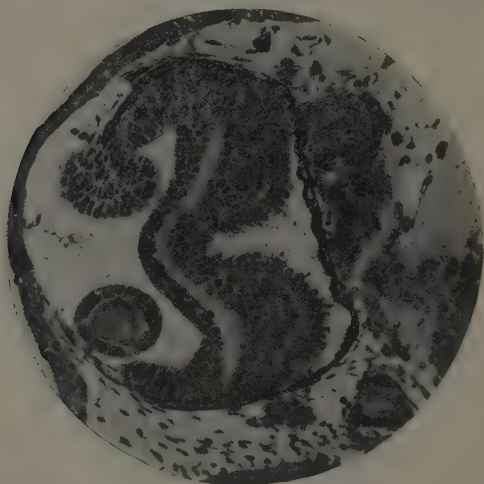


Fig. 4. - Doppio calice ottico, derivato da fusione di due vescicole. Il componente trapiantato corrisponde alla calotta ventrale della retina doppia. I due cristallini sono interessati dalla sezione a differenti livelli. (Da una sezione trasversale, ingr. $\times 150$ cca.)

plementare trapiantata, che nella regione più caudale, si fonde direttamente con il cervello, sì che i neuroblasti retinici si confondono con i neuroblasti della zona iperplastica nella parete cerebrale.

■
* *

Dai fatti così brevemente esposti risulta come: sia nella regione dell'otocisti, che in quella olfattoria o in quella oculare, l'abbozzo di un organo di senso (occhio e organo olfattorio) può differenziarsi indipendentemente dai territori circostanti manifestando una tendenza, che per l'abbozzo dell'occhio è più spiccata nella regione oculare, a fondersi con il sistema nervoso centrale, il quale va di pari passo visibilmente differenziandosi.

Il trapianto della vescicola ottica nel territorio oculare, seguito dalla fusione parziale delle retine dell'ospite e donatore è accompagnato dallo svi-

luppo del nervo dalla retina trapiantata che può portarsi indipendentemente all'encefalo o unirsi anche con le fibre derivanti dalla retina normale.

L'iperplasia derivante dalla penetrazione del nervo dell'organo supplementare nei vari territori dell'encefalo, si produce anche se questi territori provengono da tessuti dell'ospite compresi nel trapianto e l'iperplasia si verifica tanto sul cervello anteriore, che in quello medio o nel posteriore; in ogni caso sempre più notevole in presenza del corrispondente nervo di origine doppia.

Viene così dimostrata, più ampiamente che dai reperti degli autori precedenti e concordemente ai risultati di Ranzi (1928) nei Cefalopodi ⁽¹⁾, l'affinità o relazione che sussiste, nel loro differenziamento, fra organi di senso e centri nervosi in via di sviluppo, affinità che si palesa con una *reazione d'accrescimento (moltiplicazione cellulare)*, che si determina nelle zone corrispondenti agli organi trapiantati.

Fisiologia vegetale. — *Dimostrazione con la dimetilidroresorcina della formazione di aldeide formica in piante vive durante la fotosintesi clorofilliana.* Nota di G. POLLACCI e MARIA BERGAMASCHI, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

G. Klein e O. Werner nel loro interessante lavoro: *Formaldehyd als Zwischenprodukt bei der Kohlensäureassimilation* ⁽³⁾ si servirono della dimetilidroresorcina (Dimedon) già usato da Neuberg per la fissazione dell'acetaldeide nelle fermentazioni ed elaborarono un metodo per dimostrare la presenza dell'aldeide formica nella pianta, fissandola sotto forma cristallina. Il metodo permette di mettere in contatto il reattivo colla foglia in piena attività assimilatrice, di fissare l'aldeide formica, di isolarla e determinarla.

Il Dimedon dà infatti con l'aldeide formica un prodotto insolubile; trattando una soluzione concentrata (1 : 200) di Dimedon con tracce di formolo si ha dapprima un intorbidamento ed in seguito precipitazione di cristallini di forma caratteristica (aggetti lunghi, rettilinei) che facilmente si distinguono da quelli ottenuti con Dimedon e le altre aldeidi compresa l'aldeide acetica.

Noi abbiamo applicato tale metodo a ricerche sperimentali e per prender data, pubblichiamo in questa Nota preliminare i risultati ottenuti. Essendo il Dimedon un narcotico, le esperienze furono fatte su piante acquatiche

(1) S. RANZI, *Correlazioni tra organi di senso e centri nervosi in via di sviluppo*, « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 114, Heft. 2/3 (1928).

(2) Nella seduta del 15 dicembre 1929.

(3) « Biochemische Zeitschrift », 1926, vol. 168, pp. 361-386.

usando una concentrazione non sufficiente ad alterare per molto tempo il processo di assimilazione.

Sperimentammo infatti con una soluzione al 0.1 % (1 : 1000) colla quale l'assimilazione decorre normalmente per le prime due ore per poi gradatamente diminuire ed infine arrestarsi alla sesta-settima ora.

I germogli delle piante vennero per sei, sette ore ed anche più, esposte all'azione della luce artificiale di una lampada di 1000 candele e nei mesi di luglio ed agosto alla luce solare, nella soluzione nutritizia contenente oltre il Dimedon anche il 20 % di una soluzione satura di bicarbonato di calcio (che serve come fonte di CO_2). Il Dimedon penetrando nella pianta reagisce colla formaldeide che in essa si forma durante l'attività assimilatrice ed il composto che in tal modo si origina e che chiameremo *formaldimedon* si diffonde poi nel mezzo esterno alcalino in poche ore. Dalla soluzione venne estratto il formaldimedon acidificandola con acido cloridrico e trattandola con etere di petrolio. Questi a sua volta venne lavato con soluzione satura di cloruro di sodio, indi distillato a pressione ridotta in modo che il liquido non assumesse una temperatura superiore ai 40°.

Il residuo contenente formaldimedon ed anche talvolta acetaldimedon fu ripreso con carbonato potassico, neutralizzato con acido fosforico indi microdistillato a 200°.

Il prodotto della distillazione venne di nuovo fissato con una soluzione concentrata di Dimedon. La soluzione dapprima intorbida, poi in essa si formarono piccoli fiocchetti che osservati al microscopio appaiono formati dagli aghetti lunghi caratteristici del *formaldimedon*.

I risultati migliori vennero ottenuti dall'analisi delle soluzioni nutritizie in cui era rimasta l'*Elodea*.

La quantità di formaldimedon che si forma è piccola ma bisogna comprendere che essa rappresenta solo la minima parte di quella che si origina poichè il narcotico penetrando impedisce sempre più la assimilazione e soltanto dopo un certo tempo il Dimedon raggiunge nei cloroplasti la concentrazione atta a fissare il prodotto ed inoltre il Dimedon non può mai venir somministrato nella concentrazione ottima a fissare perfettamente.

I risultati delle esperienze meglio riuscite si possono riassumere nei seguenti:

Si ottenne formazione di cristallini di *formaldimedon* sperimentando su *Elodea canadensis*, esposta per dieci ore alla luce naturale, durante il mese di agosto, nella soluzione nutritizia, aggiungendo però dopo le prime due ore altre piantine fresche e facendo gorgogliare nella soluzione del biossido di carbonio.

Uguale buon risultato diede l'esposizione di piante alla luce artificiale per dieci ore, sempre coll'aggiunta di altre piante fresche e di CO_2 .

Esponendo le piante alla luce naturale per dieci ore senza aggiunta di materiale fresco si ebbe un rendimento minore.

Esponendo delle piante per sole due ore alla luce artificiale si formano cristalli ma in piccola quantità.

Le piante, dopo le esperienze, lavate e liberate del Dimedon dimostrano di riprendere l'assimilazione.

Piante senza clorofilla, tenute nelle identiche condizioni di esperienza delle precedenti, non danno con il Dimedon presenza di cristalli di formal-dimedon.

Piante verdi, ma tenute allo scuro non danno formazione di formal-dimedon.

Piante acquatiche fatte vegetare in liquido privo di carbonio non producono formal-dimedon.

L'ossigeno emesso dalla pianta durante la fotosintesi clorofilliana raccolto sotto vetro e messo in contatto con la dimetilidroresorcina non dà luogo a formazione di formal-dimedon. Dell'azione dell'ossigeno allo stato nascente sul dimedon tratteremo nella Memoria definitiva.

Concludendo: Nelle piante sotto l'azione della luce solare si origina aldeide formica sostanza stata scoperta nelle piante da uno di noi sino dal 1907 ⁽¹⁾.

Questa aldeide può venir fissata ed isolata usando dimetilidroresorcina.

Il reattivo agisce come narcotico sulle piante ma non le uccide; infatti le piante dopo le esperienze sono ancora in grado di assimilare.

Il rendimento in formaldeide aumenta coll'aumentare della durata di illuminazione ed aumenta pure coll'aggiunta, ad intervalli di tempo di materiale assimilante fresco, dimostrando in tal modo l'originé fotosintetica del prodotto. L'esperienza dimostra inoltre che l'ossigeno emesso dalla pianta raccolto sotto vetro non dà luogo a formazione di formal-dimedon.

Questi risultati dimostrano che la formazione del formal-dimedon è legata agli stessi coefficienti indispensabili perchè si possa avverare la fotosintesi clorofilliana; difatti esso non si forma se nel liquido non vi è contenuto carbonio, se la pianta non è esposta alla luce e se non vi è clorofilla.

Nella Memoria definitiva, in corso di compilazione, riporteremo dettagliatamente i risultati ottenuti, i metodi da noi seguiti e la numerosa bibliografia dell'importante argomento.

Ringraziamenti vivissimi porgiamo al chimico prof. Nestore Monti per gli aiuti preziosi fornitici.

(1) G. POLLACCI, *Intorno all'assimilazione clorofilliana delle piante*. « Atti Ist. Bot. », ser. 2^a, vol. VII, 1907.

Botanica. — *Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un radio-oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2-3$ M., sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante.* Nota di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Sara pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia fiorale. — *Apogamocarpia in « Cucurbita Pepo » e « C. moschata »* ⁽¹⁾. Nota di R. SAVELLI e N. SOSTER, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

Valore ed estensione dei fatti di intersessualità. — *Cucurbita* viene descritta come monoica: ciascun individuo possiede ambedue le potenze sessuali, e di regola le pone in atto producendo due sole e ben distinte sorta di fiori, che siamo abituati a considerare come *esclusivamente maschili ed esclusivamente femminili* ⁽³⁾.

Ma, geneticamente, quale è la differenza tra monoicismo e dioicismo? Un definito valore genetico può accordarsi soltanto alle separazioni di sesso legate a diversa origine e costituzione degli zigoti d'una stessa stirpe: così nelle piante dioiche, dove il sesso riguarda gli individui e risale a una differenza nel tipo di unione gamica donde essi nacquero; omozigotica per gli uni, eterozigotica per gli altri, secondo l'interpretazione più comune. Invece, tanto nelle specie monoiche quanto nelle ermafrodite, esiste un sol tipo di unione gamica, perciò *una sola sorta di individui* ⁽⁴⁾ tutti bisessuati. Che poi le due sorta di sporofilli in cui si estrinsecano i due sessi sieno riunite nello stesso fiore, cioè separate soltanto da un internodio (come nelle ermafrodite), o che siano topograficamente più distanziate, perchè collocate in germogli diversi (come nelle monoiche), questa è una differenza puramente somatica, ricca forse di significato fisiologico, ma senza importanza genetica. Perciò geneticamente una pianta monoica è altrettanto ermafrodita come una vera ermafrodita, che tale sia detta anche dal morfologo e dal sistematico.

La pianta monoica, come individuo, è già di per sè un intersessuato (*ginandromorfo*); e la intersessualità in senso stretto, cioè quella anomala che compaia nei suoi singoli fiori, rappresenta soltanto il *condensamento in*

(1) Lavoro eseguito nella R.^a Stazione di Bieticoltura di Rovigo.

(2) Nella seduta del 1° dicembre 1929.

(3) Nel fiore femminile, tuttavia, i « rudimenti di Naudin » possono considerarsi come reliquati di un primitivo ermafroditismo.

(4) Si prescinde, senza dimenticarli, dai casi speciali di eterostilia, ecc. ecc.

uno stesso germoglio delle due sessualità già normalmente coesistenti in atto nella pianta intera⁽¹⁾ e la cui norma di localizzazione è talvolta così malferma che persino un singolo filloma può divenire bisessuato.

E così, nella realtà, numerose stirpi di *Cucurbita* producono fiori foggianti col concorso di forze morfogene tanto maschili quanto femminili, sia che queste - agendo simultaneamente - appaiano come contrastanti, interferiscano, e in tutto o in parte si elidano a vicenda⁽²⁾, sia che - agendo separatamente in ordine di tempo e di territorio - trovino libera esplicazione l'uno accanto all'altra nello stesso fiore.

Perciò in *Cucurbita* i fiori normali maschili e femminili appaiono doppiamente riallacciati da due serie di forme intermedie convergenti da un lato verso l'ermafrodito e dall'altro verso il neutro. Se dal punto di vista biologico i vari stadi e momenti di questa transizione hanno appena un valore di carattere quantitativo, il valore che può accordarsi ad una gradazione di sessualità in rapporto con una certa dose corrispettiva della sessualità contraria, dal lato morfologico invece alcuni casi assumono una individualità bene spiccata e una localizzazione molto precisa nel quadro concettuale e terminologico della biologia florale tradizionale. Una delle manifestazioni più importanti e meglio definite è quella appunto della *apogamocarpia* che forma oggetto della presente Nota.

Definizione dell'apogamocarpia e sua interpretazione come fatto di intersessualità. - Il termine di *apogamocarpia* fu introdotto nella scienza dal Chiovenda (1918)⁽³⁾ per designare la formazione di un frutto da parte di un fiore munito bensì di ovario, ma affatto sprovvisto di ovuli: il frutto che ne proviene non può naturalmente essere altro che apireno.

Nella *apogamocarpia* sono dunque da sottolinearsi due fasi o momenti: in primo luogo lo sviluppo di un fiore a sessualità menomata, nel quale si differenziano bensì degli organi femminili, per esempio stimma ed ovario ove si concretano caratteri che, secondo il più comune modo di vedere, sono caratteri sessuali primari, ma in cui, venendo a mancare, con l'ovulo, la sporogenesi e la possibilità di fecondazione, sono soppressi i caratteri veramente conclusivi della femminilità. Ma il secondo e più caratteristico tratto dell'*apogamocarpia* consiste nel fatto che, nonostante questa così radicale impossibilità di fecondazione, (ed anche in assenza di altri particolari stimoli esterni) il fiore compie ugualmente alcune di quelle metamorfosi progressive che d'ordinario si mettono appunto in rapporto con una pregressa fecondazione, cioè con un intervento di natura maschile (azione del

(1) Vedasi in R. SAVELLI, *Cenantocarpia* (« Atti Soc. Nat. e Mat. Modena », ser. VI, vol. VIII, p. 50-59) la bibliografia dell'argomento, già ampiamente trattato da uno di noi.

(2) Perciò, biologicamente, questa intersessualità è diversa da quella delle piante dioiche anche se il risultato morfologico ne possa essere talvolta uguale.

(3) C. CHIOVENDA, *Di un interessante caso teratologico nella sessualità di una palma da datteri.* (« Nuovo Giornale Botanico Italiano ». Vol. XXV, fasc. 3^o).

polline) e con una conseguente influenza bisessuale (azione dell'embrione): in questa seconda fase l'apogamocarpia viene ad essere una manifestazione speciale di partenocarpia.

Il nesso fra queste due fasi dell'apogamocarpia viene molto naturalmente a delinearsi non appena si considerino sotto il punto di vista umorale, più volte sostenuto, e che le fa apparire come due aspetti o due conseguenze dell'intersessualità.

L'assenza degli ovuli e le altre menomazioni dei caratteri femminili risultano da un intervento inibitore della sessualità contraria, benchè sia difficile precisare per quali circostanze di momento e di localizzazione questo intervento ottenga proprio in tale grado e forma il suo effetto neutralizzante; ma appunto questa stessa interferenza di sostanze morfogene maschili e femminili agenti sullo stesso territorio, che paralizza parzialmente la morfogenesi di alcune caratteristiche spiccatamente sessuali, trova il suo sbocco nella attivazione di altre morfogenesi compatibili con la bisessualità: tale appunto lo sviluppo del frutto. Così l'apogamocarpia viene, già di per se stessa, interpretata come l'estrinsecazione morfologica di una specie di ermafroditismo chimico; ma questa interpretazione diventa qualcosa più di una semplice induzione e trova un solido appoggio nei fatti quando si ripensi che nella palma di Albano (costituente il caso di Chioventa) il fiore, che normalmente avrebbe dovuto essere unisessuale, oltre a produrre l'ovario apogamocarpico, produce anche gli stami, diviene cioè ermafrodito, e fornisce così il più conclusivo attestato della bisessualità delle forze morfogene che lo hanno foggiato, e quando si avverta subito che anche in *Cucurbita Pepo*, noi abbiamo trovato che l'apogamocarpia in molti casi è accompagnata da insorgenza di stami, e sempre da una mascolinizzazione di caratteri sessuali secondari. Per la nostra interpretazione riescono significativi questi fatti morfologici che costituiscono l'attestato, l'impronta esteriore, della mescolanza d'azione ormonica che va poi a scaturire nell'apogamocarpia, cioè in una espressione morfo-fisiologica che noi concepiamo come prodotto di fusione della duplice potenzialità sessuale.

L'apogamocarpia in Cucurbita Pepo. — Senza dubbio, le manifestazioni più cospicue e significative si ebbero, nel 1929, dalla stirpe 61, già così prodiga di tante altre manifestazioni di intersessualità, volta a volta illustrate, e fra le quali — per la somiglianza esteriore o per il legame sostanziale con quella che forma l'odierno soggetto — interessa soprattutto richiamare alla memoria l'*androcarpia* e l'*arrenoidia*. L'*androcarpia* — che letteralmente significa *fruttificazione d'un fiore maschile* — consiste nel fatto che l'asse d'un fiore esclusivamente staminifero subisce un rigonfiamento tale da simulare un ovario infero, corrispondente al rigonfiamento assile che si verifica intorno al vero ovario dei fiori femminili, e capace — inoltre — di subire, in fase successiva, un forte accrescimento simile a quello che nella regione corrispondente dei fiori femminili consegue alla fecondazione degli

ovuli. Naturalmente, qui, gli ovuli non esistono e la fecondazione non è possibile, sicchè l'androcarpia può anche raffigurarsi come una *partenocarpia maschile*. Dal punto di vista strettamente sessuologico tutto questo equivale alla sovrapposizione di un carattere sessuale secondario femminile su di un fiore la cui sessualità primaria è soltanto maschile: in altri termini è una *ermafrodilizzazione* dei caratteri sessuali secondari.

Tale essendo l'androcarpia, è innegabile che alcuni fiori apogamocarpici somiglino fino a confondersi nel loro aspetto esteriore con gli androcarpi, soprattutto per il peduncolo sottile, lungo e flessuoso, simile a quello dei fiori maschili, portante un ingrossamento che in fase preantesica è piccolo e ovoide: senonchè, alla fioritura, si ha la sorpresa di vedere che invece degli stami contengono uno stilo e uno stimma, talora ben conformati, più spesso ridotti in dimensioni e talora anche soltanto dimeri o monomeri: sezionando, si vede che dallo stilo entra nell'ingrossamento il tessuto conduttore. Ma il tessuto conduttore, se anche segue la disposizione, così caratteristica nelle zucche, a tre lamine radiali bipartentisi poi in lamine curve, non ha nessuna reale funzione da compiere perchè i suoi margini estremi non vanno agli ovuli, assolutamente mancanti. Per lo più, lo stesso tessuto conduttore è molto ridotto, talvolta a due lamine o ad una soltanto, poco approfondentesi nell'ingrossamento ovarico. Stilo, stimma e tessuto conduttore attestano della presenza dei carpelli, benchè questi sieno ridotti all'incapacità di produrre ovuli. Ora, se all'androcarpo, in quanto esso deriva essenzialmente da un ingrossamento del peduncolo, bene si attaglia — dal punto di vista esclusivamente morfologico — il nome, impostogli dal Chiovenda, di *macropodico*, questi fiori apogamocarpici sono, dallo stesso punto di vista morfologico, dei *macropodici femminili*, poichè formano anch'essi lo pseudofrutto per ingrossamento della parte assile che circonda i carpelli ridottissimi e non ovulati.

Se questi fiori apogamocarpici ci hanno per tal modo permesso di delineare i loro rapporti di affinità con gli androcarpi, essi ci avviano anche per graduali insensibili variazioni verso altri fiori ugualmente apogamocarpici, ma i cui caratteri secondari di mascolinità essendo molto meno spiccati — per il peduncolo meno lungo, un po' più grosso e non flessuoso, per l'ingrossamento molto più marcato e più sensibilmente accrescentesi in fase postantesica — fanno ricordare più da vicino, non già l'androcarpia, ma un altro gradino della scala di intersessualità: quello dato dalle così dette « *femminine di 2ª forma* », che pure apparvero nella stirpe 61, e che venivano a costituire un dimorfismo dei fiori femminili nascenti sulla stessa pianta: gli uni normali, o di prima forma, e gli altri *arrenoidici*, cioè d'aspetto mascolinizzato, o di 2ª forma. In realtà, se per *arrenodia* si deve intendere il portamento maschile di un organismo o di un organo femminile, i fiori apogamocarpici sono bene dei fiori arrenoidi, cioè femminili, carpelliferi, ma con qualche tratto di aspetto maschile. Inoltre anch'essi fanno insorgere un dimorfismo tra i fiori fem-

minili d'una stessa pianta: difatti non si trovano mai soli, ma sempre mescolati a fiori femminili normali. Tuttavia la grande differenza che esiste tra le femmine di 2ª forma, o arrenoidiche, descritte in precedenza, e queste che descriviamo oggi, consiste nel fatto che quelle sono riccamente ovulate, fecondabili, anche se il più delle volte incapaci di completa maturazione, e al loro sviluppo prendono larga parte i carpelli e il loro tessuto placentare; mentre queste che descriviamo oggi, pur essendo in certi casi identiche nell'aspetto esteriore, si rivelano all'indagine anatomica del tutto prive di ovuli e incapaci di sporogenesi. Nelle prime la mascolinizzazione dell'abbozzo ha modificato più che altro i caratteri sessuali secondari, spingendosi solo parzialmente e non sempre ad una sterilizzazione degli ovuli; nelle seconde la bisessualità delle forze morfogene agenti nell'abbozzo ha avuto un effetto neutralizzante assai più profondo, sopprimendo addirittura i macrosporangi, riducendo gli stessi carpelli, e lasciando principalmente ad un organo affatto neutro — l'asse — la responsabilità dello sviluppo (cioè, letteralmente, la capacità di rispondere a stimoli di sviluppo).

Ma un altro spostamento ancora, sulla scala dell'intersessualità fa passare dagli apogamocarpici simili a femmine di 2ª forma, ad un altro gruppo di apogamocarpici che se per l'aspetto esteriore, dato soprattutto dalla intensità dell'ingrossamento, si direbbero ancor più femminili, sono viceversa i più maschili di tutti, per quella frequente sconcordanza tra le varie espressioni della bisessualità che dipende dalla sensibilità, dalla recettività dell'abbozzo in sviluppo, il quale dà pronte e varie risposte alle diverse forze morfogenetiche così mutevoli nel tempo e nel territorio d'azione. Questi apogamocarpici dell'ultimo gruppo sono quelli staminiferi già ricordati nella parte generale di questo scritto per l'importanza del loro significato: oltre i carpelli non ovulati hanno, alterni con quelli, tre stami, che sono liberi, non riuniti in colonna, perchè appunto la parte centrale del fiore è occupata dallo stilo: sono morfologicamente ermafroditi, ma funzionalmente maschili. L'individuo 61 — 13 B — P₁, oltre alle femmine normali non seppe produrre altro tipo di apogamocarpici all'infuori di questi, e su questa pianta essi presentarono manifestissimo un fatto di cui già in precedenza avevano avuto la sensazione o il sospetto, e che in parte vale anche per gli androcarpi: cioè che *già in fase preantesica l'ingrossamento è enormemente più voluminoso di quello spettante al fiore femminile normale al momento della fecondazione*: per compenso l'accrescimento postantesico è relativamente poco cospicuo. Trattasi dunque d'una specie di *fruttificazione preantesica*, che conferma il concetto della bisessualità dell'afflusso ormonico che costituisce una specie di « fecondazione chimica », una *vis a tergo* morfogenetica che probabilmente avviene per la via del peduncolo, per la via dei fasci, e non è necessariamente connessa con la sporogenesi, dato che — come in altro lavoro fu dimostrato — si può verificare persino in un fiore neutro, privo di sporofilli (*cenantocarpia* di Savelli). Qui cade acconcio ricordare come il Chio-

venda, ricollegandosi alle opinioni del Beccari, ed alla teoria che considera il frutto come una specie di galla, omologandolo ad un prodotto di reazione a stimolo parassitario, invochi l'azione di parassiti interni, di simbionti, nella sua palma di Albano, per spiegarne la apogamocarpia. Ma i carpelli che si sviluppano in frutto sono insorti in un fiore staminifero, facendolo divenire ermafrodito; e per noi questo stesso fatto dell'insorto ermafroditismo, questo fatto, per cui in una zona dove abitualmente si esplica un dato differenziamento, si aggiunge un altro differenziamento di diversa natura e collegato ad un metabolismo suo proprio, questa iperplasia che modifica le condizioni generali del ricambio dell'abbozzo, rientra nel quadro dell'auto-parassitismo, la cui giustificazione ontogenetica sarà da accennarsi in futuro, ma le cui conseguenze fisiologiche possono già fin d'ora prospettarsi come capaci di produrre effetti consimili a quelli del parassitismo comunemente inteso, e capaci di trasmettere una eccitazione trofica a quei tessuti — a seconda dei casi, del carpello o dell'asse — che sono già normalmente adatti e preparati a rispondere a un tale stimolo.

Al riguardo giova notare che i fiori apogamocarpici di *Cucurbita Pepo* assumono una significazione assai chiara, poichè in essi — e soltanto in essi — si ha uno sviluppo partenocarpico: *le femmine normali della stessa pianta non sono affatto suscettibili di sviluppo postantesico e verginale*. E dunque questa particolare forma di partenocarpia in un fiore senza ovuli, è — in questo caso — *ben visibilmente collegata a quel tanto di mascolinizzazione* che si esplica in segni morfologici esteriori in questi fiori arrenoidici o addirittura staminiferi, e manca del tutto nelle femmine non mascolinizzate: è ben dunque la mistione ormonica bisessuale che la genera, il che conferma le nostre suesposte vedute generali.

Anche in un meticcio *Cucurbitella* \times *Ovifera* (stirpe 38 b \times 20) l'apogamocarpia apparve legata alla arrenoidia.

L'apogamocarpia in Cucurbita moschata, e le diversità del suo valore morfologico. — Le cose appaiono diversamente in *C. moschata*, dove l'apogamocarpia comparve in quelle stesse stirpi che sono dotate — anche nei fiori normali, ovulati e capaci di fecondazione — di una partenocarpia potenziale che si rivela in mancanza dell'atto sessuale (*criptopartenocarpia* di Savelli). Questa partenocarpia dà luogo a frutti che — seguendo in parte il Negri — potremmo chiamare *aginocarpici*, perchè l'incremento postantesico è limitato all'asse e i carpelli non vi prendono parte sensibile. I fiori apogamocarpici comparvero nelle stirpi 110, 120, 84 e nella F del meticcio 84 \times MC; questi fiori non mostrano visibili modificazioni nei caratteri sessuali secondari, e differiscono dai partenocarpi comuni perchè in essi, mancando gli ovuli, la partenocarpia è obbligata, mentre in quelli è facoltativa. A parte le differenze morfologiche, poichè nella Palma da datteri lo sviluppo riguarda il carpello, non l'asse, anche per essa vale la stessa considerazione poichè anche in essa — a quanto si sa — il carpello normalmente ovulato è suscet-

tibile di fruttificazione verginale. Ma il caso di *Cucurbita Pepo*, così chiaramente significativo per il legame della partenocarpia con la mascolinizzazione, è per noi, non già un'eccezione, ma un indice che per segni esterni fa da rivelatore di quella che può essere la ragione interna e celata di molti altri casi: fu il Buscalioni, primamente, a prospettare l'idea che la partenocarpia in generale venisse da un afflusso di ormoni maschili in un abbozzo femminile: fra l'alternativa di considerare la partenocarpia come un fatto di intersessualità e le altre che potrebbero prospettarsi — non esclusa quella della iperfemminilizzazione — i fatti di oggi, se pur non hanno un valore risolutivo, costituiscono peraltro un argomento non trascurabile in favore dell'intersessualità.

A tal proposito, e per chiudere, vogliamo aggiungere che l'apogamocarpia, quale fu da noi sopra definita, non è stata segnalata per la prima volta con la illustrazione della Palma di Albano: in fiori ermafroditi, quali son quelli della « pera butirra », il Longo (1916) aveva già riscontrato una partenocarpia derivante da fiori « in cui si osserva costante presenza di logge carpellari, ma vuote: in esse cioè non erano affatto sviluppati gli ovuli », e rivendica al Decaisne (1863) la priorità delle osservazioni nella « Poire sans pépins » ove si verifica « l'avortement plus ou moins complet des ovaires », e nella « Comte de Flandre » che è colpita « du manque absolu d'ovules ». Dunque, neanche nel 1918, quello della Palma di Albano era un caso unico, come credeva Chiovenda. Invero, noi siamo d'accordo con lo Schimper, che il concetto molto diffuso, di considerare come frutto il solo gineceo trasformato, genera soltanto confusione, e crediamo coll' Eichler che vada inteso per frutto il complesso delle parti del fiore che persistono dopo la fecondazione. Per fruttificazione intendiamo il complesso delle trasformazioni che subiscono queste parti. Da questo nostro punto di vista i casi morfologici dell'apogamocarpia sono tre: 1°) la trasformazione progressiva è limitata quasi soltanto ai carpelli (Palma di Albano); 2°) riguarda insieme i carpelli e l'asse (pere « butirra » e « Comte de Flandre », e parte dei casi di *Cucurbita Pepo*); 3°) riguarda quasi soltanto l'asse (*Cucurbita moschata*, *C. Pepo* in parte, e, forse, « Poire sans pépins »).

N. P.

ERRATA-CORRIGE

Nella Nota: **Astrofisica.** — *Altezza della cromosfera del 1928 ed andamento del presente ciclo solare*, del Corrisp. G. ABETTI, stampata in questi « Rendiconti », (vol. X, fascicoli 1-2, p. 7), la fig. 2 a p. 9, per errore di impaginazione del cliché è arrovesciata. La sua posizione corretta è quindi come segue:

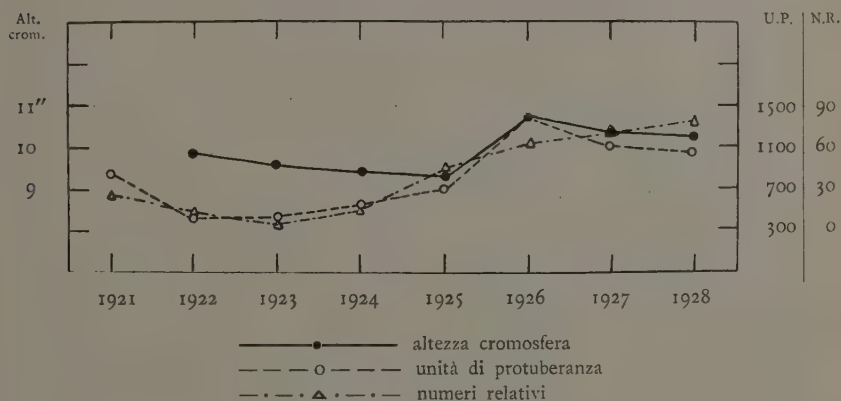


Fig. 2.

INDICE DEL VOLUME X, SERIE VI. — RENDICONTI

1929

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — « Altezza della cromosfera nel 1928 ed andamento del presente ciclo solare ». 7.
- Id. e NOVÁKOVÁ B. — « Struttura della riga $H\alpha$ e periodo di rotazione della cromosfera solare ». 227.
- Id., anche a nome dei Consoci DE FILIPPI e ALESSIO, presenta due pubblicazioni e ne parla. 611.
- ALESSIO A. — Vedi ABETTI G.
- ANGELI A. e JOLLES Z. — « Sopra la riduzione dei diazoidrati normali ». 141.
- Id. e Id. — « Sopra alcuni processi di ossidazione determinati dai diazoidrati normali ». 320.
- ANELLI M. — « Su alcuni fenomeni di ricoprimento nell' Appennino Emiliano ». 202.
- ARMELINI G. — « Misure di stelle doppie ». 3.
- ASCOLI G. — « Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante combinazioni lineari di funzioni date ». 539.
- AURINO S. — « Sul sistema fotometrico di Napoli ». 354.

B

- BEDARIDA A. M. — « Sopra la Teoria degli ideali di un corpo algebrico finito ». (Note I, II e III). 26, 154, 398.

- BELLUIGI A. — « Caratteristiche fisiche fondamentali della pianura padana ». 58.
- BELLUZZI O. — « Sul comportamento degli archi elastici molto ribassati ». 52.
- BERGAMASCHI M. — Vedi POLLACCI G.
- BERNARDINI G. — Vedi ROSSI B.
- BIANCHI A. — « Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti ». 105.
- BOAGA G. — « A proposito di semplici e rapidi procedimenti topografici ». 575.
- BORTOLOTTI E. — « Sulle coordinate geodetiche lungo una linea ». 414, 486, 544.
- BRACALONI L. — Vedi CASSINIS U.
- BRUNELLI G. — « Lo scheletro dei Teleostei studiato mediante la radiografia in relazione alla meccanica del movimento ». 380.
- BRUNETTI R. — « Le variazioni del policroismo cristallino sotto l'azione del campo magnetico ». 585.
- BURGATTI P. — « Sulle trasformazioni di Lorentz ». 463.

C

- CACCIOPPOLI R. — « Sull'integrazione indefinita ». 21.
- CAGLIOTI V. e MALOSI L. — « I solfati doppi del bismuto coi metalli alcalini. II. Solfati doppi di bismuto e d'ammonio ». 97.
- CALAPSO R. — « Un problema sul sistema

- nullo osculatore ad una congruenza W ». 493.
- CANNATA C. — « L'ipotesi balistica e la verifica della legge delle aree nelle orbite delle "doppie" telescopiche ». 173, 358.
- CANTONI O. — « Ricerche sulla pretesa esistenza della lipodieresi polmonare ». 446.
- CASSINIS U. e BRACALONI L. — « Alcoleemia normale ed alimentare negli esercizi fisici ». 382.
- CASTELNUOVO G. — Presenta in omaggio un volume di I. J. JZQUIERDO: « Curso de Fisiologia de Laboratorio ». 613.
- CAVINATO A. — « Nuove ricerche sull'Eucalasio - Eucalasio di Valle Aurina ». 527, 656.
- CHARRIER G. — « Sistemi eteronucleari policondensati ». 101.
- ID. — « Condensazione dell'acido 1-amino-2-fenilazo-4-naftalinsolfonico ». 189.
- CISOTTI U. — « Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi ». 469.
- COLOMBO B. — « Sul problema di Bianchi riguardante le famiglie di Lamé ». 157.
- COLONNETTI G. — « Sulle alterazioni del regime elastico di un arco incastrato che si possono determinare con l'aggiunta di una catena ». 330.
- CORBINO O. M. — « Sul funzionamento del triodo con forte accoppiamento magnetico a nucleo di ferro fra circuiti di placca e circuito di griglia ». 313.
- COTRONEI G. e SPIRITO A. — « Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli ». 212.
- CURZI M. — « Su una "pseudocarie" delle cariossidi di frumento ». 224.
- ID. — « Una nuova grave malattia del granoturco ». 306.
- DAL PIAZ G. B. — « Nuove osservazioni geologiche sulla regione compresa fra il torrente Aurino e il fiume Rienza (Alto Adige) ». 518.
- DA RIOS L. S. — « Eliche ed anelli di risucchio ». 642.
- DE CARLI F. — « Isoterme di viscosità di miscele binarie. - III. Sistema: nitrobenzolo-cloruro stannico ». 186.
- ID. — « Isoterme di viscosità di miscele binarie. - IV. Sistema: aldeide benzoica-monocloruro di zolfo ». 250.
- ID. — « Isoterme di viscosità di miscele binarie. - V. Sistema: nitrobenzolo-bromuro di stagno ». 372.
- DE FAZI R. e MONFORTE F. — « Una nuova reazione delle aldeidi ». 653.
- ID. e PIRRONI F. — « Studi intorno agli indoni. - Nuove reazioni dell' α -etil- β -fenil-indone e dell' α -metil- β -fenil-indone ». 655.
- DE FILIPPI F. — Vedi ABETTI G.
- DE FINETTI B. — « Sulle funzioni a incremento aleatorio ». 163.
- ID. — « Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori ». 325.
- ID. — « Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio ». 548.
- DELLA MONICA A. — Vedi PASQUINI P.
- DEL REGNO W. — « Sul potere emissivo totale del bismuto ». 77.
- DE MIRA-FERNANDES A. — « Sistemi odografi ». 640.
- DORÉ P. — « Sulla influenza della elasticità del supporto sulla durata di oscillazione di due pendoli simultaneamente oscillanti su di esso ». 62.

E

- EGOROFF D. TH. — « Sur les congruences W à focales réglées ». 145.

F

- DAL PIAZ G. B. — « Appunti geologici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige) ». 270, 376.
- FANO G. (Presidente). — Annunzia il ringraziamento per la loro nomina, dei Soci Nazionali, Corrispondenti e Stranieri. 450.

D

- FANO G. (Presidente). — Informa della dolorosa perdita di Soci, avvenuta durante le ferie accademiche. 450.
- ID. — Ringrazia il Socio VOLTERRA per la sua interessante relazione. 452.
- FAZZARI L. — « Le arterie del cervelletto ». 450.
- ID. — Vedi PARRAVANO N.
- FEDELE R. — « Di un confronto fra le variazioni col campo magnetico del coefficiente di Hall, del potere termoelettrico e della resistenza nel bismuto ordinario e nel bismuto compresso ». 83.
- FERMI E. — « Sulla teoria quantistica delle frange d'interferenza ». 72.
- ID. — « Sul complesso $4d$ della molecola di Elio ». 429, 515.
- FERRARI A. e COLLA C. — « Sulla struttura cristallina dei carbonati neutri di cobalto e di nichelio ». 594.
- ID. e GIORGI F. — « La struttura cristallina degli ioduri anidri dei metalli bivalenti. I. Ioduri di cobalto, di ferro e manganese ». 522.
- ID. e INGANNI F. — « Sull'importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide. — VI. Analisi termica e röntgenografica dei sistemi CaCl_2 — CoCl_2 , CaCl_2 — FeCl_2 , CaCl_2 — MnCl_2 e CaCl_2 — CdCl_2 anidri ». 253.
- FINZI G. — « L'anaesotubercolina nella diagnosi della tubercolosi in patologia comparata ». 132.
- FINZI B. — « Osservazione sul moto stazionario di liquidi viscosi ». 334.
- FOÀ C. e PERONI A. — « Primi tentativi di registrazione delle correnti d'azione del nervo acustico ». 389.
- FRANCHI S. — Presenta in omaggio due suoi lavori e ne parla. 610.
- ID. — « Sul confine italo-francese tra il Colle del Piccolo S. Bernardo e il Colle della Seigne a sud del Monte Bianco ». 539, 617.
- G**
- GABRIELI G. — « Due codici iconografici di piante miniate, nella Biblioteca Reale

- di Windsor. A proposito di Cimeli Lincei ». 531.
- GALAMINI A. — « Inanizione parziale di ratti albin con olio di oliva somministrato con o senza aggiunta di vitamine ». 129.
- GATTI D. — Vedi MASCARELLI L.
- GELFOND A. — « Sur un théorème de M. G. Polya ». 569.
- GORINI C. — « I fermenti acidoproteolitici in conceria ». 309.
- GUARESCHI C. — « L'otocisti degli Anfibi anuri considerata come sistema a mosaico. Dimostrazione sperimentale ». 120.
- GUGINO E. — « Sulle equazioni intrinseche del moto dei sistemi materiali a legami indipendenti dal tempo ». 45.
- ID. — « Sulla validità ed estensione del teorema del massimo effetto ». 405.
- GUIDI C. — Presenta in omaggio il suo opuscolo: « Prove di usura su funi di funivie ». 613.

I

- ILVENTO A. — Vedi MARCHIAFAVA E.
- INGANNI A. — Vedi FERRARI A.
- IZQUIERDO I. J. — Vedi CASTELNUOVO G.
- JOLLES Z. — Vedi ANGELI A.

K

- KOURENSKY M. — « Sur la méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre avec une seule fonction inconnue et deux variables indépendantes ». 148.
- KUSNETZOFF W. — « Sulla regolarizzazione del problema generale dei tre corpi ». 413.

L

- LABOCCETTA L. — « Metodo generale per la costruzione delle "funzioni separate" di Fourier e delle "funzioni caratteristiche" di De La Vallée Poussin ». 574, 628.

- LABOCCETTA L. — «Sulla interpolazione segmentale e la classificazione delle funzioni poligonali». 574.
- LAMBERTI F. — «Sui moti elementari componenti del moto relativo baricentrico di un sistema materiale». 336.
- LECAT M. — «Relations entre le comportement distillatoire d'un système binaire et l'allure des courbes température-tension de vapeur des composants». 649.
- LELLI M. — «Un nuovo risultato sperimentale sulla contrazione delle vene liquide». 38.
- ID. — «Sul teorema del minimo calore di W. Thomson». 368.
- LEVI-CIVITA T. — Presenta in omaggio due Memorie del Socio R. MARCOLONGO e ne parla. 612.
- LEVI G. — Vedi PARRAVANO N.
- LONGO B. e PADERI C. — «Sul significato biologico degli alcaloidi nelle piante». 322.

M

- MADDALENA L. — «Sulla utilizzazione di un interessante livello idrico sovrastante la parte nordorientale dell'Altipiano dei Sette Comuni». 527.
- MALOSI L. — Vedi CAGLIOTI V.
- MARCHIAFAVA E. — Presenta in omaggio e illustra un volume di A. ILVENTO: «Eredità e Igiene». 613.
- ID. — Presenta in omaggio il suo opuscolo: «Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua» e ne parla. 450.
- MARCOLONGO R. — Vedi LEVI-CIVITA T.
- MARGARIA R. — «Il potere regolatore della reazione dell'acqua di mare». 123.
- MARTINEZ Giulia. — «Il basalto di "Cucchiara Zeppara" presso Guspini (Sardegna)». 665.
- MASCARELLI L. e GATTI D. — «Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati». 441.
- MAZZONE-SANGIORGI G. — «I primi elementi d'una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi». 633.
- MELDOLESI G. — Vedi PASQUINI P.
- MERCOGLIANO D. — «I complessi quadratici contenenti la congruenza degli assi di una cubica gobba e le condizioni affinché due cubiche binarie abbiano due radici comuni». 231.
- MERULA M. — «R Scuti». 244.
- ID. — «Studio sulla variabile "SX Herulis"». 349.
- ID. — «Sulla variabilità di "Y Canes Venatici"». 429.
- MEZZADROLI G. e VARETON E. — «Azione dei raggi di Wood sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante». 281.
- ID. e ID. — «Prove di confronto fra l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) e dal circuito oscillante Lakhovsky, sulla germinazione di semi e sull'accrescimento delle piante». 289.
- ID. e ID. — «Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un radio-oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2-3$ m., sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante». 690.
- MOISIL GR. C. — «Sur les repères mobiles dans l'espace fonctionnel». 413, 497.
- MONFORTE F. — Vedi DE FAZI R.
- MORELLI M. — «Spettrochimica delle soluzioni di acido borico in glicerina». 599.

N

- NALLI P. — «Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate». 502, 565.
- NOBILE V. — «Sui triedri intermediari di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta». 617.
- NOVÁKOVÁ B. — Vedi ABETTI G.

O

- OBERTO S. — «A proposito di un supposto effetto dei raggi X nei raddrizzatori a cristallo». 89.
- ONICESCU O. — «Sopra il comportamento assintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere». 501.
- ONORATO E. — Vedi PARRAVANO N.

P

- PACE E. — « Derivati organo-aromatici del boro ». 193.
- PADERI C. — Vedi LONGO B.
- PALOMBI A. — « Il ciclo biologico di "Diphterostomum brusinae" Stossich » (Trematode digenetic: fam. « Zoogonidae Odhner »). 274.
- PARRAVANO N. (Segretario). — Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalandone alcune. 450.
- ID. — Presenta a nome del Socio G. LEVI la memoria di L. FAZZARI: « Le arterie del cervelletto ». 452.
- ID. — Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando l'opuscolo del Socio SILVESTRI: « Due nuove specie di Iapygidae (Thisanura) di Costa Rica ». 613.
- ID. e ONORATO E. — « L'Allumina Blanc ». 475.
- PASQUINI P. — « Relazioni nervose dell'occhio e organo olfattorio trapiantati come abbozzi primari in embrioni di Axolotl ». 603, 680.
- ID. e DELLA MONICA A. — « Rigenerazione del cristallino nelle larve di Anfibi Anuri ». 218.
- ID. e MELDOLESI G. — « Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi. — I. Radiosuscettibilità differenziale dei vari stadi embrionali (Anuri) ». 298.
- PASSERINI N. — « Sopra le temperature minime a differenti piccole altezze sul suolo ». 582.
- PASTORI M. — « Sulla derivazione parziale dei tensori ». 10.
- PERONI A. — Vedi FOÀ C.
- PERSICO E. e SCANDONE F. — « L'effetto Hall con elettrodi estesi ». 238, 361.
- PERUCCA E. — « Sulla sensibilità degli elettrometri ». 92.
- PICCARDI G. — « Sulla ricerca spettrografica del bisinuto nelle ceneri degli organismi animali ». 258.
- PICONE M. — « Sull'intervallo d'indetermi-

nazione del procedimento di sommazione di Poisson per la serie di Fourier e di Laplace ». 560.

- PICONE M. — « Particolare formola di miglioramento per le soluzioni di una classica equazione alle derivate parziali del quart'ordine della Fisica-matematica ». 16.
- PIRRONE F. — Vedi DE FAZI R.
- POLLACCI G. e BERGAMASCHI Maria. — « Dimostrazione con la dimetilidrosorcina della formazione di aldeide formica in piante vive durante la fotosintesi clorofilliana ». 687.
- POPOVICI C. — « Sur les équations intégrées fonctionnelles ». 413.
- PRATESI P. — Vedi SCAGLIARINI G.
- PUPILLI G. — « Respirazione periodica provocata dalla simpaticotomia ». 671.

R

- RAIMONDI E. — « Un nuovo fenomeno di aerodinamica ». 169.
- ID. — « Effetto dinamico di una corrente traslatoria che investe un cilindro sottile in vicinanza di una parete piana indefinita ». 344.
- ID. — « Effetto dinamico di una corrente traslaticircolatoria che investe un cilindro sottile, in vicinanza di una parete piana indefinita ». 420.
- ID. — « Sulla curvatura geodetica di una superficie e sulla formula di Liouville ». 575, 622.
- RANZI S. — « Ricerche di embriologia sperimentale nei Ciclostomi. — I. Le malformazioni osservate e il tempo nel quale possono essere determinate ». 111.
- ID. — « Ricerche di embriologia sperimentale nei Ciclostomi. — II. Gastrulazione e regione cordale ». 676.
- REVERBERI G. — « Risultati di esperimenti sullo sviluppo dell'occhio nell'embrione di pollo ». 115.
- ROSSI B. e BERNARDINI G. — « Sull'azione fotografica degli elettroni lenti ». 182

S

- SANI G. — «Intorno all'attività riduttrice delle radici delle graminacee; la riduzione del nitrato di calcio per le radici delle graminacee». 197.
- SANSONE G. — «Superficie applicabili sopra superficie a curvatura media costante. Nuova dimostrazione del teorema del "Ricci"». 553.
- SAVELLI R. e SOSTER N. — «Variazioni brusche nella forma fogliare di "Cannabis sativa L."». 205.
- ID. e ID. — «Apogamocarpia in "Cucurbita Pepo" e "C. Moscata"». 603, 690.
- ID. e ID. — «Provocazione della monofilia in "Cannabis sativa L.", mediante traumi». 531, 604.
- SCAGLIARINI G. e PRATESI P. — «Sulla reazione cromatica fra nitroprussiato sodico e creatinina». 261.
- ID. e TARTARINI G. — «Composti di addizione tra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche». 267.
- SCANDONE F. — «L'effetto Hall con elettrodi estesi». 437.
- ID. — Vedi PERSICO E.
- SEGRE B. — «Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri». 31.
- ID. — «Esistenza di sistemi continui distinti di curve piane algebriche con dati numeri plueckeriani». 557.
- SEGRÈ E. — «Sulla dispersione anomala negli spettri di bande». 590.
- SEVERI F. — Presenta all'Accademia il volume primo, parte prima dell'«Enciclopedia delle matematiche elementari». 612.
- SILVESTRI F. — Vedi PARRAVANO N.
- SIRACUSANO N. — «Nuovi fenomeni osservati nella scarica anulare». 649.
- SOSTER N. — Vedi SAVELLI R.
- SPIRITO A. — «Processi di rigenerazione e di regolazione nella regione encefalica degli embrioni di Urodeli». 215.
- ID. — Vedi COTRONEI G.

- SUPINO G. — «Un criterio di scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali». 502.
- ID. — «Alcune proprietà integrali della dilatazione cubica». 414.

T

- TARTARINI G. — Vedi SCAGLIARINI G.
- TENANI M. — «Considerazioni teorico-sperimentali sul regime delle maree del Mare Adriatico». 69, 178.
- TIRELLI M. — «Sbocco di tubi malpighiani nel mesointestino». 278.
- TODROS I. — «Ricerche proiettivo-differenziali sulle coppie di linee piane o di superficie». 401.
- TONOLO A. — «Sull'integrazione delle equazioni elettromagnetiche di Maxwell-Hertz». 646.
- TORTORICI P. — «Sul principio della media aritmetica». 393.
- ID. — «Nuova determinazione della deviazione locale in latitudine e in longitudine all'Osservatorio Astronomico di Palermo». 432.

V

- VARETON E. — Vedi MEZZADROLI G.
- VERCELLI F. — «Il regime delle correnti nello stretto di Bab-el-Mandeb, in epoca estiva». 481.
- VIOLA G. — «Il sistema di U Cephei». 508.
- VOLTERRA V. — Presenta due grossi volumi dei «Proceedings of the International Congress» di Toronto del 1924, e ne parla. 450.

W

- WATAGHIN G. — «Sopra un'applicazione della relatività alla meccanica quantistica». 423.

Z

- ZAGAMI V. — «Fosfogeno muscolare nei pesci». 599.

INDICE PER MATERIE

A

- Aerodinamica.** — « Un nuovo fenomeno di aerodinamica ». RAIMONDI E. 169.
- Anatomia.** — « Le arterie del cervello ». FAZZARI L. 450.
- Anatomia comparata.** — « Sbocco di tubi malpighiani nel mesointestino ». TIRELLI M. 278.
- Astrofisica.** — « Altezza della cromosfera nel 1928 ed andamento del presente ciclo solare ». ABETTI G. 7.
- « Struttura della riga H α e periodo di rotazione della cromosfera solare ». ID. e NOVÁKOVÁ B. 227.
- Astronomia.** — « Sul sistema fotometrico di Napoli ». AURINO S. 354.
- « R Scuti ». MEROLA M. 244.
- « Studio sulla variabile "SX Herculis" ». ID. 349.
- « Sulla variabilità di "Y Canes Venatici" ». ID. 429.
- « Misure di stelle doppie ». ARMELINI G. 3.
- « Sui triedri intermediari di riferimento per la dinamica stellare. Criteri di scelta ». NOBILE V. 617.
- « Il sistema di "U Cephei" ». VIOLA G. 508.

B

- Batterologia industriale.** — « I fermenti acidoproteolitici in conceria ». GORINI C. 309.
- Biologia.** — « Sul significato biologico degli alcaloidi nelle piante ». LONGO B. e PADERI C. 322.
- « Azione dei raggi di Wood sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento

delle piante ». MEZZADROLI G. e VARETON E. 281.

- Biologia.** — « Prove di confronto fra l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) e dal circuito oscillante Lakhovsky, sulla germinazione di semi e sull'accrescimento delle piante ». ID. e ID. 289.
- « Il ciclo biologico di "Diptherostomum brusinae Stossich" (Trematode digenetic: fam. "Zoogonidae Odhner") ». PALOMBI A. 274.
- « Relazioni nervose dell'occhio e organo olfattorio trapiantati come abbozzi primari in embrioni di Axolotl ». PASQUINI P. 603, 680.
- Biologia sperimentale.** — « Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli ». COTRONEI G. e SPIRITO A. 212.
- « Processi di rigenerazione e di regolazione nella regione encefalica degli embrioni di Urodeli ». SPIRITO A. 215.
- Botanica.** — « Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un radio-oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2/3$ M., sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante ». MEZZADROLI G. e VARETON E. 690.
- « Apogamocarpia in "Cucurbita Pepo" e "C. Moscata" ». SAVELLI R. e SOSTER N. 603, 690.

C

- Calcolo delle probabilità.** — « Sulle funzioni a incremento aleatorio ». DE FINETTI B. 163.
- « Sulla possibilità di valori eccezionali per

una legge di incrementi aleatori ». ID. 325.

Calcolo delle probabilità. — « Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio ». ID. 548.

Chimica. — « Sopra la riduzione dei diazoidrati normali ». ANGELI A. e JOLLES Z. 141.

— « Sopra alcuni processi di ossidazione determinati dai diazoidrati normali ». ID. e ID. 320.

— « I solfati doppi del bismuto coi metalli alcalini. — II. Solfati doppi di bismuto e d'ammonio ». CAGLIOTI V. e MALLOSSI L. 97.

— « Sistemi eteronucleari policondensati ». CHARRIER G. 101.

— « Condensazione dell'acido 1-amino-2-fenilazo-4-naftalinsolfonico ». ID. 189.

— « Isoterme di viscosità di miscele binarie. — III. Sistema nitrobenzolo-cloruro stannico ». DE CARLI F. 186.

— « Isoterme di viscosità di miscele binarie. — IV. Sistema: aldeide benzoica-monocloruro di zolfo ». ID. 250.

— « Isoterme di viscosità di miscele binarie. — V. Sistema: nitrobenzolo-bromburo di stagno ». ID. 372.

— « Una nuova reazione delle aldeidi ». DE FAZI R. e MONFORTE F. 653.

— « Studi intorno agli indoni. — Nuove reazioni dell' α -etil- β -fenil-indone e dell' α -metil- β -fenil-indone ». ID. e PIRRONE F. 655.

— « Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati ». MASCARELLI L. e GATTI D. 441.

— « Spettrochimica delle soluzioni di acido borico in glicerina ». MORELLI M. 599.

— « L'Allumina Blanc ». PARRAVANO N. e ONORATO E. 475.

— « Derivati organo-aromatici del boro ». PACE E. 193.

— « Sulla reazione cromatica fra nitroprussiato sodico e creatinina ». SCAGLIARINI G. e PRATESI P. 261.

— « Composti di addizione tra alogenuri di metalli bivalenti e basi organiche ». ID. e TARTARINI G. 267.

Chimica analitica. — « Sulla ricerca spettrografica del bismuto nelle ceneri degli organismi animali ». PICCARDI G. 258.

Chimica biologica. — « Foslogeno muscolare nei pesci ». ZAGAMI V. 599.

Chimica-fisica. — « Sull'importanza della forma cristallina nella formazione di soluzioni solide. — VI. Analisi termica e röntgenografica dei sistemi $\text{CaCl}_2\text{—CoCl}_2$, $\text{CaCl}_2\text{—FeCl}_2$, $\text{CaCl}_2\text{—MnCl}_2$ e $\text{CaCl}_2\text{—CdCl}_2$ anidri ». FERRARI A. e INGANNI F. 253.

— « Relations entre le comportement distillatoire d'un système binaire et l'allure des courbes température-tension de vapeur des composants ». LECAT. M. 649.

Chimica fisiologica vegetale. — « Intorno all'attività riduttrice delle radici delle graminacee; la riduzione del nitrato di calcio per le radici delle graminacee ». SANI G. 197.

Chimica minerale. — « Sulla struttura cristallina dei carbonati neutri di cobalto e di nichelio ». FERRARI A. e COLLA C. 594.

Cristallografia. — « La struttura cristallina degli ioduri anidri dei metalli bivalenti. — I. Ioduri di cobalto, di ferro e di manganese ». ID. e GIORGI. F. 522.

E

Elasticità. — « Alcune proprietà integrali della dilatazione cubica ». SUPINO G. 414.

Elettrodinamica. — « Sul teorema del minimo calore di W. Thomson ». LELLI M. 368.

Embriologia sperimentale. — « L'otocisti degli Anfibi anuri considerata come sistema a mosaico. Dimostrazione sperimentale ». GUARESCHI C. 120.

— « Ricerche sulla radiosensibilità nello sviluppo delle ova d'Anfibi. — I. Radiosuscettibilità differenziale dei vari stadi embrionali (Anuri) ». PASQUINI P. e MELDOLESI G. 298.

— « Ricerche di embriologia sperimentale »

nei Ciclostomi. - I. Le malformazioni osservate e il tempo nel quale possono essere determinate ». RANZI S. 111.

Embriologia sperimentale. — « Ricerche di embriologia sperimentale nei Ciclostomi. - II. Gastrulazione e regione cordale ». ID. 676.

— « Risultati di esperimenti sullo sviluppo dell'occhio nell'embrione di pollo ». REVERBERI G. 115.

F

Fisica. — « Le variazioni del policroismo cristallino sotto l'azione del campo magnetico ». BRUNETTI R. 585.

— « Sul funzionamento del triodo con forte accoppiamento magnetico a nucleo di ferro fra circuiti di placca e circuito di griglia ». CORBINO O. M. 313.

— « Sul potere emissivo totale del bismuto ». DEL REGNO W. 77.

— « Di un confronto fra le variazioni col campo magnetico del coefficiente di Hall, del potere termoelettrico e delle resistenze nel bismuto ordinario e nel bismuto compresso ». FEDELE R. 83.

— « Sulla teoria quantistica della frange di interferenza ». FERMI E. 72.

— « A proposito di un supposto effetto dei raggi X nei raddrizzatori a cristallo ». OBERTO S. 89.

— « Sulla sensibilità degli elettrometri ». PERUGA E. 92.

— « Sull'azione fotografica degli elettroni lenti ». ROSSI B. e BERNARDINI G. 182.

— « Sulla dispersione anomala negli spettri "di bande" ». SEGRÈ E. 590.

— « Nuovi fenomeni osservati nella scarica anulare ». SIRACUSANO N. 649.

Fisica-matematica. — « Sul complesso $4d$ della molecola di Elio ». FERMI E. 429, 515.

— « L'effetto Hall con elettrodi estesi ». PERSICO E. e SCANDONE F. 238, 361.

— « Sull'integrazione delle equazioni elettromagnetiche di Maxwell-Hertz ». TONOLO A. 646.

Fisica-matematica. — « Sopra un'applicazione della relatività alla meccanica quantistica ». WATAGHIN G. 423.

Fisica sperimentale. — « L'effetto Hall con elettrodi estesi ». SCANDONE F. 437.

Fisiologia. — « Ricerche sulla pretesa esistenza della lipodieresi polmonare ». CANTONI O. 446.

— « Alcoleemia normale ed alimentare negli esercizi fisici ». CASSINIS U. e BRACALONI L. 382.

— « Primi tentativi di registrazione delle correnti d'azione del nervo acustico ». FOÀ C. e PERONI A. 389.

— « Inanizione parziale di ratti albinici con olio di oliva somministrato con o senza aggiunta di vitamine ». GALAMINI A. 129.

— « Il potere regolatore della reazione dell'acqua di mare ». MARGARIA R. 123.

— « Respirazione periodica provocata dalla simpaticotomia ». PUPILLI G. 671.

Fisiologia vegetale. — « Dimostrazione con la dimetilidioresorcina della formazione di aldeide formica in piante vive durante la fotosintesi clorofilliana ». POLLACCI G. e BERGAMASCHI MARIA. 687.

G

Genetica. — « Variazioni brusche nella forma fogliare di "Cannabis sativa L." ». SAVELLI R. e SOSTER N. 205.

Geodesia. — « A proposito di semplici e rapidi procedimenti topografici ». BOAGA G. 575.

— « Nuova determinazione della deviazione locale in latitudine e in longitudine all'Osservatorio Astronomico di Palermo ». TORTORICI P. 432.

Geofisica. — « Caratteristiche fisiche fondamentali della pianura padana ». BELLUCCI A. 58.

— « Sulla influenza della elasticità del supporto sulla durata di oscillazione di due pendoli simultaneamente oscillanti su di esso ». DORE P. 62.

Geologia. — « Sul confine italo-francese tra il Colle del Piccolo S. Bernardo e

il Colle della Seigne a sud del Monte Bianco». FRANCHI S. 539, 617.

Geologia. — « Su alcuni fenomeni di ricoprimento nell'Appennino Emiliano ». ANELLI M. 202.

— « Appunti geologici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti (Alto Adige) ». DAL PIAZ G. B. 270, 376.

— « Nuove osservazioni geologiche sulla regione compresa fra il torrente Aurino e il fiume Rienza (Alto Adige) ». ID. 518.

— « Sulla utilizzazione di un interessante livello idrico sovrastante la parte nord-orientale dell'altipiano dei Sette Comuni ». MADDALENA L. 527.

Geometria. — « Un problema sul sistema nullo osculatore ad una congruenza W ». CALAPSO R. 493.

— « Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri ». SEGRE B. 31.

— « Esistenza di sistemi continui distinti di curve piane algebriche con dati numeri plueckeriani ». ID. 557.

Geometria differenziale. — « Sul problema di Bianchi riguardante le famiglie di Lamé ». COLOMBO B. 157.

— « Superficie applicabili sopra superficie a curvatura media costante. Nuova dimostrazione del teorema del "Ricci" ». SANSONE G. 553.

— « Ricerche proiettivo-differenziali sulle coppie di linee piane o di superficie ». TODROS I. 401.

I

Iconografia botanica. — « Due codici iconografici di piante miniate, nella Biblioteca Reale di Windsor. A proposito di Cimeli Lincei ». GABRIELI G. 531.

Idromeccanica. — « Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi ». CROSSETTI U. 469.

Idromeccanica. — « Osservazione sul moto stazionario di liquidi viscosi ». FINZI B. 334.

— « Effetto dinamico di una corrente traslatoria che investe un cilindro sottile in vicinanza di una parete piana indefinita ». RAIMONDI E. 344.

— « Effetto di una corrente traslacircolatoria che investe un cilindro sottile, in vicinanza di una parete piana indefinita ». RAIMONDI E. 420.

M

Matematica. — « Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante combinazioni lineari di funzioni date ». ASCOLI G. 539.

— « Sulle coordinate geodetiche lungo una linea ». BORTOLOTTI E. 414, 486, 544.

— « Sulle trasformazioni di Lorentz ». BURGATTI P. 463.

— « Sull'integrazione indefinita ». CACCIOPOLI R. 21.

— « Sur les congruences W à focales réglées ». EGOROFF D. Th. 145.

— « Sur un théorème de M. G. Polya ». GELFOND A. 569.

— « Sur la méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre avec une seule fonction inconnue et deux variables indépendantes ». KOURENSKY M. 148.

— « Metodo generale per la costruzione delle "funzioni separate" di Fourier e delle "funzioni caratteristiche" di De La Vallée Poussin ». LABOCETTA L. 574, 628.

— « Sulla interpolazione segmentale e la classificazione delle funzioni poligonali ». ID. 574.

— « I complessi quadratici contenenti la congruenza degli assi di una cubica gobba e le condizioni affinché due cubiche binarie abbiano due radici comuni ». MERCOGLIANO D. 231.

— « Sur les repères mobiles dans l'espace fonctionnel ». MOISIL GR. C. 413, 497.

Matematica. — «Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate». NALLI P. 502, 565.

— «Sopra il comportamento assintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere». ONICESCU O. 501.

— «Sulla derivazione parziale dei tensori». PASTORI M. 10.

— «Sull'intervallo d'indeterminazione del procedimento di sommazione di Poisson per le serie di Fourier e di Laplace». PICONE M. 560.

— «Particolare formula di maggiorazione per le soluzioni di una classica equazione alle derivate parziali del quarto ordine della Fisica-matematica». PICONE M. 16.

— «Sur les équations intégral-fonctionnelles». POPOVICI C. 413.

— «Sulla curvatura geodetica di una superficie e sulla formula di Liouville». RAIMONDI E. 575, 622.

— «Sul principio della media aritmetica». TORTORICI P. 393.

Meccanica. — «Sul comportamento degli archi elastici molto ribassati». BELLUZZI O. 52.

— «Sulle alterazioni del regime elastico di un arco incastrato che si possono determinare con l'aggiunta di una catena». COLONNETTI G. 330.

— «Eliche ed anelli di risucchio». DA RIOS L. S. 642.

— «Sistemi odografi». DE MIRA-FERNANDES A. 640.

— «Sulle equazioni intrinseche del moto dei sistemi materiali a legami indipendenti dal tempo». GUGINO E. 45.

— «Sulla validità ed estensione del teorema del massimo effetto». ID. 405.

— «Sui moti elementari componenti del moto relativo baricentrico di un sistema materiale». LAMBERTI F. 336.

— «Un nuovo risultato sperimentale sulla contrazione delle vene liquide». LELLI M. 38.

— «I primi elementi d'una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi». MAZZONE-SANGIORGI G. 633.

Meccanica. — «Un criterio di scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali». SUPINO G. 502.

Meccanica celeste. — «Sulla regolazione del problema generale dei tre corpi». KUSNETZOFF W. 413.

Meteorologia. — «Sopra le temperature minime a differenti piccole altezze sul suolo». PASSERINI N. 582.

Mineralogia. — «Nuove ricerche sull'Euclasio - Euclasio di Valle Aurina». CAVINATO A. 527, 656.

Morfologia. — «Provocazione della monofilia in «Cannabis sativa L.», mediante traumi». SAVELLI R. e SOSTER N. 531, 604.

Morfologia sperimentale. — «Rigenerazione del cristallino nelle larve di Anfibi Anuri». PASQUINI P. e DELLA MONICA A. 218.

O

Oceanografia. — «Considerazioni teorico-sperimentali sul regime delle maree del Mare Adriatico». TENANI M. 69, 178.

— «Il regime delle correnti nello stretto di Bab-el-Mandeb, in epoca estiva». VERCELLI F. 481.

Opere pervenute in dono all'Accademia. — 450, 613.

Ottica astronomica. — «L'ipotesi balistica e la verifica della legge delle aree nelle orbite delle "doppie" telescopiche». CANNATA C. 173, 358.

P

Patologia. — «L'anaesotubercolina nella diagnosi della tubercolosi in patologia comparata». FINZI G. 132.

Patologia vegetale. — «Su una "pseudocarie" delle cariossidi di frumento». CURZI M. 224.

— «Una nuova grave malattia del granoturco». ID. 306.

Personale accademico. — 450.

Petrografia. — « Appunti petrografici sulla regione delle Alpi Aurine e delle Vedrette Giganti ». BIANCHI A. 105.

— « Il basalto di "Cucchiara Zeppara" presso Guspini (Sardegna) ». MARTINEZ GIULIA. 665.

Presentazione di libri. — 450, 610, 611, 612, 613.

T

Teoria dei numeri. — « Sopra la Teoria degli ideali di un corpo algebrico finito ». (Note I, II e III). BEDARIDA A.M. 26, 154.

Z

Zoologia. — « Lo scheletro dei Teleostei studiato mediante la radiografia in relazione alla meccanica del movimento ». BRUNELLI G. 380.

Appendice al volume X, serie 6^a

1929

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Antonio Abetti

letta dal Socio GIUSEPPE ARMELLINI, nella seduta del 6 gennaio 1929.

Illustri Consoci,

Come voi ricordate, il 26 febbraio dell'anno scorso, un nostro caro e stimato Consocio, il prof. ANTONIO ABETTI, Direttore a riposo dell'Osservatorio astronomico di Firenze, terminava quasi improvvisamente la sua laboriosa esistenza, tutta modestamente trascorsa nello studio. Ed oggi, commemorando la virtù e l'opera dello scomparso, io cercherò di far rivivere dinanzi a voi la simpatica figura di questo vecchio astronomo che noi tutti non solo stimavamo ma sentivamo anche di amare.

L'Abetti era nato a San Pietro di Gorizia il 19 giugno 1846, ed aveva compiuti i suoi studi universitari a Padova, dove si laureò in ingegneria, a soli ventun anno, nel 1867. Ma appena laureato, invece di erigere fabbricati o tracciare strade, volle dedicarsi allo studio del cielo, portando in quel campo (come già lo Schiaparelli, il Respighi, il Celoria e tanti altri astronomi provenienti dalla Scuola degli Ingegneri) tutto il frutto del tirocinio fatto nel Politecnico. Infatti la sua perizia nella tecnica strumentale fu uno dei suoi pregi principali ed uno dei suoi maggiori vantaggi nella carriera scientifica.

L'anno seguente 1868 lo vediamo entrare come assistente nell'Osservatorio Astronomico di Padova, allora diretto dall'illustre Santini, specializzandosi nell'astronomia di posizione e dedicandosi alla riorganizzazione della officina meccanica annessa all'Osservatorio; e si deve, in parte, al suo impulso se quella officina acquistò la fama che ancora conserva per le ottime costruzioni dei più difficili e delicati apparecchi. Ricordiamo anzi a tale proposito che due delle migliori montature equatoriali che abbia l'Osservatorio di Roma vengono appunto dall'officina di Padova.

A Padova il suo strumento prediletto fu dapprima il piccolo equatoriale Starke e poi l'equatoriale Dembowski di diciotto centimetri di apertura, col quale osservò una sessantina di pianetini, molte comete, varie occultazioni,

alcune eclissi parziali di Sole, trovando anche il modo di occuparsi di orologi solari, di determinazioni di tempo, di calendari, di rifrazione atmosferica, di meteorologia e di maree.

La cura minuziosa con cui il giovane assistente disimpegnava i suoi doveri gli procurò sì alta stima da parte del vecchio direttore Santini, che nel 1874 venne scelto a far parte della spedizione italiana che doveva recarsi in India per osservare il passaggio di Venere sul Sole: fenomeno di cui è ben nota la grande importanza per la determinazione della parallasse del Sole, ma che purtroppo non sarà dato di vedere agli astronomi della odierna generazione, giacchè tornerà a verificarsi soltanto l'8 giugno del 2004.

L'Abetti si recò dunque col Tacchini e col Dorna nella stazione di Muddaspur, nel Bengala, ed assolse egregiamente il compito che gli era stato assegnato, e che consisteva nelle determinazioni di latitudine e longitudine del luogo di stazione, nelle osservazioni astronomiche di tempo, ed infine nell'osservazione spettroscopica del passaggio. Compì inoltre una serie di osservazioni meteorologiche, le quali, specialmente per quei tempi, furono giudicate molto importanti.

Tornato in Europa, l'Abetti ottenne di essere mandato all'estero per seguire corsi di perfezionamento, e dal 1876 al 1877 fu a Berlino, frequentando le lezioni del prof. Foerster, allora direttore dell'Osservatorio, nonché i corsi di altri illustri scienziati. E fu appunto al corso del Tietjen dell'*Astronomische Jahrbuch*, che egli apprese i metodi più comodi e pratici usati dai redattori del famoso Annuario per il calcolo delle orbite planetarie.

Ed un saggio del perfezionamento dell'Abetti nei calcoli astronomici lo abbiamo nel suo importante lavoro sull'orbita del pianetino Maria e su quella della cometa Barnard del 1887.

Al suo ritorno a Padova, nel 1877, essendo nel frattempo divenuto direttore il Lorenzoni, l'Abetti veniva promosso astronomo aggiunto; nel 1887 conseguiva la libera docenza e quattro anni dopo, nel 1891, vinceva il concorso per la cattedra di astronomia nella R. Università di Torino, cattedra a cui era annessa la direzione dell'Osservatorio Astronomico di quella città. Ma vi rinunciò per non lasciare Padova.

Però due anni dopo, nel 1893, vinceva ancora la cattedra di astronomia a Firenze, con l'annessa direzione dell'Osservatorio Astronomico; e solo allora si decise a lasciare Padova, dopo venticinque anni di permanenza, mosso dal pensiero di poter essere altrove più utile alla scienza dei cieli.

Ed infatti l'Osservatorio di Firenze, in quei tempi, si poteva dire ridotto ad esistere soltanto di nome ed anzi possiamo asserire che, prima dell'Abetti, Firenze non aveva mai avuto un Osservatorio degno di questa illustre città. Ai tempi del regno di Etruria, in seguito a disposizione della regina Maria Luisa, era stata collocata una piccola specola sulla torre sovrastante al museo di fisica e di scienze naturali, ma tale soluzione doveva

considerarsi come provvisoria, sia per l'infelice ubicazione, sia per la scarsità dei locali adibiti.

Contro questo stato di cose era insorto Giambattista Amici che in una lunga e ben motivata relazione, conservata ancora nell'Archivio di Stato, aveva esposto al Governo Granducale l'opportunità di trasportare l'Osservatorio in più adatta sede e precisamente al Forte Belvedere, fuori Firenze. Ma tale domanda, forse anche per mancanza di tenaci sostenitori, aveva naufragato contro gli scogli delle prime difficoltà ed era stata passata agli atti.

Più tardi però l'idea del trasporto dell'Osservatorio veniva ripresa dal Donati, il quale più tenace e più ascoltato — la grande cometa del 1858 che da lui prese il nome gli aveva dato molta notorietà anche nel grosso pubblico — era riuscito a ben avviare la pratica. Naturalmente, poichè la scelta di una sede per Osservatorio astronomico è sempre il risultato di un compromesso tra le opposte esigenze a cui l'Osservatorio stesso deve soddisfare, non erano mancate lunghe dispute tra i partigiani del Forte Belvedere e coloro che erano di parere contrario; ma il Donati era riuscito a far accettare una soluzione intermedia trasportando la specola sul colle di Arcetri, sacro alla memoria di Galileo e posto alla periferia di Firenze, in posizione comoda sia per le osservazioni astronomiche che per i servizi urbani e per i compiti didattici.

Ma, purtroppo, la morte prematura del Donati aveva arrestato lo sviluppo del nuovo Osservatorio quasi in sul nascere; anzi, poco dopo il trasporto della specola nella nuova sede, non potendosi trovare i fondi per continuare i lavori incominciati e per provvedere agli strumenti necessari, l'Istituto si era dovuto chiudere e la chiusura durava ormai da venti anni.

All'Abetti fu adunque affidato il compito di risvegliare l'Osservatorio da questo sonno letargico, di farlo vivere e lavorare e, cosa forse più difficile, di ottenere i fondi necessari al suo futuro sviluppo. E il nostro compianto consocio, con assidue insistenze presso le Autorità da una parte e con rigide economie dall'altra, riuscì ad organizzare una specola non indegna del colle di Galileo. Certamente per molti anni gli strumenti non furono nè troppo numerosi, nè di grandi proporzioni; ma bene scelti, accuratamente costruiti e saggiamente adoperati. In particolare l'equatoriale costruito nelle officine di Padova utilizzando un obbiettivo Amici — sostituito oggi da un obbiettivo Zeiss, venuto in riparazione di guerra — nelle mani dell'Abetti rese all'astronomia segnalati servigi. In vari fascicoli delle pubblicazioni di Arcetri, il defunto consocio ne studiò minutamente i dettagli di costruzione e il micrometro, dando anche delle tavole per una celere riduzione delle osservazioni, e per venticinque anni, dal 1895 al 1919, lo adoperò indefessamente per misure di posizione di comete e di piccoli pianeti, misure riportate in gran parte nei fascicoli della sua specola.

Anche il piccolo strumento dei passaggi di Bamberg, a cannocchiale spezzato, che l'Abetti ebbe la buona idea di trasformare in meridiano ag-

giungendovi un cerchio di declinazione e due microscopi, rese segnalati servigi all'astronomia, giacchè permise la compilazione del catalogo del Viaro di 1645 stelle; catalogo che è veramente uno dei migliori tra i moderni cataloghi italiani, da venir collocato meritamente subito dopo quello del Campidoglio di Respighi, Di Legge e Giacomelli, che abbraccia 4012 stelle. Ed il defunto consocio, in una Nota pubblicata sui « Rendiconti » di questa Accademia, trovò che gli errori probabili del catalogo eseguito ad Arcetri con il Bamberg da lui modificato erano assai tenui — circa mezzo secondo di arco per ogni osservazione — e ne trasse motivo per un ingegnoso confronto dei meridiani a cannocchiale spezzato, tipo Bamberg, con i meridiani a cannocchiale intero, tipo Repsold od Ertel.

La questione, posta dall'Abetti, non è ancora risolta benchè ognuno che abbia pratica di osservazioni astronomiche si auguri che l'avvenire stabilisca la prevalenza, da lui optata, dei tipi a cannocchiale spezzato, perchè di gran lunga più comodi e più spediti nell'uso. Debbo tuttavia rilevare per un completo giudizio comparativo che, secondo un noto detto americano, la parte più importante di ogni strumento è l'uomo che lo adopera; e, nel catalogo di Arcetri, l'operatore era Bortolo Viaro, osservatore impareggiabile, troppo presto rapito alla scienza. E mi sia lecito di cogliere questa occasione per mandare un riverente omaggio alla cara memoria di questo mio compianto amico scomparso, il cui valore fu pari alla grande modestia.

Ed, insieme con gli strumenti, anche la biblioteca di Arcetri fu largamente curata ed accresciuta dall'Abetti, riattivando gli scambi, acquistando nuovi libri e cedendole anche opere ed opuscoli personali.

Ma la grande attività di osservatore e di organizzatore non rallentò nel nostro consocio la passione per gli studi da tavolino e specie per i calcoli di orbite e per la compilazione delle effemeridi dei piccoli pianeti dove egli si mostrava degno allievo del Tietjen. E, quasi ciò non bastasse, volle anche dedicarsi alla divulgazione astronomica con opuscoli di carattere popolare o didattico sopra la teoria degli errori, sul calcolo delle probabilità, sopra le applicazioni dei vettori all'astronomia sferica (applicazioni studiate anche da un altro nostro defunto consocio, il prof. Antoniazzi di Padova), sul calendario e sopra la predizione delle maree e pubblicò anche importanti notizie biografiche su Giovanni Schiaparelli, sul suo maestro Lorenzoni e sul suo collaboratore Bortolo Viaro.

Gran parte di queste pubblicazioni è raccolta nei fascicoli dell'Istituto Superiore di Firenze, mentre altre sono sparse negli « Atti della Società degli Spettroscopisti », nei « Rendiconti » della nostra Accademia, nelle *Astronomische Nachrichten* o negli « Atti nel R. Istituto Veneto ». E tale attività, largamente riconosciuta ed apprezzata, gli procurò la nomina a Socio Nazionale dei Lincei, a membro del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Padova, della Commissione Geodetica Italiana e della Royal Astronomical Society di Londra.

E noi che lo conoscevamo più da vicino, noi che non lasciavamo Fi-

renze senza aver visitato il caro « Abetti senior » - come egli si firmava scrivendoci - possiamo ben dire che il suo felice temperamento aggiungeva larghe e simpatiche attrattive ai meriti personali.

Grandemente affezionato al proprio Istituto, l'Abetti dedicava ad esso anche le ore di riposo, curandone la vita ed il benessere in tutti i minimi particolari. Non solo badava all'ordine perfetto della biblioteca, alla migliore manutenzione degli strumenti, alla scrupolosa pulizia dei locali, ma si occupava anche dell'estetica della piccola villa che chiude l'Osservatorio in una gaia cornice verde. E voleva dei fiori sempre freschi sul suo tavolino e su quello dei suoi compagni di lavoro, onde i visitatori dell'Istituto spesso si stupivano di trovare nel severo scienziato, dall'aspetto un po' militaresco, tanto gusto estetico, tanta profonda delicatezza di sentimenti.

E come gli uomini, anche la fortuna parve prenderlo in simpatia giacchè prima di morire il nostro consocio potè vedere coronati dal successo i suoi più ardenti desideri.

Vide sorgere ad Arcetri, sul colle di Galileo che domina la sottostante Firenze, il suo Osservatorio Astronomico, completato dalla bella Torre Solare e collegato ad altri Istituti scientifici, a scopo di aiuto scambievole. Ebbe la gioia di vedere come suo successore, nella direzione della specola alla quale aveva dato tanta vita, il suo figlio e nostro consocio prof. Giorgio, e vide infine il suo paese natale, S. Pietro di Gorizia, riunito alla grande patria italiana.

Raggiunti i limiti di età, nel 1921, Antonio Abetti rimase nella specola presso il figlio Giorgio, nominato direttore, come prezioso consigliere e spesso anche come compagno di lavoro, occupandosi specialmente della sorveglianza della biblioteca astronomica e del calcolo delle effemeridi astronomiche.

Alto, magro, asciutto, Antonio Abetti sembrava, come l'astronomo Galle, lo scopritore di Nettuno, destinato a divenire centenario, e tali erano i nostri voti più ardenti. Una polmonite fulminante ce lo ha rapito in tre giorni, troncando quella laboriosa esistenza, che però ha lasciato una traccia veramente degna di sè.

Ho già parlato delle sue pubblicazioni, ma forse il suo merito principale va ricercato fuori di esse.

Ben persuaso della verità che un Osservatorio astronomico è principalmente un Istituto scientifico, e che ogni scienza si appoggia sopra le scienze affini, fu fautore entusiasta dell'idea di riunire sopra la collina di Arcetri, presso il suo Osservatorio, altri Istituti scientifici della stessa Università di Firenze e specialmente quello di fisica.

Grazie alla sua tenacia, l'idea è oggi diventata realtà, ed in tal modo l'Osservatorio di Firenze, con la collaborazione dei vicini Istituti, si trova in condizioni favorevoli per specializzarsi in astronomia fisica.

Ed è precisamente questa specola che costuisce, secondo me, l'opera maggiore, la traccia imperitura ed il più degno ricordo della venerata memoria del consocio scomparso.

PUBBLICAZIONI DEL PROF. ANTONIO ABETTI

1. «Cenni storici sul successivo sviluppo della Meteorologia», ecc. (Dall'Eco dei Giovani, maggio-giugno 1872). Padova.
2. «Rivista Meteorologica» del 1872. (Giornale di Padova, 1873).
3. «Calcolo dell'orbita e dell'effemeride del pianeta Maria». (Circular zum Berliner Astronomischen Jahrbuch, n. 66, 1877).
4. «Discussione delle osservazioni fatte a Padova dell'eclisse parziale di Sole del 29 settembre 1875». (Mem. Spett., V, 1876).
5. «Rapporto sulle osservazioni astronomiche fatte in India in occasione del passaggio di Venere, dicembre 1874». (Pubbl. Min. pubb. Istruz., 1875).
6. «Altro calcolo sul pianeta Maria». (Circular zum Berliner Astronomischen Jahrbuch, n. 67, 1877; vedi anche: Berliner Astronomisches Jahrbuch, 1881).
7. «Calcolo dell'orbita del pianeta Ino». (Circular zum Berliner Astronomischen Jahrbuch, n. 78, 1887).
8. «Calcolo dell'orbita del pianeta Klytemnestra». (Mem. Spett. Ital., 1878).
9. «Altri calcoli sul pianeta Klytemnestra». (Circular zum Berliner Astronomischen Jahrbuch, nn. 85, 87).
10. «I piccoli pianeti». (In Rivista: La Natura, 1879).
11. «Discussioni delle osservazioni fatte a Padova dell'eclisse parziale di Sole del 18 luglio 1872». (Mem. Spett. Ital., VIII, 1879).
12. «Osservazioni di comete e di pianeti fatte all'Equatoriale di Padova, 1879». (Astr. Nachr.).
13. «Osservazioni e calcoli sulla cometa Swift, 1879». (Astr. Nachr.).
14. «Sulla determinazione del tempo colle osservazioni di passaggi delle stelle pel verticale della polare». (Atti R. Istituto Veneto, 1880).
15. «Osservazioni e calcoli sulla cometa Swift». (Atti R. Istituto Veneto, 1880, e Atti n. 2332).
16. «Osservazioni di sei pianeti fatte all'Equatoriale di Padova», 1879. (Astr. Nachr.).
17. «Osservazioni di ventiquattro pianeti in opposizione fatte a Padova nel 1880». (Astr. Nachr.).
18. «Calcolo dell'orbita della cometa Schaeberle», 1881.
19. «Osservazioni di Marte, Giove e della comete *h*, 1881; *c*, 1881». (Astr. Nachr.).
20. «Calcolo dell'orbita della cometa Schaeberle *c*, 1881». (Astr. Nachr.).
21. «Teoria e pratica della costruzione di un orologio solare in piano verticale». Vienna (Braumüller), 1876, 4°.
22. «Sugli elementi dell'orbita della cometa Maria (170)». (Astr. Nachr., 1882).
23. «Osservazioni di diciotto pianeti in opposizione fatte a Padova nel 1880-81». (Astr. Nachr., 1882).
24. «Osservazioni di diciannove pianetini e della cometa Wells, 1882», I. (Atti Ist. Ven., 1882).
25. «La cometa Pons-Brooks». (Articolo nel giornale Euganeo, 1883).
26. «Osservazioni dei satelliti di Giove fatte a Padova». (Astr. Nachr.).
27. «Notizie, osservazioni e calcoli di diciannove pianetini e delle comete Brooks-Swift, 1883, I; Pons-Brooks, 1884, I; Wolf, 1884, III». Precedono le: «Notizie sull'Equatoriale Dembowki e strumenti ausiliari». (Atti Ist. Ven., tomi II, III, serie VI, 1883-85).
28. «Tavole per ridurre il nascere e tramontare della Luna da Berlino ad altri orizzonti». (Atti Ist. Ven., tomo V, serie VI, 1886).

29. «Esperimento per la determinazione di latitudine», ecc. (Rend. R. Accad. Lincei, 1886).
30. «Notizie e osservazioni e calcoli di comete e pianeti negli anni 1885-86». (Atti Ist. Ven., tomi IV e V, serie VI).
31. «Orbita ed effemeridi della cometa Barnard». (Autolitografia).
32. «Nozioni sul Calendario dei Cofiti e degli Abissini cristiani». (Rend. R. Accad. dei Lincei, 1887).
33. «Tavoletta ausiliaria per l'uso delle tavole di Gould». (Atti Ist. Ven., tomo V, 1887).
34. «Calendario, effemeridi e tavole astronomiche». (Annuario Meteorologico Italiano, 1887).
35. «Sulle Maree e sulla loro predizione». (Mem. R. Accad. Padova, 1888).
36. «Sull'orbita della cometa, 1887, IV (Barnard)». (Mem. Spett. Ital., XIX, 1890-1891, XX; Astr. Nachr., Bd. 126).
37. «Osservazioni astronomiche su Marte fatte a Padova nell'opposizione del 1892». (Mem. R. Accad. dei Lincei, 1893).
38. «Osservazioni astronomiche fatte a Padova coll'Equatoriale Dembowski negli anni 1888-89-90». (Atti Ist. Ven., tomi VI, VII, serie VI; tomi I, II, serie VII).
39. «Congiunzione di Marte con ν Tauri e di Saturno con γ Virginis». (Mem. Spett. Ital., 1893).
40. «Osservazioni di comete e pianetini fatte coll'Equatoriale Dembowski a Padova nel 1891-93». (Atti Ist. Ven., tomo IV, serie VII, 1892-93).
41. «Elementi dell'orbita ed effemeridi del pianeta 1893 A e confronto colle osservazioni». (Atti Ist. Ven., tomo IV, serie VII, 1893).
42. «Sul nuovo micrometro a lamine applicato al Dembowski». (Atti Ist. Ven., 1893).
43. «Formule e tavole per calcolare la rifrazione differenziale nelle osservazioni micrometriche». (Atti Ist. Ven., tomo IV, serie VII, 1892-93).
44. «Elementi astronomici. Nascere e tramonto della Luna a Padova». (Fog. ann. del R. Osservatorio. Anni 1879-86; 1892-94).
45. «Seguito e fine delle osservazioni fatte nel 1893 a Padova. Appendice sull'orbita del pianeta 1893 A». (Atti Ist. Ven., tomo V, serie VII, 1893-94).
46. «Il numero assoluto dell'era volgare nel periodo Giuliano». (Mem. Spett., 1900).
47. «Galileo in Arcetri». Discorso inaugurale letto nell'Aula Magna del R. Istituto di Studi Superiori il 4 novembre 1901. Firenze, 1901.
48. Aus dem Italienischen übersetzt von Eberhard Neugebauer», Breslau. (Nella rivista "Nord und Süd", Bd. 102).
49. «Sugli Asteroidi». (Mem. Spett., 1902).
50. «Criterio di reiezione di un'osservazione dubbiosa». (Mem. Spett., 1902).
51. «Sulla precisione delle posizioni stellari». (Rend. R. Accad. dei Lincei, 1904).
52. «Sulla trattazione coi minimi quadrati di due casi speciali di equazioni di condizione». (Mem. Spett., 1904).
53. «Sul calcolo delle stelle polari». (Mem. Spett., vol. 35, 1906).
54. «Sull'apparato a due prismi di riflessione». (Mem. Spett., vol. 36, 1907).
55. «I passaggi di Mercurio sul disco del Sole». (Mem. Spett., vol. 37, 1907).
56. «Rapporti sull'Osservatorio di Arcetri». (Astron. Jahrg. 41, 1899-1906).
57. «Calcolo della posizione media 1900 di una stella del catalogo astronomico di Greenwich». (Mem. Spett., vol. 38, 1909).
58. «Giovanni Virgilio Schiaparelli». (Astrophysical Journal, 32, 1910).
59. «Sulla determinazione del tempo». (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. 19, 1910).
60. «Sul modo di illuminare il campo oppure il reticolo di un rifrattore». (Mem. Spett., vol. 40, 1911).

61. «Galileo in Arcetri». (Rivista di Astronomia e Scienze affini, Torino. Anni III, V, VI, VII, 1909-13).
62. «L'Osservatorio di Arcetri». (Rivista di Astronomia e Scienze affini, Torino. Anni III, V, VI, VII, 1909-13).
63. «Il Tempo». (Rivista di Astronomia e Scienze affini, Torino. Anni III, V, VI, VII, 1909-13).
64. «Gli ultimi valori della parallasse solare». (Rivista di Astronomia e Scienze affini, Torino. Anni III, V, VI, VII, 1909-13).
65. «Spiegazione dei principali elementi del sistema solare». (Rivista di Astronomia e Scienze affini, Torino. Anni III, V, VI, VII, 1909-13).
66. «La parallasse delle fisse». (Rivista di Astronomia e Scienze affini, Torino. Anni III, V, VI, VII, 1909-13).
67. «Giuseppe Lorenzoni». (Nachruf. Astron. Jahrg. 49, 1914).
68. «Sulla precisione delle osservazioni col piccolo meridiano di Bamberg». (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. 24, 1915).
69. «Discorso». (Bollettino Cassa Mutua Cooperativa per le Pensioni, Torino, 1908).
70. «Sull'applicazione del calcolo vettoriale all'astronomia». (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. 30, 1921).
71. «La rettificazione dell'Equatoriale Peratoner ad Arcetri». (Memorie della nuova Società Astronomica già degli Spettroscopisti, Roma, vol. II, 1922).
72. «Le formule per trovare il nome del giorno di settimana in una data della nostra era d. Cr.». (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. I, 1925).
73. «Sulle coordinate del vecchio Osservatorio di Firenze, del nuovo in Arcetri e della Torre Solare». (Pubbl. Osservatorio di Arcetri, fasc. 43, 1926).

PUBBLICAZIONI DEL R. OSSERVATORIO DI ARCETRI

74. Fascicolo n. 1. «L'Equatoriale di Arcetri», 1896.
75. Fascicolo n. 2. «Il Micrometro doppio dell'Equatoriale», 1896.
76. Fascicolo n. 4. «Tavole di riduzione delle osservazioni all'Equatoriale», 1896.
77. Fascicolo n. 7. «Il Piccolo meridiano di Arcetri», 1098.
78. Fascicolo n. 36. «Nota sul nascere e tramontare della Luna dalle Effemeridi americane», 1918.
79. Fascicoli 3, 6, 9, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 (1896-1921). «Osservazioni astronomiche fatte all'Equatoriale di Arcetri dal 1895 al 1919 di piccoli pianeti e comete».

Commemorazione del Socio Claudio Segré

letta dal Corrisp. A. STELLA nella seduta del 3 febbraio 1929.

Una antica sentenza dice che il giorno della lode sorge all'indomani del giorno che per noi non ha domani: ma per gli uomini veramente sapienti, che furono dotti e buoni, come Claudio Segré, l'ora della lode può suonare anche prima dell'ultima ora.

E furon lode spontanea al cittadino, all'ingegnere e al geologo le solenni onoranze a lui tributate or sono due anni con imponente concorso di autorità, amici, colleghi, discepoli e ammiratori in quell'Istituto Sperimentale delle Ferrovie dello Stato che fu sua creazione, e che suggellava qui nella capitale d'Italia il concetto della importanza e necessità della ricerca scientifica nelle pratiche applicazioni della Ingegneria.

Questo concetto fu la guida costante della operosità instancabile di Claudio Segré nella sua lunga carriera, che lo fece eminente in quel ramo delle scienze geologiche che si potrebbe chiamare *geologia ferroviaria*, intesa come studio del terreno e dei materiali per le costruzioni ferroviarie.

Dalla nativa Mantova passato studente di matematica all'Università di Pavia, divenne poi allievo alla Scuola di applicazione degli Ingegneri di Torino, ove ebbe la ventura di trovare in Bartolomeo Castaldi il propulsore allo studio delle scienze geologiche. Queste discipline il Segré coltivò poi a Parigi, dove appena laureato nel 1878 andò a perfezionarsi in quella celebre École des Mines col sussidio di una borsa di studio governativa. La larga cultura tecnico-scientifica così acquisita fu il viatico prezioso del suo lungo cammino dai primi passi fino alla meta della brillante carriera di tecnico e di studioso a servizio del suo paese.

Eravamo allora in periodo fervido di opere pubbliche per l'Italia da poco politicamente risorta: principali certamente fra tutte le linee ferroviarie. Dinanzi alle difficoltà che presentava per esse la intricata costituzione morfologica e geologica della penisola, fu grande ventura per l'Ingegneria Italiana e per il paese avere un uomo, che, subito afferrando la gravità dei molteplici problemi fondamentali dipendenti dalla natura dei terreni, tutto

si dedicasse alla soluzione di essi con piena scienza e coscienza della necessità di procedere con metodo prettamente scientifico.

Fu con queste direttive che sorsero per opera dell'Ingegnere Segrè dapprima il laboratorio delle Ferrovie Meridionali a Napoli (1881-1885) poi quello della Società Adriatica in Ancona (1885-1905), e finalmente il grande Istituto Sperimentale delle Ferrovie dello Stato in Roma, che egli fondò e diresse con grande amore fino a questi ultimi anni, e che egli seppe mobilitare con vero entusiasmo a servizio della patria in guerra.

La molteplice e indefessa attività tecnico-scientifica del Segrè si è in gran parte tradotta e per così dire concretata nelle opere portate a compimento in questo cinquantennio di costruzione ferroviarie della difficile rete alpino-appenninica. La sua esecuzione magistrale ebbe per base fondamentale il ponderato studio dei terreni per i tracciati e dei materiali per la esecuzione delle opere: e basta citare a titolo d'onore il suo ultimo studio della direttissima Bologna-Firenze e in particolare della grande galleria trans-appenninica, che egli non potè vedere inaugurata, ma di cui ebbe il vanto di constatare la rispondenza perfetta fra i terreni attraversati e le previsioni da lui fatte.

Gli studi molteplici compiuti sia sul terreno che in laboratorio il Segrè seppe anche utilizzare per farne oggetto di pubblicazione in numerose memorie, che costituiscono preziosi e originali contributi di geologia applicata alle costruzioni ferroviarie. Sono dei veri modelli di monografie tecnico-scientifiche, nelle quali sempre il problema speciale locale è inquadrato nel paesaggio geologico più ampio regionale, e sussidiato da rilievi geolitologici e geoidrologici particolareggiati condotti con diligenza e grande acume, e documentati da una ricca serie di fotografie, schizzi e tavole illustrative.

Tali sono ad esempio le memorie sui tratti più difficili della ferrovia Valdostana (25, 38, 41) e della ferrovia del Frejus (23); quella sulle zone franose della linea litoranea Adriatica (18, 20, 21, 22), e della litoranea Sicilia-Settentrionale (24).

Molte altre memorie analoghe sono raccolte in due volumi litografati dall'autore presentati alla Società Geologica Italiana, dandone brevi sunti per la stampa (9, 10, 11).

Fra gli argomenti che furono oggetto di ricerche svariate da lui dirette in laboratorio egli scelse per la pubblicazione quella molto importante sulle prove e l'uso delle pozzolane (13), e uno studio interessante sulle argille scagliose, rocce notoriamente tante infide per l'ingegnere (15, 17, 19).

La grande competenza acquistata dal Segrè nelle questioni riguardanti le condizioni geognostico-costruttive dei terreni italiani lo misero in condizione di trattare a fondo anche i nuovi e gravi problemi tecnico-geologici sorti dalla necessità di sbarramenti e serbatoi montani per gli impianti idroelettrici moderni. E anche in questo campo egli ci lascia il frutto dei

suoi studi in una serie di memorie sia generali che monografiche di importanza non inferiore alle precedenti.

Fondamentale è la sua trattazione dei criteri geognostici necessari allo studio dei serbatoi montani (26), e l'altra sull'interrimento dei laghi artificiali (27).

Di perfetto carattere monografico sono invece le memorie riguardanti gli sbarramenti e serbatoi alpini del Torrente Mèche in Valle della Roia (33), e del Torrente Rochemoles nell'Alta Valle di Susa (38), e quelli appenninici dell'Arda e del Tidone (34); tutte corredate da carte e sezioni geologiche e da interessanti e preziose osservazioni sui caratteri geoidrologici e sul comportamento dei materiali rispetto alla resistenza e alla tenuta.

In tutte queste ricerche e studi il Segrè metteva una vera passione, che mai non venne meno neppure negli ultimi anni, che avrebbero dovuto essere di meritato riposo, ma che invece furono ancora anni di intenso lavoro, che egli amava chiamare la sua ginnastica salutare.

Povero amico: egli forse ne abusò quando, in occasione del recente Congresso della Società Geologica Italiana in Aosta, egli volle compiere in sfavorevoli condizioni di caldura una faticosa escursione per completare alcune osservazioni relative alla deviazione di quella ferrovia Valdostana di cui egli aveva preparato per il Congresso apposita memoria. Quella escursione gli fu fatale, e il male che allora lo colse, e che tutti ci costernò, fu quello che spezzò la sua robusta fibra e lo trasse in breve alla tomba nel marzo dello scorso anno.

Claudio Segrè era piccolo di statura, ma fu una forte tempra d'uomo; egli conservò sempre fino alla fine alacrità di spirito, con una vivacità e direi quasi irrequietezza giovanile, la quale unita ad una cordiale espansività lo rendeva a tutti simpatico, e caro agli amici. Modesto, ma conscio del proprio valore, era cortese con tutti, ma fermo nelle idee che credeva giuste e sdegnoso dei facili accomodamenti. Uomo di studio aveva la virtù, invero non frequente, di riconoscere ed esaltare i meriti degli altri studiosi, che tutti lo avevano amico. Amava ed aiutava i giovani, e volle dimostrare l'amore ai giovani e alla scienza destinando una parte dei suoi risparmi alla istituzione di premi per studi di Geologia Applicata.

Socio fin dalla fondazione della Società Geologica Italiana e della Associazione per lo studio di materiali da costruzione, fu anche chiamato nei loro consigli direttivi. Membro autorevole del Consiglio Superiore delle Acque, del Consiglio Superiore dei lavori pubblici e poi anche della Commissione Geologica Italiana, gli riuscì soprattutto cara la nomina a membro della nostra Accademia, la quale per mia voce rinnova oggi il grande dolore di averlo così presto perduto.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI.

1. - 1877. — « I motori atmosferici e a gas per la piccola industria ». Torino, Ed. Brero.
2. - 1878. — « Terreno ed atmosfera in rapporto con l'agricoltura ». (Dal Giornale l'Italia Agricola, anno X, n. 4 - Milano).
3. - 1879. — « De Vichy au Mont Dore ». (Essai pétrographique et géognostique, Parigi - F. Pichon).
4. - 1879. — « Osservazioni spettroscopiche applicate al Bessemeraggio ». (Dal periodico l'« Ingegneria Civile » - Torino, Camilla e Bertolero).
5. - 1880. — « Note sidurgiche sul bacino della Loira ». (Dal periodico l'« Ingegneria Civile » - Torino, Camilla e Bertolero).
6. - 1881. — « Nota sul bacino sulfureo di Urbino ». (Pesaro, Tip. Federici).
7. - 1882. — « Appunto geognostico sui calcari magnesiaci di Antrondoco ». Dagli studi geognostici compiuti lungo la ferrovia Aquila-Rieti. (Boll. Soc. Geol. Ital. Vol. I).
8. - 1883. — « Sulla costituzione geologica dell'Appennino Abruzzese ». Dagli studi geognostici compiuti lungo la ferrovia Aquila-Rieti. (Boll. Soc. Geol. Ital. Vol. II).
9. - 1884. — « Studi geologici presentati alla Esposizione Nazionale di Torino del 1884 dalla Società Italiana delle Strade Ferrate Meridionali ». (Detti studi sono brevemente riassunti nel Boll. del R. Comitato Geologico, anno 1884, n. 7-8).
10. - 1902. — « Geologia applicata ai lavori ferroviari ». (Boll. Soc. Geol. It. Vol. XXI).
11. - 1905. — « Struttura dei terreni considerata riguardo ai lavori ferroviari ». - Saggio di Geognosia applicata. - La prima parte, illustrata da 8 tavole di rilievi geognostici, venne presentata al Congresso geologico tenutosi nel settembre 1902 alla Spezia colla nota di cui al n. 10. La seconda parte illustrata pure da 8 tavole di rilievi geognostici venne ultimata nel 1905 e presentata al Congresso Geologico tenuto: i nel settembre 1910 a Portoferraio. (Vedansi l'estratto resoconto adunanza generale della Soc. Geolog. in Portoferraio 21 settembre 1910 e la nota del D. L. F. de Magitris sulla Riv. Geogr. Ital. 1902, VIII, circa i contributi geologici e geografici forniti dalla Direzione dei Lavori della Soc. I. F. M.).
12. - 1909. — « Esame geognostico della galleria di Monte Orso - linea direttissima Roma-Napoli - per la vertenza insorta fra l'Amministrazione F. S. e l'Impresa costruttrice ». (Roma, Tip. Capitolina, D. Battarelli).
13. - 1910. — « Relazione sul tema: "Prescrizioni normali per la fornitura, le prove e l'uso delle pozzolane", dato dalla Associazione Italiana per gli studi sui materiali da costruzione ». (Roma, Stab. tip. lit. del Genio Civile).
14. - 1912. — « Sulle opere per riparo dalle alluvioni nelle ferrovie ». (Boll. Soc. Geol. Ital. 1912).
15. - 1912. — Nota sulla costruzione dei sotterranei ferroviari attraverso terreni ad argille scagliose » (Riv. Tecn. Ferrovie Italiane, dicembre 1912).
16. - 1916. — Conferenze tenute nel 1912 all'Istituto Sperimentale delle F. S. sul tema: « Questioni pratiche di geologia applicata che di frequente si presentano nei lavori ferroviari ». (Tip. Editrice Nazionale e Stab. Tipo-lit. F. S.), due edizioni.
17. - 1917. — « Sulla opportunità di abbandonare nella nomenclatura geologica la denominazione di Flysch specialmente nei riguardi della geologia applicata ». (Boll. Soc. Geol. Ital.).
18. - 1918. — « Considerazioni geognostiche circa il consolidamento della ferrovia nei tratti

- franosì del litorale Adriatico con speciale riguardo alla frana di Torino di Sangro». (Riv. Tecn. delle Ferrovie Italiane, agosto 1918).
19. - 1918. — «Sulla penetrazione di materie caoliniche nelle argille scagliose appenniniche». (Boll. Soc. Geol. Ital.).
 20. - 1919. — «Studio geognostico della frana che investì il 19 febbraio 1919 lo sbocco Palermo della galleria di Tusa e la trincea di approccio - Linea Palermo-Messina». (Riv. Tecn. delle Ferrovie Italiane, giugno 1919).
 21. - 1919. — «Studio geognostico della falda franosa del "Montagnolo", litorale Ancona-Falconara, provvedimenti pel suo consolidamento». (Giorn. del Genio Civile, anno LVII, 1919).
 22. - 1920. — «Criteri geognostici pel consolidamento della falda franosa del "Montagnolo", litorale Ancona-Falconara». Ristampa con maggiori notizie stragrafiche. (Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXXVIII, 1919, n. 28 della nota pubblicata sul Giornale del Genio Civile, LVII, 1919).
 23. - 1920. — «Considerazioni geognostiche sul tronco Bussoleno-Salbertrand, Torino-Frejus, con riguardo speciale ai tratti franosi. Provvedimenti». (Giorn. del Genio Civile, anno LVII, 1920).
 24. - 1920. — «Studi geognostici e conseguenti provvedimenti circa: I) la frana di Tusa - ferrovia Palermo-Messina. - II) i movimenti franosi lungo il tronco Bussoleno-Salbertrand - ferrovia Torino-Frejus - Riproduzione, con preavviso della Direz. del Giorn. del Genio Civile, della Memoria n. 20 alquanto riassunta e dalla Memoria n. 23 (Giorn. del Genio Civile, vol. LVIII, 1920).
 25. - 1920. — «Studio geognostico in base al quale si decise la deviazione della ferrovia Valdostana fra i km. 47 + 141,43 e 49 + 843,68 e se ne fissò l'andamento». (Riv. tecn. delle Ferrovie Italiane, luglio 1920).
 26. - 1920. — «Cenni sugli studi geognostici applicati all'impianto dei laghi artificiali» (Ann. Sup. d. Acque, 3° fasc., anno 1920).
 27. - 1921. — «Considerazioni geognostiche sulla deltazione ed in particolare sull'interimento dei laghi artificiali (Ann. d. Cons. Sup. d. Acque, 1921, fasc. II).
 28. - 1921. — «Ancora sulla opportunità di abbandonare la denominazione di Flysch - appunto riguardante le ricerche petrolifere». (Soc. Geol. Ital. Vol. XL, 1921). Idem. Edizione della Rivista «La Miniera Italiana» (anno V, n. 4).
 29. - 1922. — «Origine e carattere delle sedimentazioni del F. Avisio». (Ann. del Cons. Sup. d. Acque, anno 1922. Vol. IV, fasc. II).
 30. - 1922. — «Considerazioni sulla decalcificazione dal punto di vista geognostico e mineralogico». (Boll. Soc. Geol. Ital. Vol. XLI, 1922).
 31. - 1923. — «Laghi artificiali nell'Appennino Emiliano». (Riv. «La Miniera Italiana» anno VII, 1923, n. 10).
 32. - 1924. — «Condizioni geognostiche-costruttive di due grandi sbarramenti nell'Appennino Emiliano». (Boll. della Soc. Geol. Ital. Vol. XLII, 1924).
 33. - 1924. — «Saggio di investigazioni geognostico-costruttive applicate allo studio di un bacino imbrifero alpino e dei relativi sbarramento e canale di derivazione in pressione». (Ann. dei LL. PP. Anno XLII, 1924, fasc. VI).
 34. - 1925. — «Esame del sottosuolo nel fondo valle dei F. Arda e Tidone - Appennino Emiliano - sul posto dei rispettivi sbarramenti alle strette di Mignano e di Molato». (Ann. dei LL. PP., 1925, fasc. n. 1).
 35. - 1925. — «Saggio di indagini geognostiche applicate agli studi per la navigazione interna» (Ann. dei LL. PP., 1925, fasc. III). Estratto dalla pubblicazione del Consorzio pel canale navigabile Torino-Savona.
 36. - 1925. — «Il servizio idrografico Italiano». Comunicazione al Congresso Internazionale Geografico del Cairo, aprile 1925. (Ann. dei LL. PP., 1925, fasc. IV).

37. - 1925. — « A proposito di una pubblicazione geo-idrologica sui Laghi di L. W. Collet Prof. di Geologia all'Università di Ginevra - Considerazioni dell'Ingegnere C. Segré » (Ann. dei LL. PP., 1925, fasc. IX).
 38. - 1926. — « Costatazioni geognotico-costruttive fatte nelle valli di Dora Riparia e di Dora Baltea e specialmente nell'alto T. Rochemolles ». (Ann. LL. PP., 1926).
 39. - 1926. — « Studio geo-idrologico circa un bacino di compensazione da stabilirsi nei monti tiburtini ». (L' "Energia Elettrica" 1926, Milano).
 40. - 1927. — « Condizioni geognostiche di uno sbarramento dell'Aniene a Ponte Lucano ». (L' "Energia Elettrica" 1927. Vol. IV, Milano).
 41. - 1927. — « Studi geognostici interessanti la ferrovia valdostana ». (Rivista tecnica delle Ferrovie Italiane, agosto 1927).
-



PROF. LUIGI BRUGNATELLI

Commemorazione del Socio Corrisp. Luigi Brugnattelli

letta dal Corrisp. GIOVANNI D'ACHIARDI nella seduta del 3 marzo 1929.

Luigi Brugnattelli nacque il 9 dicembre 1859 a Sairano, in provincia di Pavia, dal prof. Tullio, che in quello stesso anno aveva iniziato nell'Ateneo pavese l'insegnamento della Chimica Generale, durato poi per ben 41 anni ininterrottamente a vantaggio di una eletta e numerosa schiera di giovani che, divenuti valenti ed esperti chimici dettero notevole impulso alle industrie chimiche lombarde.

Si ricorda che per ben quattro generazioni l'Università di Pavia ebbe un Brugnattelli fra i suoi insegnanti migliori e chi visita i portici del grandioso palazzo universitario, e si sofferma ad osservare le lapidi che li adornano, trova che tre di esse vennero dedicate, una al prof. Luigi Valentino Brugnattelli, un'altra al prof. Gaspare, e la terza al prof. Tullio, cioè a tre chimici e naturalisti che di padre in figlio si succedettero nella facoltà di Scienze.

Il capostipite Luigi Valentino, medico pratico prima, abbandonò poi la Medicina per darsi alla Chimica e divenire professore in detta materia dal 1796 al 1818; pubblicò più di cento memorie scientifiche, fondò l'Elettrochimica e dovrebbe considerarsi come lo scopritore della Galvanoplastica. Suo figlio Gaspare gli succedette sulla cattedra di Chimica dal 1818 al 1820, nel quale anno passò ad occupare quella di Storia Naturale e di Tecnologia che mantenne sino alla morte, avvenuta nel 1852. Scrisse numerose opere fra le quali un *Trattato delle cose naturali e dei loro ordini continuativi* in 4 volumi. Tullio, allievo del Kramer, fu maestro valentissimo di Chimica per oltre otto lustri; combattente nelle Cinque giornate di Milano e all'Assedio di Venezia; più volte Preside della Facoltà Scientifica ed anche Rettore dell'Università. Finalmente Luigi fu per oltre 30 anni insegnante di Mineralogia nello stesso Ateneo. Orbene il caso di una famiglia che in poco più di un secolo dette, all'insegnamento superiore come quella Brugnattelli, quattro dei suoi, appartenenti a quattro generazioni successive,

è degno di essere rilevato, perchè può considerarsi come unico nella storia delle Università italiane e straniere ⁽¹⁾.

Luigi Brugnatelli, iscrittosi studente all'Università di Pavia, seguì per tre anni i corsi di Matematiche, ma avendo desiderio di dedicarsi agli studi di Chimica mineralogica, si recò poi a Torino ove compì il 4° anno di Chimica, onde poter frequentare il laboratorio del Cossa, e quindi venne nuovamente a Pavia, ove laureavasi in Chimica il 28 giugno 1883.

Appena laureato ritornò a Torino per acquistar nuova pratica dei metodi da seguirsi nell'analisi minerale. Poi lo ritroviamo a Pavia nell'Istituto diretto dal prof. Taramelli, ove, sotto la guida del prof. Sansoni, imparò i primi elementi di teoria e pratica cristallografica; vinto poi il concorso per un posto di perfezionamento all'estero, si recò per circa due anni a Monaco di Baviera, ove acquistò grande pratica nei varii metodi di ricerche mineralogico-cristallografiche nel laboratorio di Groth, e in quelli di ricerche petrografiche nel laboratorio di Oebbeke, e pubblicò in tedesco l'importante lavoro sulla datolite di Serra dei Zanchetti (4).

Ritornato in Italia, il 1° novembre 1888 fu nominato aiuto nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Pavia, diretto dal prof. Sansoni, ed il 23 novembre dello stesso anno conseguì per titoli, la libera docenza in Mineralogia. Rimase a Pavia fino agli ultimi del 1893, ma poi dal 1° novembre si trasferì a Roma, essendo stato nominato primo assistente del prof. Strüver. Come libero docente tenne a Pavia un corso libero sulla Fisiografia microscopica dei minerali, a Roma, per incarico, fece il corso di Mineralogia per gli studenti della Scuola di Farmacia.

Morto nel 1895 (28 marzo) il prof. Sansoni, la maggioranza della Facoltà scientifica pavese propose al Ministro della Pubblica Istruzione che fosse nominato a succedergli il Brugnatelli, che in precedenti concorsi per le Università di Messina e di Genova aveva ottenuto due volte l'eleggibilità, ma tre dei suoi componenti (Bartoli, Pascal, Somigliana), pur non riconoscendo i meriti del Brugnatelli, si fecero paladini della nomina di Alfonso Sella valoroso cultore soprattutto di Fisica. Ed intorno ai due nomi aspra si accese la battaglia e mentre da una parte, con il Taramelli, si schierarono a sostegno del Brugnatelli e dell'indirizzo specialmente naturalistico della Mineralogia, quasi tutti i mineralogisti italiani, dall'altra, a sostegno del Sella e per l'indirizzo prevalentemente fisico di detta scienza, tutti quanti i fisici e fisico-matematici italiani. E la battaglia divenne anche in alcuni momenti incresciosa, perchè più che sopra due diversi indirizzi, sembrò impegnata sopra il nome di due giovani valorosi ben degni entrambi di ricuoprire una cattedra universitaria.

Per la grave polemica sorta la proposta di nomina senza concorso

(1) L. B., *Una famiglia di professori*. Nel numero unico *Universitatis ticinensis saecularia undecima, die XXI Mai an. MCMXXV*, p. 43.

non potè aver seguito, ed il Brugnatelli non ottenne il posto che il 1° gennaio 1898, dopo di essere riescito vincitore del concorso appositamente bandito.

Col 1° luglio 1904 veniva promosso ordinario; nel 1903-04 ebbe l'incarico della Chimica docimastica; dal 1907-08 al 1918-19 quello del corso di Matematica per i Chimici ed i Naturalisti. Fu preside della Facoltà di Scienze dal 1908 al 1911 e nel 1924-25; membro del Consiglio di Amministrazione del Collegio Ghisleri e del Consorzio universitario lombardo; socio effettivo del R. Istituto lombardo, socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, delle RR. Accademie di Bologna e Torino, e del R. Istituto veneto.

*
* *

Se grande fu in ogni tempo l'attività scientifica e didattica del Brugnatelli, onde intorno a lui si formò e crebbe una scuola che fece onore a se stessa ed al Maestro, ed alla quale appartennero fra gli altri il Riva, il Tacconi, il Maddalena, il Ferro, il Bianchi, ecc. non molto abbondante fu la sua produzione scientifica, la quale si arrestò al 1904, quando forse ritenne più utile dare tutto se stesso alla scuola, ai suoi allievi, ed anzichè pubblicare i risultati dei suoi studi, indirizzava ed aiutava nelle ricerche i giovani frequentatori del suo laboratorio, a disposizione dei quali metteva tutto il materiale che egli stesso avrebbe potuto illustrare ed ai quali faceva pubblicare i risultati delle svariate ricerche compiute.

I lavori scientifici del Brugnatelli, spesso pubblicati contemporaneamente in italiano ed in tedesco, talora soltanto in questa ultima lingua, non arrivano a 40, e se nessuno è di grande mole, molti sono di notevole importanza. Essi dimostrano che dal 1883 al 1897 egli si occupò più che altro dello studio fisico-cristallografico di sostanze artificiali, non trascurando però le ricerche petrografiche e quelle sui minerali; dal 1898 al 1904 non compì ricerche che su minerali alpini. Nel passarli brevemente in rassegna li riunisco per materia in tre gruppi e cioè: studi petrografici; studi di indole fisico-cristallografica di sostanze artificiali; studi di minerali.

*
* *

È di litologia il suo primo lavoro del 1884, nel quale si occupa di una roccia pirossenica dei dintorni di Rieti (1), compiuto sotto la direzione del Cossa. Contiene la descrizione microscopica e una analisi quantitativa, e può avere un certo interesse, a dimostrare quale progresso abbian fatto da allora ad ora gli studi litologici in Italia, il rilevare il fatto che per arrivare alla sicura determinazione di questa roccia, di composizione non molto complicata, raccolta dall'allora capitano Verri e da questi inviata a

mio padre ed al Cossa, il primo per la determinazione chiese l'aiuto dello Zirkel, il secondo incaricava il Brugnatelli, che si rivolse, per avere maggior sicurezza sui suoi risultati, al Rosenbusch.

Segue, fra le note petrografiche, nel 1891 quella su alcune porfiriti dioritiche di Rabbi nel Trentino (12), nelle quali determina, non con sicura certezza, la presenza dell'ortite, minerale che predilige i graniti e le granuliti.

Alcune determinazioni di rocce fatte dal Brugnatelli, si trovano anche nella memoria del Taramelli sulla stratigrafia della Valsassina e della Val-lorta (16) ed infine si ha un breve studio sulle serpentine di rio dei Gavi e di Zebedassi nell'Appennino pavese (23), derivate da rocce Cherzolistiche.

*
* *

Fra i lavori riguardanti sostanze organiche il primo (1887) è una breve nota sul pirene (5), che trovasi con il crisene negli ultimi residui della distillazione del catrame, già conosciuto come monoclino, ma per il quale non si erano ancora determinate le costanti cristallografiche.

Nel 1889 ottiene risultati molto importanti dallo studio (9) dell'orto — del meta — del para-nitrocinaematoetilico, che si differenziano fra loro per il posto che vi occupa il gruppo NO_2 e che Egli dimostra cristallizzare in tre sistemi diversi il trimetrico, il monoclino e il triclinico; illustra l'isomorfismo fra l'acido bibromofulminico e bijodo-fulminico, trimetrici; determina le proprietà fisico-cristallografiche dell' α -aspartato monoetilico e dell' α -asparagina, preparati dal Piutti.

Nel 1890 inizia le numerose ricerche sopra alcune combinazioni solfoniche, che pubblica riunendole in tre serie, nel 1890 (10), nel 1891 (13) e nel 1892 (14). Costituiscono le tre serie 23 sostanze ottenute dal professore Otto del Politecnico di Braunschweig, che il Brugnatelli illustra e figura, con somma perizia ed accuratezza, tanto che il Negri, critico minuzioso di ogni lavoro cristallografico del tempo, non trova da fare che una sola osservazione, mettendo in dubbio la monoclinicità della tioanidride dell'acido benzoltiosolfonico ⁽¹⁾

Altre combinazioni solfoniche studia in memorie successive (15, 17, 18, 24) dimostrando fra l'altro l'isomorfismo fra il p-toluoltiosolfonato potassico e quello sodico del Weibul.

Per l'acido picrico (19), già studiato cristallograficamente dal Mitscherlich nel 1828, e poi dal Laurent, ed otticamente dal V. Lang, conferma la cristallizzazione trimetrica, ne dimostra l'emimorfismo e le proprietà piezoelettriche, determina nuove forme cristalline, e calcola nuove costanti cristallografiche.

(1) Osservazioni critiche sopra il sistema cristallino della tioanidride dell'acido benzoltiosolfonico del dott. L. BRUGNATELLI, « Riv. Min. Crist. It. », XI, p. 69, Padova, 1892.

Per alcune sostanze otticamente attive, come la santonina ed alcuni suoi derivati (26) ottenuti dal dott. A. Andreocci, stabilisce per la prima l'appartenenza alla classe antiemiedrica del sistema trimetrico, per le altre l'esistenza di forme destre, sinistre e racemiche, a mezzo dello studio delle figure di corrosione, della piroelettricità, ecc.

Infine ricorderò che per la saccarina $C_6H_{10}O_5$ dimostra la cristallizzazione trimetrica bisenoedrica e studia, con grande accuratezza, la variabilità dell'angolo e del piano degli assi ottici, per diverse linee dello spettro, con il variare della temperatura. In una tabella sono raccolti i 300 valori ottenuti per $2E_a$, come media di oltre 2000 determinazioni, valori che riporta su due diagrammi nei quali le ascisse rappresentano i valori di $2E_a$, e le ordinate nel 1° diagramma le temperature, nel 2° le lunghezze d'onda della luce adoprata. Egli poté dimostrare che a $15^{\circ}.8$ il piano degli assi ottici è parallelo a (001) per il rosso ed il giallo fino a D e ad (100) da D fino al violetto, comportandosi per D come uniassica; uniassicità che si ottiene anche per altre lunghezze d'onda, ma ad altre temperature, così per la linea B verso 60.6 c.^a , per C verso 9° , ecc.

*
* *

Fra le memorie di carattere prettamente mineralogico, alcune sono dell'età giovanile, altre rappresentano l'ultima produzione scientifica del Brugnattelli. Fra le prime ricorderò quelle sulla pirite di Brosso (2), sull'epidoto di varie località (11), su alcuni cristalli di magnetite di località alpine (6) e specialmente quelle sulla datolite di Serra dei Zanchetti (3-4), nella quale ritrovò due tipi caratteristici di cristalli, determinò otto forme nuove per la specie, le proprietà ottiche, la composizione chimica, ecc.

Tutte queste memorie sono accompagnate da figure magistralmente eseguite di cristalli e di proiezioni stereografiche.

Dal 1897, dopo una memoria sulla linarite di S. Giovanni (Sardegna) (27), nella quale studia e figura le forme cristalline, dà le proprietà ottiche e si interessa specialmente alle condizioni paragenetiche, che confronta con quelle della linarite del Cumberland, si dedica esclusivamente allo studio dei minerali alpini. E si ha un primo contributo di osservazioni sui giacimenti amiantiferi di Val Malenco (Val Lanterna e Val Brutta) (29), nel quale si parla soprattutto di un carbonato di magnesio probabilmente nuovo, a composizione esprimibile con la formula $MgCO_3 \cdot Mg(OH)_2 \cdot 3H_2O$, trimetrico, che poi ritrovato nelle cave di Franscia, vicinissime alla Val Brutta, dal Sigismund, offre al Brugnattelli nuovo materiale di studio per la determinazione della specie nuova *artinite*, che ritiene però monoclina, anziché trimetrica (34). E l'*artinite*, in seguito, determina, e descrive, insieme alla idromagnesite, sopra una serpentina antigoritica di Elmarese in Val di Aosta (35).

Per le pegmatiti di Sondalo (Valtellina) illustra prima il crisoberillo (30), poi, il berillo, lo zircone, l'apatite, ecc. (32) e per la Piattagrande, presso Sondalo, l'anatasia e la brookite (31), ritrovate in una drusa nello gneiss, insieme a cristalli di quarzo, adularia ed albite, ricoperti in gran parte da aragonite in ciuffetti aciculari, calcite, siderite ed abbondante limonite.

Infine sono da ricordarsi la breve nota nella quale dà notizia del ritrovamento della titanolivina nei dintorni di Chiesa in Val Malenco (33) e l'altra nella quale parla diffusamente delle proprietà chimiche, fisiche e cristallografiche di questo minerale (36), che ritiene, d'accordo con il Damour, avere stretta parentela, specialmente chimica, con l'olivina, (sebbene da questa si differenzi per la cristallizzazione monoclinale), pur facendo risaltare le grandi analogie che presenta con le humiti, specialmente con le condroditi. In questi ultimi anni lo Zambonini studiando del materiale della Val d'Ala, arriva invece alla conclusione che la titanolivina non è che una varietà di clinohumite (come già aveva detto il Rosenbusch⁽¹⁾), titanifera e glucinifera senza fluore, per la quale propone o il nome di titanidroclinohumite, o quello di idroclinohumite titanifera⁽²⁾.

*
* *

Se il Brugnatelli fu profondo cultore e appassionato maestro della Scienza mineralogica, si occupò sempre con grande interesse anche di Storia, di Arte e di Numismatica, specialmente pavesi e lombarde, onde ricuoprì anche la carica di ispettore onorario dei monumenti per il circondario di Pavia e fu membro della Commissione conservatrice dei monumenti della sua città, dei quali tutti conosceva, origine, tradizioni, sviluppo, bellezze e parlando di loro la sua conversazione, sempre piacevole, acquistava una grande vivacità, come ne ebbi la prova nel 1925, quando andato a Pavia, Rettore dell'Università di Pisa, per le feste centenarie di quell'Ateneo, ebbi il piacere di essere accolto in casa sua per vari giorni, circondato da ogni prova più cortese di signorile ospitalità da lui e dalla sua gentile signora, nella loro casa di Via S. Martino.

Non ricoprì, che io mi sappia cariche in amministrazioni cittadine, perchè sempre fu alieno da ogni manifestazione di vita pubblica, ma grandemente caritatevole, accettò e mantenne per lunghi anni la presidenza della Congregazione di Carità di Pavia.

Affezionatissimo alla famiglia, non vide la sua casa allietata dal sorriso dei figli, e concentrò il suo grande affetto sulla moglie, la signora Cammilla Platner, sua degna compagna che più di ogni altro poté e seppe apprezzare

(1) *Mikr. Physiogr. der Min. u. Gest.*, I, 2, p. 193, Stuttgart, 1905.

(2) *Sur la véritable nature du titanolivine de la Vallée d'Ala (Piemonte)*. « Bulletin Soc. Franç. de Minér. », XLII, 5-6, p. 250, Paris, 1919.

la grande bontà, la grande modestia, la grande valentia del caro scomparso, sui nepoti Brugnattelli e Bianchi, specialmente sul dott. Angelo Bianchi, che fu suo allievo prediletto e suo assistente per vari anni; ebbe la consolazione, prima di morire, di vederlo salire sulla cattedra di Mineralogia dell'Università di Padova, continuatore delle tradizioni scientifiche della scuola mineralogica pavese.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. LUIGI BRUGNATELLI (1)

1. *Sulla composizione di una roccia pirossenica dei dintorni di Rieti.* « Boll. R. Com. Geol. », XIV, pp. 314-318, Roma, 1883 e « Atti R. Accad. Sc. », XIX, pp. 382-386, Torino, 1884.
2. *Sopra alcune nuove combinazioni cristalline della pirite di Brosso.* « Atti R. Acc. Sc. », XX, pp. 808-816, con 1 tav., Torino, 1885.
- 2 bis. *Ueber einige ausgezeichnete Pirit-Krystalle.* « Zeitschr. Kryst. », XI, pp. 362-364, con 2 figg., Leipzig, 1886.
3. *Le forme cristalline e la composizione chimica della datolite di Serra dei Zanchetti.* (In L. BOMBICCI, *Sul giacimento e sulle forme cristalline della datolite della Serra dei Zanchetti [Alto Appennino Pistoiese]*). « Mem. R. Accad. Sc. », VII, pp. 54-61, con 9 figg., Bologna, 1887.
4. *Ueber den Datolit von der Serra dei Zanchetti.* « Zeitschr. Kryst. », XIII, pp. 150-160, con 1 tav., Leipzig, 1887.
5. *Pirene. Studio cristallografico.* « Riv. Min. e Crist. Ital. », I, pp. 57-58, con 2 figg., Padova, 1887.
6. *Ueber flächenreiche Magnetitkrystalle aus den Alpen.* « Zeitschr. Kryst. », pp. 237-249, con 1 tav., Leipzig, 1888.
7. In A. PIUTTI, *Ricerche fatte nel laboratorio di Chimica Farmaceutica della R. Università di Sassari nel 1887-1888: parte cristallografica.*
8. *Ftalimidoseionato potassico* (In G. PELLIZZARI e V. MATTEUCCI, *Ricerche sopra alcuni acidi amidosolfonici*). « Gazzetta Chimica Italiana », XVIII, p. 326, Roma, 1888 e « Riv. Min. e Crist. Ital. », III, p. 76, Padova, 1888.
9. *Studio cristallografico di alcune sostanze organiche.* « Mem. R. Acc. dei Lincei », V, pp. 624-630, con 8 figg., Roma, 1889.
10. *Studio cristallografico di alcune combinazioni solfoniche (1ª serie).* « Giorn. Miner. Crist. Petrogr. », I, pp. 202-223, con 1 tav., Pavia, 1890.
11. *Beiträge zur Kenntniss des Epidot.* « Zeitschr. Kryst. », XVII, pp. 529-540, con 1 tav., Leipzig, 1890.
12. *Studio petrografico di alcune porfiriti dioritiche dei dintorni di Rabbi (Trentino).* « Giorn. Min. Crist. Petr. », II, pp. 215-220, Pavia, 1891.
13. *Studio cristallografico di alcune combinazioni solfoniche (2ª serie).* « Giorn. Min. Crist. Petr. », II, pp. 125-132, con 9 figg., Pavia, 1891 e in R. OTTO e I. TRÖGER, « Berich. Deutsch. Chem. Gesell. », 1891.
14. *Studio cristallografico di alcune combinazioni solfoniche (3ª serie).* « Giorn. Min. Crist. Petr. », III, pp. 1-8, con 4 figg., Pavia, 1892.

(1) Ringrazio il prof. Angelo Bianchi, per l'aiuto prestatomi nella compilazione di questa bibliografia.

15. Della forma cristallina del *p*-toluoltiosolfonato potassico $C_7H_7SO_2SK + Aq.$ «Id. Id.», III, pp. 54-57, con 3 figg., Pavia, 1892 e in R. OTTO, «Ber. Deutsch. Chem. Cesell.», 1891.
16. In T. TARAMELLI, *Osservazioni stratigrafiche nella Valsassina e nella Vallorta: Parte petrografica.* «Rend. R. Istit. Lombard», XXV, pp. 574-576, Milano, 1892.
17. Della forma cristallina di alcuni nuovi composti solfonici. «Riv. Min. Crist. Ital.», XIV, pp. 33-36, con 3 figg., Padova, 1894 e in R. OTTO, TRÖGER e RÖSSING, «Journal Prakt. Chemie», 1893.
18. Della forma cristallina di alcuni nuovi solfoni aromatici degli acidi butirrici. «Rend. R. Acc. dei Lincei», III, 1° sem., pp. 78-82, con 5 figg., Roma, 1894 e «Riv. Min. Crist. Ital.», XIV, pp. 3-8, con 5 figg., Padova, 1894.
19. Osservazioni cristallografiche sull'acido picrico. «Rend. R. Acc. dei Lincei», III, 2° sem., pp. 196-203, con 4 figg., Roma, 1894 e «Riv. Min. Crist. Ital.», XIV, pp. 38-46, con 4 figg., Padova, 1894.
- 19 bis. Ueber Pikrinsäure. «Zeitschr. Kryst.», XXIV, pp. 274-280, con 8 figg., Leipzig, 1895.
20. Studio cristallografico del fluoborato potassico. «Riv. Min. Crist. Ital.», XIV, pp. 58-59, con 2 figg., Padova, 1894.
21. Sulla forma cristallina dell'isocianato potassico. «Id. Id.», XIV, p. 60, Padova, 1894.
22. Sulla forma cristallina del *p*-dibromsulfobenzid ($C_6H_4Br_2SO_2$). «Id. Id.», XIV, p. 74, Padova, 1894.
23. Osservazioni sulle serpentine del rio dei Gavi e di Zebedassi (Appennino pavese). «Rend. R. Acc. dei Lincei», IV, 1° sem., pp. 121-124, Roma, 1895.
24. Sopra alcuni nuovi composti solfonici, anilidi, metilanilidi ed etilanilidi degli acidi benzol e *p*-toluoltiosolfonici. «Riv. Min. Crist. Ital.», XV, pp. 53-56, con 3 figg., Padova, 1895.
25. Osservazioni sull'acido adipico e sul suo sale ammonico. «Id. Id.», XVI, pp. 7-9, Padova, 1896.
- 25 bis. Bemerkungen über die Krystallform des Adipinsäure und ihres Ammoniumsalzes. «Zeitschr. Kryst.», XXVI, pp. 298-299, Leipzig, 1896.
26. Beiträge zur Kenntniss der Krystallform optisch activer Substanzen. Ueber Santonin und einige seiner Derivate. «Zeitschr. Kryst.», XXVII, pp. 78-90, con 15 figg., Leipzig, 1897.
27. Sulla linarite della miniera di S. Giovanni (Sardegna). «Rend. R. Istituto Lombardo», XXX, pp. 392-399, con 2 figg., Milano, 1897.
- 27 bis. Linarit von der Grube S. Giovanni (Sardinien). «Zeitschr. Kryst.», XXVIII, pp. 307-310, con 1 fig., Leipzig, 1897.
28. Beiträge zur Kenntniss der Krystallform und des Einfluss der Temperatur auf die Lage der optischen Axen des Sacharins $C_6H_{10}O_5$. «Id. Id.», XXIX, pp. 54-62, con 1 tav., Leipzig, 1898.
29. Prime contribuzioni allo studio dei giacimenti di amianto della Val Malenco. «Rend. R. Istituto Lombardo», XXX, pp. 1109-1119, con 2 figg., Milano, 1897. «Riv. Min. Crist. Ital.», XVIII, pp. 44-54, con 2 figg., Padova, 1897.
- 29 A. Ueber ein wahrscheinlich neues Mineral aus den Asbestgruben in Val Brutta (Veltlin). «Zeitschr. Kryst.», XXX, pp. 54-55, Leipzig, 1899.
- 29 B. Ueber eine interessante Mineralassociation des Asbestgruben von Val Lanterna (Veltlin). «Id. Id.», XXX, pp. 55-56, Leipzig, 1899.
30. Ueber ein alpinen Vorkommen von Chrysoberill. «Id. Id.», XXXII, pp. 81-82, con 1 fig., Leipzig, 1900.
31. Ueber Anatas und Brookit von der Piattagrande bei Sondalo in Veltlin. «Id. Id.», XXXII, pp. 355-358, con 1 fig., Leipzig, 1900.

- 31 bis. *Ottadrite e brookite della Piattagrande presso Sondalo in Valtellina*. «Rend. R. Istit. Lombardo», XXXII, pp. 1405-1411, con 1 fig., Milano, 1900 e «Riv. Min. Crist. Ital.», XXIII, pp. 37-43, con 1 fig., Padova, 1899.
32. *Berillo ed altri minerali delle pegmatiti di Sondalo in Valtellina*. «Rend. R. Istit. Lombardo», XXXIV, pp. 914-920, Milano, 1921.
- 32 bis. *Berill und andere Mineralien der Pegmatite von Sondalo in Veltlin*. «Zeitschr. Kryst.», XXXVI, pp. 97-101, Leipzig, 1901.
33. *Sopra un giacimento di titanolivina in Val Malenco*. «Riv. Min. e Crist. Ital.», XXVIII, pp. 3-4, Padova, 1902.
34. *Sopra un nuovo minerale delle cave d'amianto della Val Lanterna «artinite»*. «Rend. R. Istituto Lombardo», XXXV, pp. 869-874, Milano, 1902.
- 34 bis. *Ueber Artinit, ein neues Mineral der Asbestgruben von der Val Lanterna (Veltlin)*. «Centralbl. Min.», Stuttgart, 1903.
35. *Idromagnesite ed artinite di Emarese (Val d'Aosta)*. «Rend. R. Istit. Lombardo», XXXVI, pp. 824-828, Milano, 1903.
- 35 bis. *Ueber Hydromagnesit und Artinit von Emarese in Aostathal*. «Centralbl. Min.», nn. 20-21, pp. 663-665, Stuttgart, 1903.
36. *Ueber den Titanolivin der Umgebung von Chiesa in Val Malenco; ein Beitrag zur Kenntniss des Titanolivin*. «Zeitschr. Kryst.», XXXIX, pp. 209-219, con 1 tav., Leipzig, 1904.
- 36 bis. *Sulla titanolivina dei dintorni di Chiesa in Val Malenco*. «Riv. Min. Crist. Ital.», XXX, pp. 69-83, Padova, 1904.
-

Commemorazione del Socio straniero Jacob Felix Marchand

fatta dal Socio B. MORPURGO nella seduta del 3 marzo 1929.

Il 4 febbraio dello scorso anno si è spenta una luce che ha rischiarato molti campi della biologia e potentemente contribuito a reggere l'indirizzo scientifico della patologia per quasi mezzo secolo: è morto Felice Marchand, professore emerito dell'Università di Leipzig, Socio straniero della R. Accademia dei Lincei dal luglio del 1903.

Il Marchand ebbe aspetto grave, attento e pensoso, espressione lenta, cadenzata e quasi stanca, carattere fermo e leale, temperamento dolce, condotta austera nella vita privata, affabilità semplice e riguardosa coi colleghi e gli amici, atteggiamento riservato verso gli estranei.

Nel volto che pareva premuto dal grande cranio, sotto la fronte alta e spaziosa, al riparo di due grossi tratti supercigliari un po' corrugati e delle palpebre carnose, brillavano attraverso le lenti due piccoli occhi grigi, dallo sguardo fermo, attento e penetrante, che rivelavano uno spirito curioso ed arguto, teso verso la verità e la giustizia. E tale era in fatto il nobilissimo spirito del Marchand. Coscienzioso ed infaticabile nella scuola, nel laboratorio e nella biblioteca (sua unica ricchezza), geloso del proprio tempo come di cosa preziosa che gli fosse affidata per il bene altrui, considerò ogni atto della propria vita come l'esecuzione del dovere assegnatogli dalla natura, che egli sentiva come potenza divina, dall'educazione e dalla situazione sociale. Servì la scienza e la patria come un soldato strenuo e fedele, senza ambizione, per obbedire all'ideale umano che s'era formato.

La storia naturale lo attrasse fin dalla prima infanzia. Vide il gaio sorriso dei fiori, l'affacciarsi degli insetti, l'ardito volo degli uccelli, seguì i costumi e gl'istinti degli animali, raccolse le ossa scarnite fra i rifiuti, non con puerile curiosità delle cose nuove, presto dimenticate, ma attratto dall'ingenita vocazione naturalistica, che lo chiamava a notare e paragonare le forme degli organismi e ad osservare i fenomeni della vita, per penetrare nel segreto dell'universo infinitamente vario e complesso.

Quella vocazione, che sempre lo dominò e sempre fu contrastata dalle angustie e dalle sventure, fu la gioia ed il dolore di tutta la sua esistenza.

La vita del Marchand trascorse in una doppia via: stretta, aspra, grigia, spesso impedita da tristi vicende l'una; ampia, spianata dalla libera critica, illuminata da grandi pensieri e splendide concezioni naturalistiche e filosofiche l'altra; in quella egli si contenne rassegnato e paziente, in questa procedette ardito e sicuro. Ebbe la gloria, ma non la letizia, fu ammirato per la fede nella scienza e per l'abnegazione.

Nacque a Halle a. S. il 22 ottobre del 1846, primogenito del professore di chimica dell'Università, dotto tenuto in gran conto dal Liebig e dal Berzelius (come risulta da lettere conservate nell'archivio della famiglia Marchand). A quattro anni perdette il padre, morto di colera, e restò con la madre, una von Baerensprung di Berlino, donna nobilissima, educata agli studi e sensibile all'arte. Le più severe strettezze economiche gravarono sulla desolata giovane vedova che aveva, oltre a Felice, due altri figli piccini ed uno in grembo. Nel 1857 la famiglia dovette appoggiarsi ai parenti di Berlino, dove il Marchand incominciò la sua istruzione scolastica sotto la guida dello zio F. von Baerensprung, il futuro dermatologo dell'ospedale della Charité. Ma già prima d'allora al bambino era apparsa la stella che doveva guidarlo per tutta la vita. Egli stesso in un suo modesto cenno autobiografico racconta che già nei primi tempi di Halle sentiva irresistibile il richiamo delle cose della natura e la voglia di raccogliere animali e scheletri, e che nel 1855, in occasione della sua prima visita allo zio di Berlino, aveva chiesto come una grazia che gli fosse concesso di entrare nella casa mortuaria della Charité per vedere uno scheletro umano, del quale non poteva farsi una giusta idea da quelli degli animali, che conosceva.

La visita di quella tetra ed umile casa, che poco dopo doveva diventare il più illustre istituto patologico del mondo, impresso nel giovinetto di 9 anni un ricordo indelebile, non di terrore o di ribrezzo, ma di immenso interesse, che valse senza dubbio a far nascere in lui il germe della propensione per l'anatomia patologica. Volle il fato che la casa mortuaria della Charité, fucina della moderna patologia, fosse anche l'ispiratrice del più fine cesellatore e del critico più profondo, libero e sereno della nuova dottrina creata da Rodolfo Virchow.

Nel 1857 il Marchand entrò in un ginnasio francese, rinomato, ma già assai decaduto, nel quale dominava con la pedanteria degli insegnanti la tristezza dell'ambiente al centro della vecchia Berlino. Ma la grande molla della vocazione naturalistica faceva scattar fuori da quel chiuso il giovinetto, memore della libertà di Halle, e lo spingeva a correre per la campagna in cerca di ogni sorta di animali, che portava a casa e nel silenzio della notte sezionava ed iniettava di masse colorate nei vasi sanguiferi e preparava per lo studio dello scheletro. Povero di libri scientifici, si rallegrava nel leggere e rileggere *La Bibbia della natura* del vecchio Johann Schwammerdam e s'iniziava, invero per un'assai rozza e primitiva strada, allo studio dell'embriologia, che doveva poi essere uno dei suoi prediletti.

Alla fine del periodo ginnasiale il Marchand aveva messo insieme una collezione di preparati zoologici, che molti anni dopo egli stesso giudicò assai pregevoli ed ai quali rimase affezionato come alla più franca e spontanea manifestazione della sua vocazione e come al ricordo della sua più vagheggiata speranza.

Le condizioni economiche della famiglia non gli permisero di dedicarsi alla zoologia e gli imposero di scegliere una carriera che pesasse poco sul bilancio domestico e promettesse qualche rapido guadagno. Perciò entrò come alunno nell'Accademia medica militare e sotto il giogo di una severa disciplina frequentò i corsi della Facoltà di Berlino.

Negli anni dell'Università a Berlino non ebbe quella libertà di studio e quel franco commercio intellettuale con i maestri che il suo spirito originale e la sua levatura gli facevano desiderare.

La Facoltà Medica di Berlino era in quei tempi assai ornata di nomi illustri, ma poco adatta per avviare alle ricerche i giovani studenti. Alcuni degli insegnanti erano vecchi, fortemente attaccati alla materia del loro tempo, rissosi contro i novatori. L'anatomico Reichert lanciava i suoi anatemi contro i giovani Antonio Kölliker e Max Schulze e non si curava di iniziare gli allievi alla nascente istologia. Altri, come il fisiologo De Bois Reymond, affascinanti nell'aula scolastica, non erano abordabili nel sacrario del loro laboratorio o, come il brillantissimo clinico von Frerichs, tenevano a grande distanza gli studenti. Le lezioni del Virchow, scultorie e fervide d'iniziative scientifiche, che avrebbero appagato lo spirito del Marchand, non poterono essere fruttifere per il giovane alunno dell'Accademia militare, perchè i vincoli della disciplina di questa scuola gl'impedirono di partecipare ai corsi pratici e dimostrativi, che erano il vero avviamento alle ricerche di patologia. Per compensare questa grave lacuna il Marchand cercò di procurarsi, per mezzo di amici ed anche ricorrendo al favore dello stesso Virchow, del materiale patologico, per studiarlo da sè, come avea fatto di quello zoologico, negli anni del ginnasio. Era destino che nella preparazione scientifica del Marchand il metodo autodidattico dovesse supplire a quello scolastico.

Di questa sua sorte egli si dolse fino nella vecchiaia, riandando la propria carriera, cosparsa di amare delusioni e tutta segnata da faticose rettifiche di rotta; ma a torto, perchè n'ebbe in cambio una libertà di giudizio ed una tendenza ad assodare ogni fatto ed ogni dato bibliografico con indagini dirette, che gli procurarono la fama della guida più fidata e sicura della patologia negli ultimi decenni.

Tentò di avviare il proprio lavoro nella corrente scolastica, onde poterne trarre anche qualche vantaggio materiale, che gli era necessario. Si provò a risolvere le questioni proposte dai professori per i concorsi a premio. Ma non fu fortunato. Il vecchio Reichert aveva messo un tema di protesta: « Inutilità del metodo d'impregnazione col nitrato d'argento per

l'istologia ». Il Marchand provò il metodo e lo trovò eccellente! Ebbe ragione, ma non colse il premio. Tornò alla carica verso un tema di fisiologia: « Importanza della muscolatura striata nell'intestino della tinca », tema oltremodo difficile, gettato come un'esca dal grande Du Bois Reymond alla brama dei volenterosi, ma assolutamente inadeguato alle possibilità di lavoro ad essi offerte. Il Marchand si accinse al compito e durante le ferie cominciò la sua preparazione anatomica e zoologica, necessaria per trattare l'arduo tema; ma questa fu così lunga e difficile, che, quando l'ebbe compiuta, le ferie erano passate e venne a mancare il tempo e la libertà per iniziare le ricerche.

Dopo l'ottavo semestre universitario fu comandato in qualità di medico sostituto all'ospedale della Charité e dovette interrompere i lavori avviati e la frequentazione dei corsi clinici. Nel luglio del 1870 fu laureato e, come egli scrisse, povero di preparazione scientifica e tecnica, si avviò all'esercizio medico durante la guerra franco-prussiana. Assegnato al lazzeretto di Wörth e poi a quello di Strasburgo, ebbe occasione di fare alcune interessanti autopsie, intorno alle quali stese accurati protocolli corredati di belle figure macro e microscopiche, per tenerne memoria, senza il proposito di farne oggetto di pubblicazioni.

Nel 1871, conseguita l'approvazione per la pratica, passò nella guarnigione di Nessel, piccola fortezza della Slesia, e di là tornò a Berlino in servizio medico alla Casa dei Cadetti. Soltanto nel 1876 poté abbandonare il servizio militare ed avviarsi alla carriera universitaria; vi entrò in qualità di assistente di Teodoro Ackermann, patologo di Halle.

Gli anni del servizio medico militare furono quelli nei quali il carattere del Marchand fu messo alla più dura prova. Solo, senza mezzi, lontano da ogni probabilità di potere un giorno mettere a profitto della propria carriera gli studii che quasi per istinto andava facendo, approfondì ogni questione scientifica che gli si presentò nel corso saltuario delle sue ricerche e riuscì a comporre una solida base per la sua cultura biologica. L'acume dell'osservazione sopprimeva in modo sorprendente alla mancanza di una lunga esperienza e di una regolare preparazione. Molti fatti da lui rilevati furono fertili germi della moderna patologia e contribuirono più tardi a dargli fama, mentre altri, per le avverse condizioni della sua vita, restarono ignorati o vennero più tardi scoperti e resi noti da altri.

In un soldato, nel quale la diagnosi clinica era stata oscillante fra scorbutico e tifo petecchiale, scoprì un quadro di leucemia con infiltrazione delle ghiandole salivari, che in quel tempo era una grande novità. Avrebbe desiderato di pubblicare quel reperto e aveva già stesa un'accurata descrizione e disegnate delle nitide figure, ma l'autorità militare non diede il permesso di pubblicazione ed il lavoro restò inedito. Nella Casa dei Cadetti non ebbe che poco materiale di anatomia patologica e perciò si rivolse a studi zoologici e botanici. Nella sua cameretta, trasformata in un piccolo labo-

ratorio, durante la notte eseguiva osservazioni microscopiche, disegni ed esperimenti. Studiò la sporificazione dei funghi nella goccia pendente, cioè con un metodo che prima di lui nessuno avea pensato di applicare alle ricerche microscopiche sui parassiti e che molto tempo dopo, divulgato da Roberto Koch, divenne uno dei più pregiati nella batteriologia. Sperimentò nei conigli l'infezione della trichina dei muscoli, ricavata da materiale dell'autopsia di un militare morto di polmonite, eseguì accurate osservazioni microscopiche sui vermi intestinali e descrisse e copiò in nitide figure i quadri istologici di alcuni interessanti tumori che potè avere dall'ospedale Bethanien. L'esame del cervello di un feto umano gli permise di decidere la questione in quel tempo molto controversa del rapporto delle cellule ependimali con le fibre del tessuto sottostante, e l'autopsia di un neonato gli rivelò l'esistenza di ghiandole surrenali accessorie nei legamenti larghi. Di tante belle osservazioni e scoperte o non fece alcuna pubblicazione o diede soltanto un succinto resoconto molti anni più tardi. Il fervore della sua passione scientifica si estingueva non appena il fatto indagato era chiarito, fissato in una diligente descrizione e documentato da precisi ed eleganti disegni; rendere noto il proprio lavoro gli sembrava una penosa agiunta, alla quale cercava di sottrarsi cedendo di fronte ai più lievi impedimenti materiali. Strano contrasto fra un'eroica tenacia ed una timida debolezza, contrasto che rispecchia le due principali attitudini dell'anima del Marchand: quella di una vigorosa aspirazione verso la verità scientifica e di una rassegnata rinuncia alle gioie della notorietà e della fama.

Con l'abbandono del servizio militare nel 1876 e l'ingresso nell'Istituto patologico di Halle incominciò per Marchand una nuova èra, nella quale, se non cessarono le più dure difficoltà materiali per la vita e per lo studio, fu realizzato l'avviamento alla carriera accademica.

L'Istituto patologico di Halle era così tetro e nudo, che non a torto gli studenti lo chiamavano « la caverna ». Il materiale vi era scarsissimo e per poterne acquistare il Marchand era costretto ad eseguire delle autopsie nelle case private dei poveri, con quale disagio è facile immaginare. Ma tutte queste difficoltà non potevano diminuire la volontà e l'operosità del giovane studioso; cosicchè in due soli anni egli si fece maturo per la libera docenza (1879) e potè presentare ai suoi giudici una memoria originale sui tumori ovarici, così nuova e profonda, che destò in essi ammirazione e meraviglia. In cadaveri di difterici provenienti dalla policlinica osservò delle strane alterazioni del sangue, e, considerando il largo uso interno che contro quella malattia si faceva del clorato di potassio, pensò che questa sostanza avesse cagionato la morte per avvelenamento. Intraprese accurate indagini in vitro e sugli animali e potè concludere che l'alterazione dell'emoglobina, prodotta dal clorato, era veramente causa di morte. Questa scoperta non mancò di destare un grande scalpore e qualche ribellione fra i clinici che consideravano il clorato quasi come uno specifico contro la difterite della fauci.

L'ambiente ristretto ed intimo dell'Università di Halle gli era gradito, perchè appagava il suo desiderio d'imparare varie notizie scientifiche mediante il commercio con professori di diverse materie; però la scarsità dei mezzi di studio indusse il Marchand ad accettare l'invito di E. Ponfick di assumere il posto di assistente nell'Istituto patologico di Breslau. Nei due anni passati in questo istituto la sua operosità divenne meravigliosa: oltre ai corsi liberi fece l'insegnamento di anatomia patologica speciale, si sobbarcò alla massima parte del lavoro delle autopsie e scrisse sette memorie su argomenti particolari e numerosi articoli di anatomia patologica per la *Realencyclopädie* di Eulenburg, ai quali diede un carattere originale col notevole contributo delle proprie esperienze.

Ammogliato da poco tempo, incominciò a sentire impellente il bisogno di migliorare la condizione economica della famiglia e di consolidare la propria posizione accademica; ma per raggiungere questi scopi si affidò soltanto al proprio lavoro e non pensò a procurarsi il favore dei potenti. Anzi è ben degno di essere rilevato il fatto che appunto in quell'epoca, in occasione dell'inizio del suo insegnamento, trattò della tubercolosi, pronunciandosi nettamente contro la tesi della dualità della tubercolosi e della scrofolosi ed a favore dell'eziologia unica, parassitaria, e della natura infiammatoria della tubercolosi, in aperto contrasto con le opinioni di Virchow, allora onnipotente ed altrettanto autoritario che autorevole. Ad onta del suo franco ardire, riuscì ad acquistarsi tanto credito, che, alla scadenza del secondo anno dell'assistentato a Breslau, ebbe l'invito a coprire come professore ordinario la cattedra di patologia dell'Università di Giessen, illustrata dal Perls. Questo fatto, che egli considerò come un favore della fortuna e che avrebbe dovuto rallegrarlo, svegliò nella sua coscienza lo scrupolo di essere impari al compito per la sua qualità di autodidatta, che egli definiva « non normale » e sentiva come un'origine accademica spuria ed una indisciplinezza nella condotta scientifica.

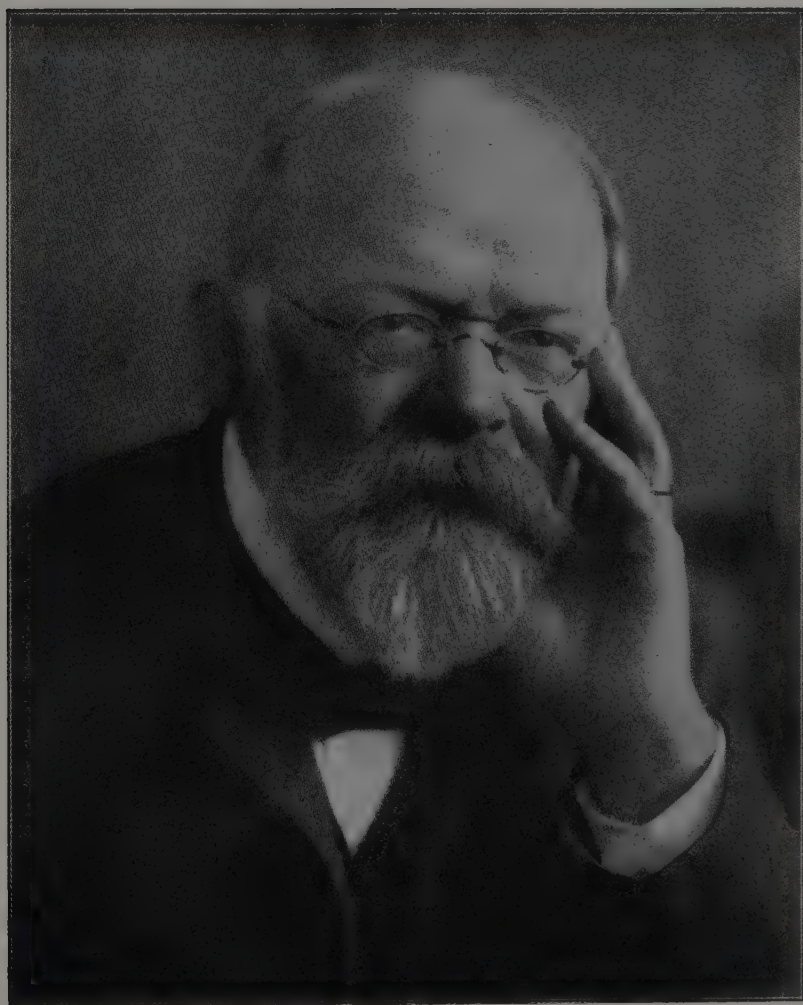
Le condizioni dell'Istituto di Giessen erano molto meschine e perciò nel 1883 accettò la chiamata all'Università di Marburg, resa gradita dalla promessa di un nuovo istituto. A Marburg passò tredici anni; senza dubbio i migliori della sua vita, perchè, oltre alla soddisfazione di dare un maggior sviluppo alle ricerche avviate ed all'insegnamento, ebbe la gioia ed il conforto dell'amicizia di un'elettissima schiera di colleghi, coi quali visse in comunità di aspirazioni e di idee. Di quel gruppo di scienziati fecero parte il Lieberkühn, Federico Müller, Max Rubner, Korschelt, Kossell, Emilio Behring, uomini i cui nomi hanno riempito della loro fama la migliore epoca dell'ascensione delle scienze biologiche e della medicina in Germania.

La grande messe di esperienza, da lungo preparata, venne a maturità ed i numerosissimi fatti particolari annotati e raffigurati andarono saldandosi per formare solidi corpi di dottrina. Più che cinquanta pubblicazioni videro la luce in quegli anni e portarono in quasi tutti i principali argomenti del-

l'anatomia patologica e della patologia generale nuove idee e libere, profonde critiche. Ricorderemo gli studi sull'ipertrofia nodosa del fegato come esito dell'atrofia acuta, sulla rigenerazione del tessuto epatico, sulla patologia delle cassule surrenali, sulla natura della sclerosi e della degenerazione delle arterie, sul corioepitelioma, le precoci e giuste intuizioni riguardo ai rapporti fra i batteri patogeni e gli organismi ospiti e finalmente e soprattutto la estesissima rete di osservazioni e di esperimenti sull'infiammazione, sulla guarigione delle perdite di sostanza e sugli innesti dei diversi tessuti.

In tutta questa vasta opera emergono l'originalità e la giusta linea dottrinarina accanto alla minuta illustrazione di ogni fatto particolare. Fino dai tempi di Breslavia egli aveva sentito una particolare propensione per le questioni generali della patologia. La tradizione di Giulio Cohnhein era sempre viva nell'istituto patologico di quella città ed il Marchand s'era particolarmente interessato alla dottrina dell'infiammazione. A Marburg, avendo intrapreso osservazioni microscopiche intorno all'invasione di tessuto neoformato in corpi porosi introdotti nel cavo peritoneale, seguì i processi istologici dell'infiammazione dei tessuti fissati col metodo di Flemming e poté mettere in evidenza l'origine di una parte delle cellule mobili dei territori infiammati da cellule avventiziali, fatto di capitale importanza e nuovissimo in un tempo nel quale regnava ancora assai oscurità intorno alla genesi dell'infiltrato parvicellulare ed ai rapporti fra gli elementi mobili dell'essudato infiammatorio e quelli fissi dei tessuti. Oltre a ciò egli corresse l'errore che tanto il Virchow quanto il Cohnhein avevano commesso, considerando l'infiammazione come un fatto totalmente abnorme e dannoso, e sostenne che l'infiammazione è la reazione diretta contro la causa che la ha prodotta e l'avviamento alla guarigione, sia pure senza una finalità precisa e quindi senza il raggiungimento di uno scopo totalmente utile.

Nel 1900 fu chiamato a Leipzig a succedere a Birch-Hirschfeld. Per quanto a malincuore, si decise a lasciare Marburg, attratto dall'enorme quantità di materiale che affluiva all'istituto patologico di Leipzig e dalla speranza di poter in breve disporre di un grande istituto rispondente al suo desiderio di sviluppare le ricerche di patologia generale accanto alle osservazioni di anatomia patologica. Il peso che egli assunse fu davvero gravoso: nei vent'un anni passati nell'istituto di Leipzig furono eseguite da lui stesso o sotto il suo immediato controllo trentaduemila autopsie e preparati diecimila pezzi per il museo; oltre a ciò fu promossa e faticosamente guidata la costruzione dell'istituto di patologia, che solo dopo otto anni fu compiuto. Ad onta di tanti e così gravosi carichi non lasciò languire le originali ricerche proprie e degli allievi. Di quest'epoca sono i lavori o, per dir meglio, le pubblicazioni intorno alla mancanza del corpo calloso ed alla microcefalia, fondate su osservazioni incominciate fin dai tempi di Berlino e via via maturate ed arricchite di numerose figure, la scoperta di corpuscoli



PROF. JACOB FELIX MARCHAND

di natura parassitaria in un caso di splenomegalia, che poi furono identificati da Donovan e Leishmann, come i tripanosomi del Kala-Azar e numerosissime osservazioni di anatomia patologica speciale.

Nel 1902 fu chiamato a Berlino a succedere a Virchow, ma non accettò quel grande onore e non si mosse da Leipzig fino all'epoca del suo collocamento a riposo, il quale avvenne nel 1921. Ritiratosi dall'insegnamento, non solo non cessò di lavorare con grande assiduità, ma si propose dei compiti che sarebbero stati troppo gravosi per un giovane. Riprese a trattare la dottrina dei processi di reazione patologica, rivedendo nelle fonti tutta l'enorme bibliografia dell'argomento fino a quella più recente e su tutto riferì con serenità e critica sagace, mostrandosi in grado di giudicare anche intorno alle modernissime questioni delle funzioni dei vasi capillari e dell'influsso delle alterazioni fisico-chimiche nei tessuti sulla genesi dei singoli fenomeni dell'infiammazione. Il frutto di quest'enorme lavoro comparve nel volume sull'infiammazione del trattato di patologia generale di Marchand-Krehl, quando il corpo del grande vegliardo, fiaccato dagli acciacchi, non poteva più essere sollevato dal giaciglio. Quest'ultima opera ha meravigliato il mondo dei dotti ed incusso un profondo rispetto per il preclaro esempio di fedeltà al dovere e di devozione al lavoro.

Nessun dolore fu risparmiato al Marchand; egli morì dopo un lungo periodo di assoluta impotenza fisica, afflitto dai ricordi della perdita di molti famigliari e di tre fra i prediletti discepoli, Saxer, Riesel e Löhlein; ma anche nella profonda tristezza del suo tramonto non perdette il dominio di sè, nè la benevolenza per gli altri, nè la speranza nella fratellanza fra gli studiosi.

Dopo la guerra mondiale egli fu uno dei primi ad invocare la pacificazione degli animi e l'oblio delle offese nel sacro nome della scienza. Amò sinceramente l'Italia, e, da quel grande naturalista ch'egli era, sentì l'affinità coi nostri grandi e si compiacque di chiamarli i suoi Maestri. L'elenco delle sue pubblicazioni fu con grande amore composto da Herzog di Giessen e completato da Werner Hueck di Leipzig, che poté conoscere il lascito scientifico del Marchand, ricco di numerose osservazioni inedite e di preziosi disegni ⁽¹⁾.

(1) W. HUECK, *Verhandlungen der deutschen pathologischen Gesellschaft*. XXIII, Jg, 1928.

Commemorazione del Socio Luigi Bianchi

letta dal Corrisp. GUIDO FUBINI nella seduta del 5 maggio 1929.

A me, discepolo di Luigi Bianchi, è affidata la commemorazione dell'insigne Maestro in questa Accademia, di cui egli fu tra i Soci più illustri. Affinchè però io potessi lumeggiare degnamente l'opera scientifica dell'uomo che è stato così grande onore della scienza italiana, bisognerebbe che le mie forze non fossero inferiori all'affetto indicibile e alla gratitudine che mi legano alla memoria del rimpianto Maestro.

La buona volontà mi valga di attenuante.

Luigi Bianchi, nato a Parma da Saverio, giurista insigne, andò a Pisa come studente e qui trascorse tutta la sua vita di allievo e di docente, se si eccettua il breve periodo di perfezionamento alla Scuola del Klein. Egli sentì la grandezza delle tradizioni della città divenuta sua patria adottiva e del suo Ateneo. E noi lo possiamo a buon diritto considerare come l'Illustre continuatore delle grandi tradizioni pisane e degli insigni Maestri, Betti e Dini, di cui fu successore. Visse tutto dedito soltanto alla famiglia e alla scuola; ma più della scienza, più di ogni cosa, più della propria famiglia e di sè stesso amò la patria, a cui avrebbe tutto sacrificato.

Ebbe pertanto la più viva simpatia per il programma del Governo Fascista di porre a sicura base di ogni progresso il sentimento nazionale e il culto dell'esercito e delle glorie italiane.

Vasta è la sua opera scientifica; ma, per quanto vasta, essa non dà il quadro completo nè della sua mente, nè della sua cultura; nè chi parlava con lui poteva facilmente accorgersi quale gigante del pensiero egli fosse; la sua modestia infinita nascondeva la sua superiorità di pensatore e di scienziato. I suoi interlocutori notavano però sempre lo spirito alacre e pronto, la infinita *vis comica* con cui in poche parole, talvolta in pochi versi, sapeva scolpire il carattere di un uomo o narrare un episodio; da tutto Egli sapeva trarre l'ispirazione per una frase o per una poesiola piena di arguzia e di brio.

Chi lo conosceva meglio erano gli allievi che avevano acquistato qualche dimestichezza con lui: a loro Egli insegnava con l'esempio il metodo della

ricerca geometrica, narrava i proprii studi oppure si occupava delle loro ricerche, sapendo assai spesso indicare una nuova via da percorrere o dare una idea che forniva nuovi mezzi d'indagine. E perciò quei discepoli conoscono quanto grande fosse la sua competenza nei campi della matematica anche più lontani da quelli che gli erano abituali; competenza che in modo troppo incompleto appare dalle sue Memorie. Essi ben possono dire che a lui debbono i consigli, gli incitamenti più preziosi, e che gran parte delle loro ricerche ha trovato il germe nella parola del grande Maestro. E perciò pochi uomini furono, come Luigi Bianchi, circondati da tanta riverenza e ricordati sempre con tanto affetto, con tanta devozione!

A due argomenti principalmente Egli dedicò le sue ricerche: alla geometria differenziale ed alla teoria dei numeri. Non già che Egli non si sia occupato anche di analisi pura. A Lui infatti si debbono notevolissimi teoremi di unicità per i problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico e qualche teorema di esistenza; a Lui si deve uno studio che è quasi la prefazione alla teoria dei sistemi in involuzione di equazioni alle derivate parziali; a Lui si debbono studi sulla teoria delle caratteristiche e sul metodo di Riemann. Alla teoria dei gruppi continui portò contributi importantissimi: specialmente con la generalizzazione del gruppo complementare e con la ricerca delle geometrie a tre dimensioni di Riemann che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Infine ricorderò una Memoria sulle funzioni ellittiche (di ispirazione Kleiniana) che si riconnette alla teoria dei sottogruppi congruenziali del gruppo modulare. Nella teoria dei numeri un gruppo cospicuo di ricerche si riannoda alla teoria dei poligoni o poliedri fondamentali, alle loro applicazioni alla teoria delle forme aritmetiche e degli ideali.

Non vi è però alcun dubbio che la parte essenziale della sua produzione scientifica si volge nel campo della geometria differenziale, a cui si dedicò dalla tesi di laurea fino alla Memoria postuma edita dallo Zanichelli. Per quasi mezzo secolo Egli lavorò senza interruzione; gli Atti della nostra Accademia, quelli dell'Accademia di Torino, gli Annali di Matematica, per non parlare di altri periodici, hanno pubblicato quasi ogni anno una o più Memorie o Note del Bianchi. È una mole di lavoro colossale che si estrinseca in molti Trattati e in numerosissime Memorie originali: eppure quante altre ricerche egli cominciò, avviò, e lasciò incompiute! Egli si occupò di tutti i capitoli della geometria differenziale, scopri tra i capitoli più disparati le più impensate relazioni, trovando intimi legami tra ricerche che sembravano affatto distinte. Molti suoi risultati ci stupiscono: così per esempio la generazione cinematica da lui trovata per le superficie W è un teorema di cui ancora oggi ci sfugge l'intima ragione, come ci sfugge il metodo con cui il Bianchi poté scoprirlo. Egli possedeva in sommo grado l'intuizione geometrica; un caso particolare bastava a fargli prevedere il risultato generale; le più gravi difficoltà analitiche, che avrebbero scorag-

giato qualunque ricercatore, venivano sovente trasformate da una osservazione geometrica in modo tale che la trattazione non presentava più alcuna difficoltà e si riduceva talvolta a sole verifiche. Voglio ricordare soltanto una delle più geniali sue scoperte: quella delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche: per mezzo della affinità di Ivory in poche parole dimostra l'applicabilità di due certe superficie: mentre il problema affrontato direttamente non offriva speranza alcuna di successo. Nè è trascurato il lato analitico che approfondì sempre con gran cura: memorabili sono da questo punto di vista le sue ricerche sulle equazioni di Moutard con un gruppo quadratico di soluzioni. I campi che Egli ha più elaborato sono la teoria dei sistemi ciclici, e più generalmente dei sistemi di Lamé, la teoria delle congruenze W , le trasformazioni (asintotiche) che fanno passare dall'una all'altra falda focale di una tale congruenza e la teoria delle trasformazioni per inviluppi di sfere delle superficie e dei sistemi di Lamé, in particolare le trasformazioni conformi delle superficie per inviluppi di sfere che conservano le linee di curvatura.

L'idea fondamentale già appare nella sua tesi di abilitazione: Egli comincia la sua carriera con la scoperta della trasformazione complementare che da una superficie a curvatura costante negativa deduce altre superficie con la medesima curvatura. I teoremi geometrici che avevano servito come punto di partenza erano, è vero, già noti; la novità sta nell'averli considerati come definienti una trasformazione. E questa trasformazione era di tipo quasi nuovo e si presentava dal punto di vista analitico così interessante che lo stesso S. Lie la fece oggetto di accurate ricerche e che, partendo da essa, si creò la teoria generale delle trasformazioni di Bäcklund che fino ad oggi ha tanto occupato il Goursat e i suoi allievi. Ma il Bianchi si è dedicato specialmente ad approfondire il lato geometrico della teoria, creando per ampie classi di superficie la teoria delle trasformazioni asintotiche. E di solito, se di una superficie si conoscono tutte le trasformate, il celebre teorema di permutabilità del Bianchi ci assicura che la determinazione delle trasformate di queste ultime, cioè la ripetuta applicazione di una trasformazione asintotica non richiede che calcoli algebrici e di derivazione. E ci è impossibile qui anche solamente elencare le superficie e gli enti geometrici svariatisimi per cui il Bianchi ha dato una teoria di trasformazione asintotica. Nel caso delle superficie una trasformazione di contatto di Lie che porti le rette in sfere fa corrispondere alle trasformazioni asintotiche le trasformazioni di Ribaucour; si dicono trasformate di Ribaucour due superficie che siano in una corrispondenza che conservi le linee di curvatura e che formino le falde focali di un inviluppo di ∞^2 sfere. Naturalmente il Bianchi ha studiato a lungo tali trasformazioni, deducendone nuove trasformazioni per le superficie isoterme e portandone la teoria con la estensione del teorema di permutabilità alla stessa perfezione cui era stata portata la teoria delle trasformazioni asintotiche. E naturalmente il Bianchi

scopre nuove classi sia di superficie sia di altri enti geometrici a cui si possono applicare le trasformazioni per involuppi di sfere. Tra i risultati fondamentali di tutte queste ricerche si deve ricordare la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche, di cui abbiamo già fatto cenno e che gli valsero un premio dell'Accademia di Francia. Nelle *Mémoires des Savants étrangers* sono riassunte le sue ricerche tanto mirabili per le enormi difficoltà vinte e per la importantissima scoperta delle superficie coniugate in applicabilità. Notevolissimo il lato geometrico delle indagini e le sue relazioni con la teoria dei sistemi confocali di quadriche, la cui scoperta da sola può dimostrare quanto profonda fosse l'intuizione geometrica dell'autore. E ancora notevole è il lato analitico della teoria che conduce a nuovi problemi analoghi al problema di Bäcklund, e che ancora aspettano chi sappia trattarli con l'ampiezza di cui sono degni. Nè possiamo non ricordare le numerose classi di superficie isoterme e di sistemi di Lamé scoperti dal Bianchi, i sistemi di superficie da lui chiamati obliqui di Weingarten, che hanno indotto allo studio e alle trasformazioni di nuove classi di superficie.

E in tutte queste ricerche un metodo che per primo il Bianchi ha posto in chiara luce ed ha saputo sfruttare è stato quello della geometria non euclidea: a quante scoperte euclidee egli è stato condotto dallo studio delle geometrie euclidea indefinita, ellittica, o iperbolica! Ricordiamo in questo indirizzo le ricerche fondamentali sulle superficie non euclidee a curvatura nulla, la prima scoperta delle trasformazioni delle superficie applicabili su un paraboloide, la scoperta di nuove trasformazioni per le superficie isoterme!

Forse alcuno potrà obiettarci che in questa rapida scorsa io non sono troppo ordinato e che troppo sovente accenno senza approfondire. La colpa però non è tutta mia. Come ho già detto altra volta, l'opera del Bianchi non segue soltanto una o due vie, ma lumeggia un'intera branca delle discipline geometriche, scopre nuovi risultati, pone in nuova e migliore luce risultati già acquisiti; e tra tutte queste proposizioni antiche o scoperte dall'autore stesso Egli traccia un fittissimo reticolato di vie che collegano l'uno all'altro teorema, e che aprono nuovi punti di vista, nuovi punti di partenza per ulteriori ricerche. La geometria differenziale metrica ne esce tutta rinnovata, ne resta arricchita di metodi nuovi e di nuovi indirizzi. Ma appunto per questo un breve riassunto è impossibile. Chi voglia avere un'idea dei risultati conseguiti dal Bianchi ne scorra le classiche *Lezioni di Geometria Differenziale* e potrà farsi un'idea abbastanza precisa almeno dei risultati principali. Io ho dovuto accontentarmi di citare piuttosto gli indirizzi di studio che i risultati conseguiti, troppo vari e molteplici per essere esposti con qualche precisione in un quadro necessariamente sintetico. E naturalmente mi sono limitato ai metodi di più vasta portata, che hanno condotto alle più luminose scoperte e che ancora oggi, adoperati da

continuatori e da discepoli, si dimostrano così fecondi, così capaci di nuove e inaspettate applicazioni. Chè, se io volessi ricordar anche i risultati singoli o che meno direttamente si riallacciano ai precedenti, allora quanti e quanti lavori dovrei citare! dalla ricerca che riguarda le superficie minime cerchiata di Riemann come immagini delle rigate formate dalle binormali a certe curve di torsione non euclidea costante, agli studi relativi alle superficie di scorrimento nello spazio ellittico. Dovrei ricordare la teoria delle congruenze più volte cicliche, lo studio di alcune notevoli configurazioni di Möbius, la teoria delle congruenze di rette e delle loro deformazioni al modo di Beltrami e di Ribaucour, dovrei ricordare la relazione scoperta tra le derivate covarianti dei simboli a quattro indici di Riemann. Chiuderò piuttosto questa breve rassegna col ricordare un gruppo di ricerche che il Bianchi svolse nell'ultimo periodo della sua attività scientifica e a cui si riconnette anche il lavoro postumo citato. Voglio parlare degli enti di rotolamento: luoghi di punti, congruenze di rette, involuppi di piani. Questi studi gli hanno permesso di fondere in un tutto armonico ricerche sue e di altri relativi a problemi disparatissimi e di trovar inaspettate relazioni con la teoria delle trasformazioni; ne restano poste in nuova luce sia la teoria delle trasformazioni di Ribaucour sia particolarmente le sue applicazioni alle superficie isoterme.

Nei suoi ultimi anni il Bianchi seguì con ammirazione i nuovi metodi che avevano portato tanta novità nell'analisi infinitesimale e che da principio aveva guardato con sospetto, temendo che fossero una esagerazione del metodo critico. Ma non poteva tollerare le ricerche fatte per il solo gusto di ottenere facili generalizzazioni, nè i risultati che si presentavano in forma complicata ed astrusa: egli li riteneva perfettamente inutili al progresso scientifico il quale può trovare incitamento soltanto da idee semplici e luminose.

Il Bianchi, modesto e lontano da ogni ambizione, non ambì nè onorificenze, nè pubblici uffici; una volta mi disse perfino che si riteneva troppo poco colto per un incarico di analisi superiore! Ed Egli, nella sua infinita modestia così lontana dalle crescenti ambizioni di tanti, credeva certo a quello che diceva. Ma gli onori gli vennero, è vero, quasi a sua insaputa, e senza che mai egli li avesse ricercati. Fu Cavaliere dell'Ordine Civile di Savoia, membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Senatore del Regno. Negli ultimi tempi la sua salute, minata da una albuminuria ribelle a ogni cura, lo aveva però costretto a non lasciar più la sua Pisa, dove era circondato dal reverente affetto dei colleghi e dalle affettuose e impareggiabili cure delle due figliole. Fece lezione fin quasi al suo ultimo giorno, quel giorno che Pisa ben a diritto considerò come giorno di lutto cittadino. I funerali solenni a cui partecipò la città intera, a cui parteciparono il Cardinale Arcivescovo, le massime Autorità Civili, Militari, Universitarie, a cui prese parte una folla immensa, reverente

e commossa, provarono quanto affetto, quanta stima, quanta ammirazione circondassero l'opera e la persona del geniale geometra, del grande cittadino!

DATI BIOGRAFICI DI LUIGI BIANCHI

Nato il 18 gennaio 1856 a Parma.

Concorre per l'ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa il 14 novembre 1873.

Laureato in Matematica il 30 novembre 1877.

Abilitato all'insegnamento il 13 gennaio 1879.

Consegue posti di perfezionamento (a Pisa per il 1877-78 e 1878-79) (all'estero per il 1879-80 e 1880-81).

Professore nella R. Scuola Normale Superiore di Pisa dal 1881-82.

Professore nella R. Università di Pisa dal 3 aprile 1886.

Morto il 6 giugno 1928.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL SOCIO LUIGI BIANCHI

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.

Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten (4) 1.

Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche (4) 21.

Sulle soluzioni comuni a 2 equazioni alle derivate parziali del 2° ordine con due variabili (4) 22: tre Note.

Sopra i sistemi doppiamente infiniti di raggi (4) 31.

Sopra una classe di trasformazioni in sè medesima di una equazione alle derivate parziali (4) 41.

Sulle superficie Fuchsiane (4) 42.

Sulla equazione a derivate parziali del Cayley nella teoria delle superficie (4) 41.

Sulle forme quadratiche a coefficienti ed a indeterminate complesse (4) 51.

Sui sistemi di equazioni ai differenziali totali (4) 51.

Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine (4) 52.

Sulle superficie, le cui sezioni, fatte con un sistema di piani paralleli, tagliano le linee di curvatura sotto angolo costante (4) 62.

Sopra una classe di rappresentazioni equivalenti della sfera sul piano (4) 61.

Sui gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti interi complessi (4) 61.

Sopra una classe di gruppi Fuchsiani riducibili a gruppi modulari (4) 61.

Sopra una nuova classe di superficie appartenenti a sistemi tripli ortogonali (4) 61.

Sulle superficie le cui linee asintotiche in un sistema sono curve a torsione costante (4) 61.

Sui gruppi di sostituzioni lineari e sulle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite (4) 72.

Sulle trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche (5) 12.

Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili e inestendibili (5) 12.

Sulla trasformazione di Bäcklund per i sistemi tripli ortogonali pseudosferici (5) 12.

Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri regolari (5) 22.

Sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici (5) 31.

- Applicazioni geometriche del metodo delle successive applicazioni di Picard (5) 31.
Sulla interpretazione geometrica del teorema di Montard (5) 31.
Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso (5) 32.
Il metodo di Riemann esteso ecc. - Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni delle derivate parziali di ordine superiore (tre Note) (5) 41.
Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche (5) 51.
Sopra i divisori normali d'indice primo di un gruppo finito (5) 71.
Sull'applicabilità di due spazi con la medesima curvatura di Riemann costante (5) 72.
Sulla teoria della deformazione delle superficie di rivoluzione (5) 81.
Sopra le superficie a curvatura costante positiva (5) 81.
Notizie sull'opera matematica di Sophus Lie (5) 81.
Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva (5) 81.
Sulle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante (5) 81.
Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie d'area minima (5) 82.
Relazione sul concorso ai premi Ministeriali per l'anno 1908
Sulle deformazioni delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili (5) 92.
Sulla integrazione dell'equazione $\Delta_2 u = 0$ nello spazio indefinito non euclideo (5) 92.
Sopra una proprietà generale delle linee di curvatura di una superficie (5) 102.
Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann (5) 111.
Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione di una superficie (5) 111.
Sulla deformazione delle superficie di rotazione (5) 111.
Sulle quadriche coniugate in deformazione (5) 121.
Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni (5) 121.
Sulle superficie a linee di curvatura isoterme (5) 122.
Sopra le rappresentazioni equivalenti della sfera e le coppie di superficie applicabili (5) 131.
Sopra le coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica (5) 131.
Il teorema di permutabilità per le trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme (5) 131.
Sui gruppi di proiettività (5) 132.
Relazione sul concorso al premio Reale 1901.
Sulla deformazione dei paraboloidi (5) 142.
Sulle equazioni di Montard con gruppi di soluzioni quadratiche (5) 132.
Sulle superficie deformate per flessione dell'iperboloide rotondo ad una falda (5) 141.
Sui gruppi di movimenti (5) 162.
Sugli integrali multipli (5) 161.
Sulle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche (5) 181.
Sopra un caso limite delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche (5) 181.
Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non euclideo in tetraedri ed ottaedri regolari (5) 181.
Sopra una estensione di un teorema di Lindelöf nel calcolo delle variazioni (5) 191.
Sopra una proprietà caratteristica delle superficie applicabili sul catenoide (5) 191.
Commemorazione di Weingarten (5) 191.
Alcune formule inedite di Weingarten con applicazioni (5) 201.
Sulle trasformazioni di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche (5) 201.
Sul gruppo automorfo delle forme ternarie quadratiche suscettibili di rappresentare lo zero (5) 211.

- Sulle superficie minime cerchiare di Riemann (5) 21₁.
 Intorno ad una nuova classe di superficie (5) 21₂.
 Sopra certi sistemi di superficie pseudosferiche collegati ai sistemi di Weingarten (5) 21₁.
 Formule generali per le superficie riferite alle asintotiche con alcune applicazioni (5) 22₁.
 Superficie con un sistema di asintotiche a torsione costante e loro trasformazioni (5) 22₁.
 Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformazioni delle quadriche (5) 22₂.
 Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili (5) 23₁.
 Sul rotolamento di superficie applicabili in geometria ellittica ed iperbolica (5) 23₁.
 Sopra alcune classi di superficie applicabili e di sistemi tripli ortogonali (5) 23₁.
 Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche (5) 23₁.
 Sulle deformate rigate del paraboloide iperbolico (5) 23₂.
 Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze rettilinee di rotolamento (5) 24₁.
 Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento (5) 24₁.
 Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali (5) 24₁.
 Sulle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi tripli ortogonali (5) 24₂.
 Sulle superficie le cui linee di curvatura di un sistema tagliano sotto angolo costante le generatrici dei coni che le proiettano da un punto fisso (5) 24₂.
 Sopra una classe di sistemi *nupli* ortogonali (5) 24₂.
 Sulla generazione per rotolamento delle superficie isoterme e delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura (5) 24₂.
 Sugli spazi normali a 3 dimensioni con le curvature normali costanti (5) 25₁.
 Sulle rappresentazioni normali uniformi degli spazi a curvatura costante (5) 25₁.
 Dei sistemi ortogonali di Guichard-Darboux negli spazi di curvatura costante (5) 25₁.
 Sistemi ortogonali di Guichard-Darboux e loro trasformazioni di Ribaucour (5) 25₁.
 Sulle trasformazioni di Ribaucour di una classe di superficie (5) 25₁.
 Sopra una interpretazione geometrica dei sistemi commutativi di numeri a più unità (5) 25₂.
 Rappresentazioni normali uniformi e sistemi di Weingarten (5) 26₁.
 Sopra una proprietà caratteristica delle superficie della classe $K = -[\varphi(\alpha) + \psi(\beta)]^{-2}$ (5) 26₁.
 Sulle superficie secondarie nei sistemi tripli ortogonali pseudosferici (5) 26₂.
 Sul teorema generale di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi *nupli* ortogonali (5) 26₂.
 Sulla integrazione dell'equazione $rt - s^2 + c(p^2 + q^2)^2 = 0$ (5) 27₁.
 Sopra certe forme particolari dell'elemento lineare sferico (5) 27₁.
 Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie ∞^1 di rigate applicabili sull'iperboloide rotondo (5) 27₂.
 Commemorazione di U. Dini (5) 28₁.
 Sulle superficie spirali (due Note) (5) 28₂.
 Osservazioni circa il carattere quadratico dei numeri in un corpo quadratico (5) 29₂.
 Commemorazione di C. Jordan (5) 31₁.
 Dimostrazione elementare della infinità degli ideali primi di primo grado in ogni corpo algebrico (5) 31₂.
 Sulle radici primitive per moduli composti nei corpi algebrici (5) 32₁.
 Sulla composizione degli ideali primari assoluti in ogni corpo algebrico (5) 32₁.
 Sopra una proprietà cinematica che caratterizza le superficie W. (5) 32₁.
 Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili (5) 32₂.
 Sulle coppie di congruenze rettilinee stratificabili (5) 33₂.

Annali di Matematica.

Sulla risolvente di Lagrange per le equazioni di grado primo risolubili per radicali (2) 11.

Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l'asse e il passo (2) 13.

Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten (2) 13 e 14.

Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi (2) 15.

Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali (2) 18.

Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane (2) 19.

Ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici (2) 21 e (2) 23.

Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica (2) 24.

Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche (2) 24.

Alcune ricerche di geometria non euclidea (3) 2.

Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante (3) 3.

Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazii di curvatura costante (3) 4.

Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazii a curvatura costante (3) 5.

Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili (3) 6.

Sulla deformazione dei paraboloidi (3) 9.

Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazii di curvatura costante (3) 10.

Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche (3) 11 e (3) 12.

Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi (3) 12.

Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche (3) 18.

Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica o iperbolica (3) 18.

Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche (3) 18.

Sui sistemi obliqui di Weingarten (3) 19.

Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili su quadriche (3) 23.

Sulle congruenze rettilinee W_a parametro medie costante (3) 22.

Sopra i sistema tripli di superficie ortogonali derivati per trasformazioni di Combesure dai sistemi a curvatura costante (3) 24.

Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi *nupli* ortogonali e il teorema generale di permutabilità (3) 27 e (3) 28.

Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie ∞^1 di iperboloidi rotondi (3) 26.

Ricerche intorno ad una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali (3) 25.

La costruzione geometrica di Dierboux delle superficie applicabili sul paraboloide rotondo (4) 1.

Congruenze di sfere di Ribaucour e superficie di Petersen (Memoria postuma edita dallo Zanichelli nel 1928).

Memorie R. Accademia dei Lincei.

Sull'applicabilità delle superficie negli spazii a curvatura costante (3) II.

Sui sistemi di Weingarten negli spazii di curvatura costante (4) IV.

Sulle superficie ad area minima negli spazii a curvatura costante (4) IV.

Sulle forme differenziali quadratiche indefinite (4) V.

Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili (5) XII.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.

Sulle superficie a curvatura nulla negli spazi a curvatura costante (Atti 30).
Intorno alle superficie applicabili sui paraboloidi e alle loro trasformazioni, 38.
Sui gruppi continui finiti di trasformazioni che conservano le aree od i volumi, 38.
Sui gruppi continui finiti di trasformazioni proporzionali, 38.
Sulla rappresentazione di Clifford delle congruenze rettilinee nello spazio ellittico, 39.
Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili, 40.

Periodici varii.

Sur deux classes de surfaces qui engendrent par un mouvement hélicoïdal une famille de Lamé (Toulouse Ann. 11 H).

Sur les systèmes cycliques, dont les plans enveloppent une sphère (Ann. de l'École Norm. Supér. (3) 19).

Sur la déformation des quadriques (C. R. 142).

Quistione 744. Periodico di Matematica (3) 7.

Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales (Mém. Sav. étrangers prés. à l'Acad. de Sciences-Paris (2) 34).

Concerning singular transformations B of surfaces applicables to quadrics (Amer. Math. Soc. Bull. 23; Amer. Math. Soc. Trans. 18).

Sur le couples de surfaces à lignes de courbure associées (C. R. 170).

Sugli ideali primarii assoluti in un corpo algebrico (Journ. de Mathem. (9) 1).

Le reti di Cebicef sulle superficie e il parallelismo nel senso di Levi-Civita. (Bollett. Un. Matem. ital.) 1.

Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita nella metrica degli spazii curvi. (Rend. Accad. Napoli) (3) 28.

Intorno ad una questione sulle superficie podari (Eserc. matem. del Circ. Matem. di Catania, 3).

Sur une propriété cinématique des surfaces W (C. R. 176).

Sopra una classe di sistemi tripli ortogonali di Weingarten. (Boll. Unione Matematica Ital. 2).

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

Sulle superficie applicabili, 1878 (tesi di laurea).

Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sugli elicoidi, 1879 (Dissertaz.).

Giornale di Battaglini.

Sulle trasformazioni univoche nel piano e nello spazio, XVI.

Sopra la deformazione di una classe di superficie, XVII.

Ricerche sulle superficie elicoidali, XVII.

Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci ecc., XVII.

Sulle superficie a curvatura costante positiva, XX.

Sopra alcune classi di sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali, XXI e XXII.

Sulle curve a doppia curvatura, XXI.

Sopra una proprietà caratteristica delle superficie ad area minima, XXII.

Mathematische Annalen.

Ueber die Flächen mit konstanter negativer Krümmung, 16.

Ueber die Normalformeln dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung, 17.

Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie, 38.

Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari, 40.

Sui gruppi di sostituzioni lineari, 42.

Sopra alcune classi di gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti complessi, 43.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten, VIII.

Ricerche sulla deformazione delle quadriche, XXII.

Sulle configurazioni di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie, XXV.

Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili, 38.

Sulle congruenze rettilinee di rotolamento, 39.

Sopra una classe di superficie collegate alle congruenze pseudosferiche, 40.

Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL.

Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti (3) 11.

Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni (3) 13.

Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde (3) 14.

Sulla teoria delle trasformazioni delle curve di Bertrand e delle superficie pseudosferiche (3) 18.

Trattati.

Lezioni di Geometria differenziale (Pisa, Nistri 1887 lit.) (Pisa, Spoerri 1894) (traduzione tedesca di M. Lukat; Teubner 1896 e 1899), 2^a ediz. (1902–1903 in 3 vol.); 3^a ediz. 1922.

Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois (Pisa, Gazani 1897 lit.; Spoerri 1900).

Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche. Pisa, Spoerri, 1898–99 lit.; 1901 (1^a ediz.); 1916 (2^a ediz.).

Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. (Pisa, Spoerri 1903 [lit.] e 1918).

Lezioni sulla teoria aritmetica delle forme quadratiche binarie e ternarie. (Pisa, Spoerri).

Lezioni di Geometria analitica. (Pisa, Spoerri 1915).

Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principii di aritmetica analitica. (Pisa, Spoerri 1921). (Bologna, Zanichelli 1923).

NB. - Tutte le edizioni Spoerri appartengono oggi alla Casa Editrice Zanichelli (Bologna).

Commemorazione del Socio Aldo Perroncito

letta dal Corrisp. ANTONIO DIONISI nella seduta del 1 giugno 1929.

Nell'espore l'opera di ALDO PERRONCITO, che conobbi fin dai suoi primi passi nel lungo cammino della ricerca, e che seguii sempre con interesse e con amore, fino alla sua maturità completa, manterrò la stessa obbiettiva serenità dell'animo, con la quale ho ripreso in questi giorni lo studio dei suoi lavori e della sua vita di cittadino, di insegnante e di soldato.

Confesso che lo sforzo non è lieve, specialmente quando si affollano i ricordi della guerra nostra, alla quale egli partecipò, ma è pur necessario, per raggiungere lo scopo che mi sono prefisso.

Amo difatti riuscire solo a divulgare in questa grande famiglia di studiosi, composta di cultori di tante discipline disperate, la parte che Egli ha avuta nel progresso del sapere e nel rinvigorire la fiamma che si alimenta nelle Università nostre, come simbolo di aspirazione costante alla grandezza dell'Italia.

Commemorando Golgi, Aldo Perroncito disse: « Oggi non può essere giorno di pianto: Egli vuole che ci raccogliamo tutti nella sua passione, nella fede per il lavoro scientifico e per l'Università di Pavia ».

Lo stesso omaggio rendiamo oggi a Lui, immaturamente rapito alla scienza, alla scuola, alla patria e alla famiglia.

Aldo Perroncito appena uscito dal Linceo d'Azeglio di Torino, col massimo degli onori, concesso nelle scuole medie, raggiunse l'Università di Pavia.

Aveva egli allora diciassette anni, nobilissime tradizioni famigliari, per i meriti del padre, tra i più illustri parassitologi d'Italia, ed entrava nello Studio, ove l'eco ripeteva ancora i nomi di Spallanzani, di Scarpa, di Mantegazza e di Bizzozero e dove brillava di luce intensissima la fama di Camillo Golgi, di cui può dirsi, come di Spallanzani, che in pochi anni aveva fatte tante scoperte, quante non n'erano uscite da un secolo da parecchie accademie.

Battista Grassi, l'allievo fedele di quella Università, nella magnifica pubblicazione di quest'Accademia: *Cinquanta anni di Storia italiana*, scrisse, iniziando il capitolo della Storia delle Scienze biologiche, a lui affidato:

« L'Ateneo lombardo rappresenta il sole della biologia italiana nell'ultimo cinquantennio, e io credo che un tale riconoscimento sia generale, come generale sia la reverenza per questa "Alma mater" ».

L'Alma mater inondò subito di luce e calore il giovane studente, che, ancor prima dei venti anni seppe discutere e risolvere questioni di elevatissimo interesse.

Non mi sembra inopportuno ricordare con una certa diffusione le ricerche fatte da Perroncito, durante i primi anni dello studentato, a dimostrazione della precocità di lui nell'impadronirsi di alti problemi scientifici e di risolverli.

Angelo Ruffini, il reputato maestro di Bologna, aveva sostenuto in base a una finissima e interessante osservazione personale, che nella così detta terminazione nervosa motoria dei muscoli non si dovesse sempre riconoscere l'ultima tappa della fibra nervosa, la quale, per quanto suddivisa e ridotta in sottilissime fibrille, poteva non esaurirsi nel sarcoplasma della fibra muscolare, nella così detta placca sarcoplasmatica, priva di neurofibrille e ricca di nuclei.

Egli aveva difatti osservato che da uno dei rami, considerato come terminale poteva provenire una tenue fibrilla, che chiamò *ramo ultraterminale*, il quale, dopo un lungo o breve tragitto, finiva nella stessa fibra muscolare, ove poggiava la placca di origine, oppure si metteva in rapporto con qualche fibra muscolare vicina.

Era sembrato ad Apàthy che questo interessante reperto, il quale dimostrava, che l'espansione della fibra nervosa nel muscolo era da considerarsi solo come una parte del decorso delle neurofibrille e non come l'estrema fine di esse, costituisse un valido appoggio alla sua ipotesi, già accolta con viva simpatia dagli studiosi.

Aveva difatti egli sostenuto, in base alle sue classiche ricerche sulle neurofibrille negli invertebrati, che le vie nervose erano continue, in tutto l'organismo, facendo esse capo da una parte nei centri e dall'altra a una *grata nervosa elementare a maglie poligonali*, chiusa e costituita da neurofibrille senza rivestimento di sostanza perifibrillare.

Si sarebbe così formato un apparecchio, *ovunque chiuso*, come quello della circolazione sanguigna, che appariva allora il tipo perfetto di *circuito chiuso*, perchè non si era disposti da molti a riconoscere l'esistenza di vie sanguigne aperte in alcuni organi, come nella milza.

Chi è vissuto in quel periodo di tempo ricorda l'impressione profonda suscitata tra gli studiosi dal metodo di Apàthy, che metteva in evidenza le neurofibrille, le quali dalla cellula si seguivano per lungo tratto nei nervi

e che faceva concepire un cumulo di speranze sulla sua più estesa applicazione.

Ma al giovane Perroncito non mancò l'ardire di affermare col sostegno dei suoi preparati, che le così dette fibre ultraterminali avevano costantemente terminazione o nei fusi neuromuscolari, o nelle fibre muscolari comuni, e che non costituivano mai una rete speciale, che potesse essere di base all'ipotesi di Apàthy.

Ardita demolizione compì il Perroncito di un'ipotesi non sufficientemente fondata, ma completando la bella osservazione del Ruffini ebbe pure agio di diventare l'artefice di una nuova mirabile ed ammirata costruzione.

Le lunghe ricerche sulle terminazioni nervose e la perfezione raggiunta nella difficile tecnica e nella lettura dei preparati gli furono certo di sommo aiuto nella scoperta di una nuova formazione, di un plesso cioè di sottili rami che traggono origine da una sottile fibra *amielinica*, la quale corre nella guaina di Henle della fibra *mielinica*.

Egli scoprì cioè, che nella comune espansione terminale della fibra muscolare si dispone un finissimo intreccio di fibrille, che provengono da una fibra nervosa senza guaina midollare. Un finissimo intreccio della stessa specie e della stessa provenienza egli scoprì pure nel fuso neuromuscolare, specialmente nelle guaine dell'organo.

Quando Perroncito concluse perciò che ai fusi neuromuscolari arrivano fibre nervose di senso di moto e ancora un'altra categoria di fibrille, sulla natura delle quali non si poteva dire nulla di certo, per quanto egli stesso ne riconoscesse la grande rassomiglianza con le fibrille che penetrano nelle placche motrici, non si può dubitare che egli alludesse alle fibre, che gli autori recenti ritengono con certezza di origine simpatica.

Appare così all'evidenza la parte che spetta al Perroncito nel progresso delle nostre conoscenze anatomiche, sull'innervazione delle fibre muscolari striate e nella costituzione di una solida base per le audaci e geniali ipotesi sulla funzione, vanto di Mosso e di Bottazzi.

Le fibre amieliniche, riscontrate da Perroncito nei fusi neuromuscolari e nelle placche motrici sono ritenute, ormai concordemente, come di natura simpatica, specialmente dopo le ricerche del Terni, che nei rettili ne ha determinata la provenienza da gangli, rinvenuti nella coda di essi.

Non v'è fisiologo oggi, infine, che non ammetta che ogni fibra muscolare striata sia innervata da nervi motori cerebro-spinali e da fibre simpatiche e che la geniale ipotesi del Bottazzi sull'origine della contrazione tonica per raccorciamento del sarcoplasma, probabilmente innervato dal simpatico, e sull'origine delle contrazioni cloniche per trasmissione dell'eccitamento dalle fibre mieliniche cerebro-spinali alle miofibrille non trovi una base importante di fatto nella scoperta di Perroncito.

Perroncito dunque da una parte, Mosso e Bottazzi dall'altra ebbero il merito precipuo di aver dato il maggior contributo a una delle dottrine del

tono muscolare, superando difficoltà, valutabili solo da chi ha un'esperienza personale di tali ricerche.

È questa una delle poche volte che mi permetto di invocare anche la mia, per giustificare la sincera ammirazione per il giovane studioso, e di ricordare che, avendo seguito con Marchiafava e Bignami, pochi anni prima, lo svolgersi nell'istituto anatomico-patologico di Roma delle magistrali ricerche di Cipollone sull'anatomia normale e patologica delle terminazioni nervose nei muscoli striati, alle quali s'interessò personalmente anche Golgi, e che avendo assistito all'immane lavoro compiuto, per superare le difficoltà di tecnica e d'interpretazione della struttura e del significato del fuso neuromuscolare specialmente, non esitai un solo istante a riconoscere le eccezionali doti di cui, in seguito, dette ancora luminosa prova Aldo Perroncito.

Nella riunione della Società di Patologia a Firenze nel 1903 egli meritò il plauso dei numerosi intervenuti, dimostrando i preparati di quanto aveva visto, e illustrando quanto aveva pensato.

La *rigenerazione* dei nervi fu il secondo problema che occupò il Perroncito dal 1905 al 1910, per cinque anni cioè di lavoro, non interrotto mai.

Era stata accolta con grande favore anche nel nostro paese la dottrina della rigenerazione autogena, sviluppata specialmente da Bethe, in base ad una serie di esperienze impressionanti, come scrive lo stesso Perroncito.

La teoria *poligenistica* o delle catene, per la quale le fibre rigenerate erano il prodotto dell'attività proliferativa delle cellule di Schwann, che si disponevano a catena e divenivano nuove fibre aveva avuto successo maggiore della teoria, che le nuove fibre erano rigenerate dal moncone centrale.

Per quanto pochi, vi sono ancora fedeli alla prima teoria, come ad esempio Spielmeyer e v'è pure qualche spirito conciliativo, come Filippo Stöhr iunior, che non ritiene le due teorie così profondamente divise.

Perroncito nel periodo del maggior fervore insorse con vivacità contro la teoria di Bethe e la vittoria arrise alle sue ricerche.

Estese a numerosi animali, dal ramarro, al coniglio, al cavallo, all'uomo le sue esperienze e scoprì che precocemente, tre sei ore dopo il taglio, si inizia il processo di rigenerazione, a breve distanza dal luogo interrotto, e precisamente un po' più in alto di esso.

I vecchi cilindrassi proliferano, con figure caratteristiche come nella scissione della fibra nervosa in fibrille della placca motrice nei muscoli, e le nuove fibre avanzano verso il moncone periferico senza dimostrare alcun rapporto con gli elementi cellulari, che potrebbero ritenersi neuroblasti.

È questo il fenomeno che Cayal battezzò col nome di Perroncito e che tutti hanno confermato con metodi vari di ricerca.

Levi nel suo recente trattato riconosce a Perroncito in questo ammirevole studio la scoperta di fenomeni reattivi, analoghi a quelli che si manifestano nelle fibre dell'embrione, che si succedono con intensità crescente

fino a costituire un pennello di delicati filamenti, che s'assomiglia ai ciuffi terminali dei cilindrassi dei neuroblasti, coltivati in vivo.

Se i due monconi sono separati da un intervallo i cilindrassi neoformati attraversano la cicatrice, invadono il moncone periferico del nervo in regressione e finiscono col raggiungere gli organi a cui sono destinati, le fibre muscolari striate, oppure una superficie libera.

La proprietà che hanno i cilindrassi di ritrovare la propria via è meravigliosa; nella cicatrice si formano grovigli complicatissimi, fino a che le fibre ritrovano le cellule della guaina di Schwann del moncone periferico in regressione, e vi decorrono regolarmente ripristinando architettura e funzione.

La potenza di rigenerazione delle fibre dei nervi periferici è tanto grande che vince ogni ostacolo, ogni condizione artificiosamente creata, come vide Morpurgo nei ratti in parabiosi, nei quali con la sutura del moncone centrale del nervo del ratto A col moncone periferico del nervo del ratto B si produsse rigenerazione del nervo e perfetto ristabilimento della funzione.

Più meravigliosa ancora è la dimostrazione data da Nageotte della stessa rapidità di rigenerazione, riunendo direttamente i due capi tagliati, con la sutura ai due monconi del nervo di un frammento di nervo di animale conservato in alcool.

In conclusione, pare che il cilindrasse riassuma i caratteri dello accrescimento embrionale, analogamente a quanto accade nei tumori dei nervi e in altri tessuti, nei quali, specialmente in condizioni morbose, assistiamo a fenomeni, che sono considerati come sicuri indizi di mantenimento di proprietà embrionali. Intendo alludere alle molteplici attività degli elementi mesenchimali, superstiti in alcuni organi e che fanno parte del così detto sistema reticolo-endoteliale.

Le conquiste, che ho ricordate, sono talmente note agli studiosi delle nostre discipline, che devo ad essi domandar venia per averveli intrattenuti, per quanto per breve ora, ma è agli studiosi di altre scienze che mi sono in special modo diretto, perchè ad essi risultino spiegati i miracoli dell'applicazione pratica, che sono connessi con tali ricerche.

Tutti i paesi del mondo, difatti, durante la guerra, ne hanno tratti i massimi vantaggi e una delle finalità della scienza, forse la maggiore, è stata raggiunta.

Erano così passati per Perroncito dieci anni di attività forse insuperata, quando nel 1909 nella riunione tenuta a Modena della Società italiana di Patologia un nuovo forte contributo egli annunciò, con la scoperta di speciali atteggiamenti del reticolo citoplasmatico cellulare.

Parve che il suo spirito perfezionato volesse spingersi a più alti voli nel campo della biologia generale.

Nel 1898 Golgi con la reazione nera aveva dimostrato la struttura reticolare delle cellule dei gangli spinali, sfatando così la leggenda che con tale metodo non si sarebbe mai rilevato alcun particolare della struttura delle cellule.

Estesa la ricerca da Veratti, da Pensa, da Kopsch e da Cayal con lo stesso successo a numerosi altri elementi cellulari, fu riconosciuto all'apparato di Golgi il carattere ubiquitario. Ma la intima soddisfazione degli studiosi si accrebbe, quando Perroncito dimostrò per il primo la partecipazione di tale apparato al processo di moltiplicazione delle cellule.

La divisione della rete in masse paragonabili a cromosomi, la loro aggregazione in figure che ricordano la cariocinesi, donde il nome di ditocinesi, la ricostituzione di un nuovo apparecchio per ciascuna delle cellule figlie, un complesso di fenomeni, che precede di poco le prime fasi della cariocinesi, fu scoperto da Perroncito.

Basta dare appena uno sguardo all'articolo di Günther Hertwig sul citoplasma, edito quest'anno nel trattato di Möllendorf, per convincersi della importanza biologica, riconosciuta universalmente all'apparecchio reticolare di Golgi come organo del citoplasma cellulare.

Concludendo perciò dai dati esposti; in 10 anni di lavoro in età di 27 anni Perroncito poteva contare nel suo attivo:

1° la dimostrazione dell'innervazione simpatica dei muscoli striati,
2° l'attività del cilindrasse, paragonabile a quella embrionale come fonte della rigenerazione dei nervi;

3° la scoperta di una nuova fase di attività citoplasmatica, precedente alla divisione del nucleo, un complesso cioè di contributi, di cui si sarebbe sentito onorato ogni studioso, per quanto poco incline alla eccessiva valutazione della propria opera.

Il secondo decennio dell'attività scientifica del Perroncito, che va dal 1910 al 1922 ha un'impronta diversa da quella del primo periodo. S'imbattè innanzi tutto in un aspro cammino, attraverso una terra selvaggia, che resiste ancor oggi ad ogni tentativo di penetrazione nelle sue viscere.

Alludo al problema etiologico della pellagra che lo appassionò e che impegnò tutte le sue forze a demolire e a distruggere senza ricostruire. A sua difesa però si può aggiungere che ancora oggi una nuova costruzione non è sorta, se per tale non si possa apprezzare, come sembra ad alcuni giusto, l'ipotesi dell'assenza nella dieta di una speciale sostanza antipellagrosa, contenuta forse nelle proteine (Funk).

Perroncito che in tale periodo fu per un anno in Germania e in Francia, e per quattro anni in guerra, compì pure osservazioni degne di interesse, quali quelle che si riferiscono all'azione microbica specifica degli estratti di vermi intestinali, quelle sulla resistenza delle cellule degli organismi a variazioni di pressione osmotica e di alimentazione e quelle sul fenomeno

della isotossicità del sangue, da lui per primo messo in evidenza e analizzato con la consueta acutezza.

Intese egli per isotossicità la proprietà tossica, acquisita dal sangue di un animale, antecedentemente trattato con minime dosi di siero di anguilla, e che si dimostra quando il sangue venga inoculato in un animale della stessa specie.

Tale tossicità egli dimostrò anche nel sangue di animali, che subirono malattie varie, mettendo anche in evidenza che essa scompare dopo un salasso.

È lecito pensare che tali conoscenze possano suggerire utili precauzioni nella pratica della trasfusione del sangue, oggi così diffusa e a cui si riconosce la capacità di ridare la vita, come pure di produrre rapida morte per ragioni finora ignorate, e che nel fenomeno scoperto da Perroncito potrebbero trovare una chiara spiegazione.

Nel terzo periodo del dopo guerra si riavvampò la fiamma della ricerca con l'attacco al problema delle origini delle piastrine e a questioni da tempo e attualmente discusse sulla fisiopatologia del fegato.

Tecniche difficilissime che, per quanto da lunghi anni tentate, non danno risultati costanti, esperienze complicate, che non possono essere chiaramente interpretate, costringono ad attendere un maggiore sviluppo delle ricerche e nuove conferme.

Più che la produzione personale, che d'altra parte non fu mai interrotta, perchè si rivelò anche in capitoli di trattati i più noti da lui magistralmente redatti, prevalse in questi ultimi anni l'impulso fecondo ch'egli seppe dare agli allievi, accorsi numerosi sotto la guida di lui, succeduto a Camillo Golgi.

Problemi vecchi e nuovi furono oggetto di studi e di pubblicazioni, attestanti l'attività e la maestria di chi ne fu l'animatore.

Aldo Perroncito, in conclusione, per la qualità della sua opera scientifica merita di essere noverato tra quelli dei biologi del nostro secolo, cui si deve una ricca messe di fatti nuovi, messi in luce e l'indicazione di nuovi problemi, ai quali la durata della sua vita concesse solo di dare un avviamento che sarà certo seguito da quanti, e non sono pochi, agognano ad onorare così la sua memoria.

Egli visse, pensando, come Goethe *che è degno della libertà e della vita soltanto colui che ogni giorno lotta per conquistarla e vi consacra senza tema di pericolo l'ardore della gioventù e la saggezza della sua maturità.*

Temperamento artistico era buon intenditore di terracotte, appassionato visitatore di mostre di scultura e di pittura. Amò i nostri poeti, da Virgilio a Orazio, da Ariosto a Foscolo e a Carducci.

Irredentista, ed entusiasta e fecondo diffusore dei concetti che ispiravano la Dante Alighieri fu membro attivo del Comitato di Pavia.

Quando si bandì la guerra mondiale si arruolò volontario e il 24 maggio 1915 partì da Torino, maggiore medico, lasciando la giovane sposa i

teneri figliuoli, il vecchio padre lo zio e la zia Golgi, l'insegnamento e il laboratorio e accorrendo dove i fratelli sostenevano il loro ideale: « l'Italia avanti tutto », « l'Italia sopra tutto ».

Inviato, in seguito a sua domanda, nel giugno 1915 nella regione di Plava, al comando della colonna sanitaria di rinforzo vi rimase sino alla fine delle sanguinose giornate delle prime offensive.

Igienista della 1^a Armata, il 24 maggio 1916, quando gli Austriaci si erano impadroniti delle sorgenti dell'Acquedotto degli Altipiani giunse ad Asiago, mentre le artiglierie austriache ne completavano la distruzione.

Sul Carso nella zona di Selò partecipò in qualità di Comandante della sezione di Sanità alle azioni belliche della grande offensiva austriaca dell'autunno 1917, fece la ritirata con la 54^a divisione di copertura che difese successivamente l'Isonzo, il Torre, il Tagliamento, il Livenza e che sul Piave riportò le prime vittorie.

Perroncito divenne, durante la guerra, facile preda del terribile male che gli dischiuse la tomba.

Giacomo Veneziani, giurista e soldato sul Carso colpito alla fronte cadde per la Patria e per il Diritto, Perroncito subì le ansie e la lenta agonia del male.

Lo sappiano i giovani, che i loro maestri subirono, com'essi, il fascino della trincea che era allora il confine della patria, e provarono gli stessi palpiti e benedissero i giorni di gloria, come seppero resistere a quelli di tristezza.

Perroncito ebbe premi per il lavoro scientifico, il più grande dei quali fu la cattedra di Pavia, conquistata per concorso e l'essere ritenuto degno successore di tanto maestro.

Vincitore di concorsi italiani ed esteri, laureato dell'Istituto di Francia, professore di patologia generale a Cagliari a 32 anni, a Pavia a 40 anni, accademico nazionale dei Lincei a 43 anni, amato dalla sua famiglia e dai suoi allievi si spense a 47 anni dopo aver dato 29 di essi alla ricerca scientifica, alla scuola e alla patria e averle volute sempre grandi, forti e onorate.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. ALDO PERRONCITO

1. « Sulle terminazioni dei nervi nelle fibre muscolari striate ». (Con 5 fig.). (Boll. Soc. Med. Chirurg.), Pavia 1911.

Idem - (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere). Serie II, vol. XXXIV, 1901.

Idem - « Con dimostrazione di preparati », (Compt. rend. de l'Assoc. des Anat.). III Sess., Lyon 1901.

2. « Sur la terminaison des nerfs dans les fibres musculaires striées ». (Arch. It. de Biol.), vol. 32, fasc. 2.

3. « Studi ulteriori sulla terminazione dei nervi dei muscoli a fibre striate ». (Con 2 tav.). (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia 1902.

Idem - (Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett.). Serie 2, vol. 34.

4. « Etudes ultérieures sur la terminaison des nerfs dans les Muscles striés ». (Arch. It. de Biol.), vol. 38.

5. « Sulle terminazioni nervose nei muscoli a fibre striate ». (Com. fatta al Congresso della Soc. Ital. di Pat. Firenze 1903; con dimostrazione di preparati). (Gazz. Medica Italiana), n. 52, 1913.

6. « Sulla questione della rigenerazione autogena delle fibre nervose ». (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia, 1905.

7. « Sur la question de la regeneration autogene des fibres nerveuse ». (Arch. Ital. de Biol.), tom. 44, fasc. 3.

8. « La rigenerazione delle fibre nervose ». (Con 3 tavole). (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia 1905.

Idem - (Arch. per le Sc. Mediche), vol. 29.

9. « La régénération des fibres nerveuses ». (Arch. It. de Biologie), vol. 44.

10. « La rigenerazione dei nervi ». Dissertazione di laurea, Pavia, giugno 1905.

11. « La rigenerazione delle fibre nervose ». III Nota preventiva (con 3 tavole). (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia 1906.

Idem III - Nota preventiva (con tre tavole). (Arch. Sc. Mediche), vol. 30.

12. « La regeneration des nerfs ». (Nota III). (Arch. It. de Biol.), tom. 46.

13. « La rigenerazione dei nervi dal punto di vista anatomico. Il ripristino funzionale nel territorio dei nervi lesi in rapporto con la questione anatomica della rigenerazione ». (Con dimostrazione di preparati). (Atti della I Riunione della Soc. Ital. Patol.), Pavia 1906.

Idem (Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett.). Serie II, vol. 40.

14. « Die regeneration der nerven ». (Ziegler-Beitrage), 1907.

15. « La rigenerazione dei nervi ». (Memorie del R. Ist. Lomb. di Sc. e Lettere), 1908.

16. « Sulla presenza di grasso nelle ghiandole linfatiche in seguito all'azione delle sostanze contenute nel corpo del bacillo della tubercolosi ». (Comunicazione preventiva con dimostrazione di preparati). (Atti della Riunione della Soc. It. di Pat.), Modena, 1909.

17. « Sulla rigenerazione dei nervi ». (Risposta a Albrecht Bethé). (Boll. Soc. Med. Chir.), 1908.

18. « Sur frage der nervenregeneration beobachtungen und neue experimete ». (Zieglers-Beitrage), 1908.

19. « Le vie collaterali nervose e il ripristino funzionale nel territorio dei nervi lesi ». (Risposta a M. Segale). (Lo Sperimentale), 1908.

20. « Gli elementi cellulari nel processo di degenerazione dei nervi ». (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia 1909 (i preparati cui riferisce questa Nota furono dimostrati nella V Riunione della Soc. Ital. di Pat., Palermo, 1908 (vedi atti).

21. « Ueber die zellen beim degenerations vorgang der nerven ». (Folia Neuro-Biologica), Bd. III.

22. « Azione dei vermi intestinali sui batteri ». (Atti del 1° Congresso Internazionale dei Patologi), Torino 1911.

Idem (Rend. Irt. Lomb. di Sc. e Lettere), 1912.

23. « Ueber den einfluss der ernahrung auf den osmotischen druck der nierenzellen ». (Berlin Phys. Gesells. Sitz.), 5 Mai 1911.

24. « Variazioni sperimentali di resistenza delle cellule di fronte a diverse pressioni osmotiche ». (Congresso Internaz. dei Patologi), Torino 1911.

25. « Variazioni sperimentali di resistenza delle cellule di fronte a diverse pressioni osmotiche ». Nota preventiva II. (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia 1912.

26. « La biologia generale e l'ora attuale nella sua storia ». (Natura), 1912.

27. « Isotossicità del sangue di animali trattati con siero d'anguilla ». (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia, 1909.
28. « Isotoxité du sang d'animaux traités avec le serum d'anguille ». (Compt. Rend. de la Soc. de Biol.), tom. 68.
29. « L'isotossicità del sangue (conclusioni) ». (Atti della VIII Riunione della Soc. Ital. di Patologia), Pisa 1913.
30. « L'isotossicità del sangue ». Nota riassuntiva. (Rend. Ist. Lomb. di Sc. e Lett.), 1913.
31. « Sul fenomeno dell'isotossicità del sangue ». (Arch. delle Sc. Mediche), vol. 39, 1915.
32. « Sur le phenomene de l'isotoxité du sang ». (Arch. It. de Biol.), 1915.
33. « Studi sulla pellagra ». I Nota preventiva. (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia, 1910.
34. « Studi sulla pellagra ». II Nota preventiva. (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia, 1910.
35. « Eziologia della pellagra ». Relazione data all' VIII Riunione della Soc. It. di Pat., Pisa 1913. (Lo Sperimentale), 1913.
36. « Antiche e nuove dottrine sulla eziologia della pellagra ». (Attualità Medica), 1914.
37. « Condrosomi, cromidii e apparato reticolare interno nelle cellule spermatiche ». (Nota preventiva). (Rendiconto R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett.), 1908.
38. « Mitocondri, cromidii e apparato reticolare interno nelle cellule spermatiche ». Nota II (Comunicazione preventiva). (Rend. Ist. Lomb. di Sc. e Lett.), 1908.
39. « Il fenomeno della ditocinesi ». (Atti della IV Riunione della Soc. It. di Pat.), Modena, 1909.
40. « Contributo allo studio della biologia cellulare: Mitocondri, cromidii e apparato reticolare interno nelle cellule spermatiche. Il fenomeno della ditocinesi ». (Mem. della R. Acc. dei Lincei), 1910.
41. « Contribution a l'etude ecc. ». (Arch. It. de Biol.), 1910.
42. « Sui mitocondri della cellula uovo ». (Anat. Anz.), nn. 9-10, 1911.
43. « Sui mitocondri della cellula uovo ». (Anat. Anz.), nn. 14-15, 1911.
44. « Un nuovo metodo di anastomosi venosa (anastomosi termino-laterale della porta colla cava) ». (Atti dell' VIII Riunione della Soc. Ital. di Pat.), Pisa 1913. (Lo Sperimentale), 1913.
- Idem - (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia 1913.
45. « Sugli effetti della deviazione dal fegato della circolazione portale ». (Biochimica), 1913.
46. « Mitocondres et appareil reticulaire interne », (à propos d'une publication de J. Duesberg).
47. « Ascite sperimentale ». Nota preventiva. (Ricerche di Biologia dedicate al prof. Alessandro Lustig), 1915.
48. « Megacariociti e piastrine del sangue ». (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia, 1919.
49. « Sulla derivazione delle piastrine dai Megacariociti ». (Haematologica), 1920, fasc. 1^o.
50. « Sulla derivazione delle piastrine ». (Haematologica), 1920, fasc. 3^o.
51. « Sulla derivazione delle piastrine ». (Haematologica), 1921.
52. « Sulla estirpazione del fegato ». (Riforma Medica), 1920.
53. « Sulla estirpazione del fegato ». (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia 1920.
54. « Malaria e lotta antimalarica in Sardegna ». (Discorso inaugurale R. Università di Cagliari, 20 novembre 1921). Cagliari, Tip. Valdes.
55. « Esperimento di bonifica umana in località intensamente malarica ». (Reale Ist. Lomb. di Sc. e Lettere), vol. 56, 1923.
56. « Esperimento di bonifica umana in località intensamente malarica ». (Reale Ist. Lomb. di Sc. e Lettere), vol. 57, 1924.

57. « Le piastrine del sangue ». (Lavoro onorato dal R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. del prelnio di Fondazione « Cagnola », 1922), Pavia, Tip. Coop.

58. « Sulla derivazione delle piastrine ». Nota IV. (Haematologica), fasc. 1^o, vol. 7, 1926.

59. « L'origine des Globulins et la theorie de Wright ». (Le Sang), tom. 1^o, n. 4, 1927.

60. « Commemorazione di Camillo Golgi ». (Società Med. Chir.), Pavia, 12 marzo, 1926.

61. « Regeneration et guerison des blessures ». (Bull. Soc. Sc. méd. et biol. de Montpellier), novembre, 1926.

62. « Sull'estirpazione del Fegato ». Nota II. (Riforma Medica), anno 40, n. 11, 1924.

63. « Sulla patogenesi dell'ascite ». (Boll. Soc. Med. Chir.), Pavia, anno 47, 1927.

64. « Sulla patogenesi dell'ascite ». (Arch. per le Sc. Med.), vol. 50, 1927.

65. « Sulla gotta sperimentale ». (Boll. Sc. Med. Chir.), Pavia 1927, anno 41.

66. « Sull'uricemia sperimentale ». (Arch. Sc. Biol.), vol. 12, 1928.

67. « Sull'estirpazione del fegato, (due nuovi metodi) ». (R. Accad. Lincei), vol. 7^o, giugno, 1928.

NOTA. - Il prof. Aldo Perroncito fu assunto come collaboratore per:

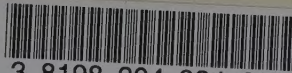
« Malattie infettive dell'uomo e degli animali ». Trattato pratico di parassitologia del Lustig.

« Nouveau Traité de medecine » di: Bouchard, Roger, Widal, Teissier e Gouget.

« Anatomia patologica ». Trattato per medici e studenti di Pio Foà.

INDICE

Commemorazione del Socio Antonio Abetti	Pag.	III
» » Socio Claudio Segré	»	XI
» » Socio Corrisp. Luigi Brugnatelli	»	XVII
» » Socio Straniero Jacob Felix Marchand	»	XXVI
» » Socio Luigi Bianchi	»	XXXIV
» » Socio Aldo Perroncito	»	XLV



3 8198 304 934 688

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

4

